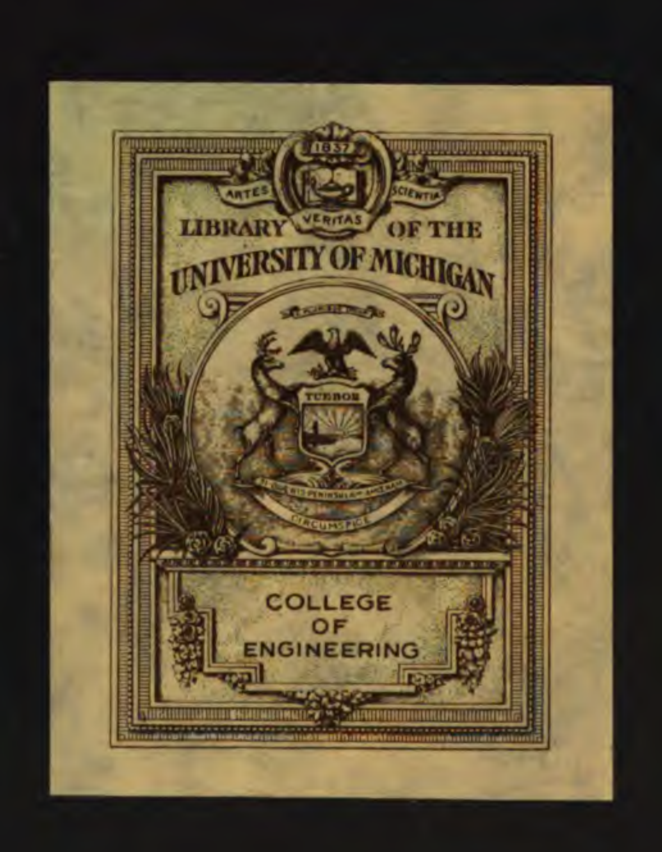

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
COLLEGE
OF
ENGINEERING







Allgemeine Erläuterung zu dem Unterrichtswerke

Statik
und
Festigkeitslehre

Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium für Ingenieure, Techniker und Studierende

von

Max Fischer.

Vierte Auflage.

Mit zahlreichen Beispielen und Zeichnungen.

Das Unterrichtswerk „Statik und Festigkeitslehre" von Max Fischer verfolgt den Zweck, dem Lernenden ein vollständiges, systematisches Selbststudium der gesamten Statik und Festigkeitslehre zu ermöglichen. Die vorliegende Auflage ist eingeteilt in:

Band I:

Grundlagen der Statik und Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Systemen (einschließlich Eisenbeton).

Band II:

Berechnung von statisch bestimmten Fachwerksystemen und Nachträge.

Band III:

Die Lehre von den Formänderungen.

Band IV:

Die Berechnung von statisch unbestimmten Systemen.

Band V:

Übungsband: Zusammenstellung von ausgeführten Berechnungen aus der Praxis.

Aufbau des in Band I-V enthaltenen Stoffes.

Band I (bereits erschienen).

Grundlagen der Statik und Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Systemen.

A. Die Grundlagen der Statik.

a) Entwicklung der Grundlagen der technischen Statik aus der allgemeinen Mechanik.

Die Wirkung von Kräftegruppen. Kennzeichen für das Gleichgewicht eines von Kräften ergriffenen Körpers.

b) Anwendung der mechanischen Grundlagen zur Berechnung der Auflagerkräfte bei statisch bestimmt gelagerten Konstruktionen.

Methoden zur Ermittlung der Auflagerkräfte. Unterschied zwischen statisch bestimmter und statisch unbestimmter Lagerung. Einführung in das Arbeiten mit Einflußlinien (bei Untersuchung beweglicher Lasten).

B. Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Konstruktionen.

(Walz- und Nietträger, Pfeiler, Stützen, Betonkonstruktionen usw.)

a) Einfache Zug- und Druckfestigkeit.

b) Berechnung von auf Biegung beanspruchten Balken.

Spannungskomponenten σ und τ. Nullinie, Trägheits- und Widerstandsmomente für verschiedene Querschnittsformen. Kraftsummen Q und Momentensummen M für verschiedene Belastungsarten, namentlich auch für bewegliche Belastung und für den Gerberschen Träger. Berechnung genieteter Träger. Einiges über die Formänderungen von auf Biegung beanspruchten Trägern (Das Wichtigste über Durchbiegungen). Biegung durch exzentrische Belastung. Besondere Aufgaben aus der Biegungslehre.

c) Berechnung von auf Knickung beanspruchten Körpern.

Säulen und Stützen.

d) Eisenbetonkonstruktionen.

Statik

und

Festigkeitslehre

Statik
und
Festigkeitslehre

Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium
für Ingenieure, Techniker und Studierende

von

Max Fischer.

Zweiter Band:

Berechnung von statisch bestimmten Fachwerk-konstruktionen.

Vierte. mit der dritten gleichlautende Auflage

Mit zahlreichen Beispielen und Zeichnungen

Berlin
Verlag von Hermann Meusser
1920

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

Vorwort.

Der vorliegende Band der „Statik und Festigkeitslehre" enthält die Berechnung der statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen nebst einigen weitergehenden Untersuchungen über die Theorie der Tragwerke im allgemeinen.

Die leitenden Gesichtspunkte hinsichtlich des Umfanges und der Darstellung des gebrachten Stoffes sind natürlich die gleichen geblieben wie beim I. Bande: Das Buch soll dem Lernenden ermöglichen, ein wirkliches Selbststudium der Statik zu betreiben. In Anwendung auf den vorliegenden Band heißt dies: Wer den ernsthaften Willen hat, sich in die Theorie der Fachwerke einzuarbeiten, soll durch das Buch so weit gefördert werden, daß er jede in der Praxis vorkommende statisch bestimmte Fachwerkkonstruktion selbständig und mit vollem Verständnis berechnen kann.

Um dieses Ziel zu erreichen, habe ich auch bei diesem Bande besondere Sorgfalt auf eine elementare, leichtfaßliche Darstellung gelegt. Die Untersuchungen sind sämtlich mit niederer Mathematik durchgeführt. Hierdurch ist das Buch allen technischen Kreisen zugänglich gemacht, während andererseits der Nachteil der elementaren Methode, nämlich eine gewisse Umständlichkeit gegenüber den Methoden der Infinitesimalrechnung, gerade bei der Fachwerktheorie am wenigsten in Erscheinung tritt. Aber noch in einer anderen Hinsicht möchte ich den elementaren Charakter des Buches betonen. Ich habe mich nicht damit begnügt, die einzelnen Untersuchungen gewissermaßen nur mathematisch durchzuführen. Im Gegenteil: ich lege besonderen Wert darauf, daß der Leser auch ohne die mathematische Formel den Gedankengang einer Entwicklung verstehen lernt. Deshalb erläutere ich bei jeder neuen Aufgabe vor allen Dingen den Zweck der ganzen Untersuchung, bespreche die verschiedenen Wege, die zur Lösung der Aufgabe führen könnten, wiederhole die Hilfsmittel aus der Mathematik und Mechanik und gehe dann erst zur eigentlichen mathematischen Entwicklung über. Auf diese Weise hoffe ich, den Lernenden zur wirklichen Beherrschung der abgeleiteten mathematischen Formeln zu führen.

Natürlich ist eine solche Unterrichtsmethode umständlicher als eine rein mathematische. Jedoch habe ich durch stetige „Wiederholungen" und „Zusammenfassungen" gesorgt, daß der Lernende niemals den Überblick verlieren wird.

Bevor der Leser an das eigentliche Studium des Bandes herantritt, werde ihm im folgenden eine kurze Übersicht über den gesamten Stoff gegeben: Abschnitt I enthält die allgemein gültigen Berechnungsmethoden. In diesem Abschnitte wird der Lernende so weit gefördert, daß er jede Fachwerkkonstruktion, sofern die Belastung feststeht, berechnen kann. Die eigentliche mathematische Theorie des Fachwerkes ist also bereits mit diesem Abschnitte erledigt. Einige Fragen der Praxis erfordern aber noch eine besondere Untersuchung, die in den Abschnitten II, III und IV durchgeführt ist. Und zwar behandelt Abschnitt II den Träger zwischen zwei Stützen mit beweglicher Belastung, Abschnitt III den Gerberschen Träger und Abschnitt IV den Dreigelenkbogen. Diese Abschnitte II, III und IV bilden also eine Weiterführung der in Abschnitt I enthaltenen allgemeinen Theorie, um für einige besondere Belastungs- bzw. Konstruktionsarten auch besonders geeignete Berechnungsmethoden zur Verfügung zu haben. Der Abschnitt V schließlich weicht insofern von dem Vorhergegangenen ab, als er einen neuen Lehrsatz der Mechanik, nämlich den Satz von den virtuellen Verrückungen, zur Grundlage der technischen Statik macht. Es wird gezeigt, daß dieser Satz sich ebenfalls zum Aufstellen von Untersuchungsmethoden eignet, die sich sogar durch besondere Übersichtlichkeit und Umfassenheit auszeichnen.

Berlin, Mai 1913.

Der Verfasser.

Bemerkung zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage ist inhaltlich wenig verändert gegen die zweite Auflage. Dagegen sind in der Darstellung mehrfache Verbesserungen vorgenommen, um den Stoff noch übersichtlicher zu gruppieren. Diese Änderungen geschahen durch Teilung und Umarbeitung mehrerer Paragraphen des 1.—4. Vortrages. Infolge dieser Umarbeitungen wurde aus drucktechnischen Gründen die Überspringung einiger Seitenzahlen (S. 375—378) und die Numerierung einiger Figuren außerhalb der Reihenfolge (Fig. 84'—100'') notwendig.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis von Band II.

Abschnitt I.

Allgemeine Berechnungsmethoden für Fachwerksysteme.

Abschnitt II.

Besondere Methoden für Träger auf zwei Stützen mit beweglicher Belastung.

Abschnitt III.

Besondere Methoden für den überkragenden und den Gerberschen Fachwerkträger.

Abschnitt IV.

Besondere Methoden für den Dreigelenkbogen.

Abschnitt V.

Kinematische Methoden.

Abschnitt I.

Allgemeine Berechnungsmethoden für Fachwerksysteme.

1. Vortrag:

Berechnungsmethoden für einfache Dreieckfachwerke.

§ 1.

Aufbau eines einfachen Fachwerkes.

I. Gegensatz zwischen Vollwand- und Fachwerkkonstruktion.

Der erste Band dieses Buches brachte hauptsächlich die Berechnung vollwandiger Konstruktionen; d. h. solcher Tragwerke, die gewissermaßen aus einem Stücke bestehen. Tatsächlich sind ja auch diese Konstruktionen die einfachsten. Sie haben aber u. a. den Nachteil, daß sie bei größeren Abmessungen ungeschickt und schwer ausführbar werden. Dieser Nachteil wird vermieden bei den „*gegliederten*“ oder „*Fachwerkkonstruktionen*“. Letztere bestehen nicht aus einem vollwandigen Stücke, sondern sie sind aus einer Anzahl von Teilen („Stäben“) so zusammengesetzt, daß sich schließlich eine tragfähige Konstruktion ergibt. Zum Verständnis dieser Tragwerke wollen wir den Aufbau des in Fig. 1 gezeichneten einfachen Fachwerkes genauer untersuchen.

II. Aufbau eines einfachen Fachwerkes.

Aufgabe. *In einer Ebene liege zerstreut eine Anzahl von Punkten $0, 1, 2, \ldots, n$. Diese Punkte sollen so miteinander verbunden werden, daß sie eine starre, d. h. in sich unverschiebliche Figur bilden* (Fig. 1).

Wir beginnen mit zwei beliebigen Punkten *0* und *1*. Um den verbindenden Konstruktionsteil S_1 an die Punkte anschließen zu können, wollen wir sie uns durch zwei Bolzen dargestellt denken. Sie sind dann also nicht mehr „Punkte“ im mathematischen Sinne. Da aber der Umfang der Bolzen stets sehr gering ist im Verhältnis

zu dem Umfange der Gesamtkonstruktion, können wir die Berechnung so durchführen, als ob wir es mit mathematischen Punkten zu tun hätten. Die Verbindung zwischen *0* und *1* möge in der Weise geschehen, daß der stabförmige Körper S_1 als ein sogenannter „Augenstab“ ausgebildet ist, dessen beide Augen sich um die beiden Bolzen *0* und *1* legen. Hierdurch ist die gegenseitige Lage der beiden Punkte *0* und *1* festgelegt.

Nun gehen wir zu Punkt *2*. Um diesen festzuhalten, verbinden wir ihn durch den Augenstab S_2 mit *0* und durch S_3 mit *1*. Auf diese Weise ist ein Dreieck *0*, *1*, *2* hergestellt, dessen Eckpunkte in unveränderlicher Lage zueinander gehalten werden.

Um nun den Punkt *3* anzuschließen, müssen wir ihn mit zweien von den drei Eckpunkten des vorhin aufgebauten Dreieckes verbinden. Am übersichtlichsten wird die Figur, wenn wir

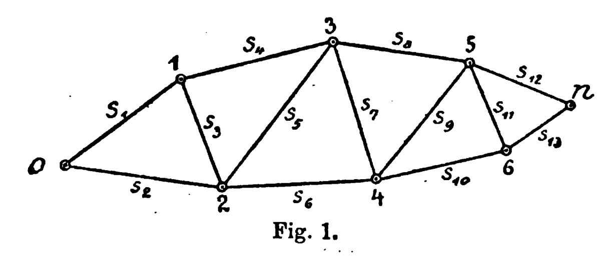


Fig. 1.

ihn an die beiden Punkte *1* und *2* anschließen, wozu zwei neue Stäbe, S_4 und S_5, erforderlich sind.

In derselben Weise ist jeder der übrigbleibenden Punkte, *4* ... *n*, an die bereits verbundenen Punkte angeschlossen, so daß schließlich eine Figur entsteht, die nur noch als Ganzes zu bewegen ist, deren einzelne Teile sich aber nicht mehr gegenseitig verschieben können. Diese aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Konstruktion kann also ebenso benutzt werden wie ein aus einem Stücke bestehender Balken. Lagern wir sie z. B. in zwei Punkten auf, so stellt sie einen biegungsfesten Körper dar, der ebenso wirkt, wie ein vollwandiger Träger. Wir nennen eine solche aus einzelnen Stücken (Gliedern) aufgebaute Konstruktion ein „Fachwerk“ oder ein „gegliedertes System“. Die Punkte *1* ... *n* heißen „*Knotenpunkte*“ und die zur Verbindung dieser Knotenpunkte dienenden Konstruktionsteile S_1, S_2 ... die „*Stäbe*“ des Fachwerkes. Insbesondere heißen die am Umfange des Fachwerkes liegenden Stäbe die „*Gurtstäbe*“ (Obergurt, Untergurt) und die dazwischen liegenden die „*Füllungsstäbe*“ („Vertikalen“, wenn sie senkrecht stehen; „Diagonalen“, wenn sie geneigt sind).

III. Das einfache Dreieckfachwerk.

Das in Fig. 1 gezeichnete Fachwerk ist besonders einfach aufgebaut. Die Stäbe sind derart angeordnet, daß sie lauter Dreiecke bilden. Und zwar liegen diese Dreiecke so, daß je zwei aufeinanderfolgende eine Seite gemeinsam haben. Man nennt eine solche Konstruktion ein **„einfaches Dreieckfachwerk"**.

Diese „einfachen Dreieckfachwerke" sind für die Praxis die weitaus wichtigsten Fachwerkkonstruktionen. Sie sind einfach zu berechnen, einfach im Aufbau und sparsam im Materialverbrauch. Deshalb wollen wir uns in diesem Vortrage ausschließlich mit den „einfachen Dreieckfachwerken" beschäftigen und die verschiedenen Methoden zur Berechnung dieser wichtigen Konstruktionen entwickeln (§ 3—9).

Die Untersuchung solcher Fachwerke, bei denen die Stäbe unregelmäßig durcheinander laufen (sich überkreuzen), wird im 2. Vortrage erfolgen.

§ 2.

Allgemeine Untersuchung der von den einzelnen Fachwerkstäben ausgeübten Kräfte.

I. Die Richtung der Stabkräfte.

Die Aufgabe der Stäbe eines Fachwerkes besteht darin, den Zusammenhang der einzelnen Knotenpunkte zu wahren. Betrachten wir nun den Knotenpunkt 0 der Fachwerkfigur Fig. 2a. An ihm greifen drei Kräfte an: 1) der Auflagerdruck A, 2) die Kraft, die der Stab S_1 auf den Knotenpunkt 0 ausübt, 3) die Kraft, die vom Stabe S_2 auf 0 ausgeübt wird. Die erste Kraft ist bekannt nach Größe und Richtung, denn die Auflagerkräfte des durch Fig. 2a dargestellten Körpers können wir mit Leichtigkeit berechnen. [Vgl. Band I, 3. Vortrag. Es ist $A = B = \frac{1}{2}(2000 + 2000 + 2000) = 3000$ kg.] Die Kräfte, die die Stäbe S_1 und S_2 auf den Knotenpunkt 0 ausüben, sind jedoch unbekannt, und zwar kennen wir von ihnen zunächst weder die Größen noch die Richtungen.

Mit der Ermittelung der Größe der einzelnen Stabkräfte werden wir uns in § 3—9 beschäftigen. Zunächst wollen wir die *Richtungen* untersuchen. Diese ergeben sich nämlich sehr einfach, wenn wir die Wirkungsweise einer solchen Konstruktion etwas genauer betrachten:

Sobald das Fachwerk belastet wird, wird es infolge der Elastizität der einzelnen Stäbe eine kleine Gestaltänderung durchmachen

es „setzt“ sich. Bei dieser Formänderung ändern die Knotenpunkte ihre gegenseitige Lage. Bei zwei Punkten, z. B. bei *0* und *1*, wird sich im allgemeinen erstens die Entfernung der beiden Punkte ändern, und zweitens wird die Verbindungslinie der beiden Punkte nach der Formänderung einen anderen Winkel mit der Horizontalen (oder einer anderen feststehenden Richtung) einschließen, als vor der Formänderung (Fig. 2b). Mit anderen Worten: Der die beiden Punkte verbindende Stab führt infolge der Durchbiegung des Trägers erstens eine Längenänderung (Verlängerung oder Verkürzung) und zweitens eine Drehung aus. Wenn wir nun annehmen, daß die Stäbe als Augenstäbe ausgebildet sind,

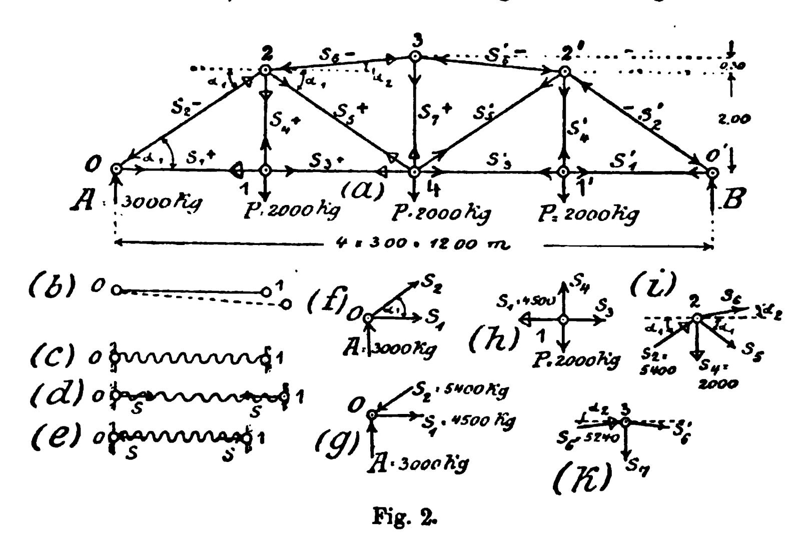


Fig. 2.

die sich um die als Bolzen gedachten Knotenpunkte legen, so können sie die Drehung ausführen, ohne daß hierdurch eine Beanspruchung entsteht. Denn ein an seinen beiden Enden gelenkig angeschlossener Stab kann sich um seine Anschlußpunkte frei drehen. Eine Beanspruchung des Stabes kommt nur dadurch zustande, daß er bei der Formänderung des Fachwerkes eine *Längenänderung* erleidet. Hierdurch wird der Stab auf Normalfestigkeit beansprucht. Er erleidet Zugspannungen, wenn seine Endpunkte sich voneinander entfernt haben, und Druckspannungen, wenn sich die Endpunkte genähert haben.

Wir sehen also, daß bei einem derartig zusammengesetzten Fachwerke die einzelnen Konstruktionsteile nur auf Zug oder Druck, nicht aber auf Biegung, beansprucht werden. Und zwar wirken diese Zug- bzw. Druckkräfte in den Richtungen, die die einzelnen

Stäbe nach der Formänderung innehaben. Nun ist aber die Lage eines Stabes nach der Durchbiegung des Trägers nur sehr wenig verschieden von der Lage, die der Stab vor der Formänderung (solange das Fachwerk unbelastet ist) hat. Wir können also ohne nennenswerten Fehler die Rechnung so durchführen, als ob die von den einzelnen Stäben ausgeübten Zug- bzw. Druckkräfte in den Richtungen wirken, die die Stäbe in der „Systemfigur" des Fachwerkes (Fig. 2a) einnehmen. Somit haben wir die Richtungen der Stabkräfte allein aus der Betrachtung der Konstruktion, ohne Zuhilfenahme der Rechnung, bestimmt.

In dem selten vorkommenden Falle, daß der Stab gekrümmt ist, wirkt die Stabkraft in der Linie der Bogensehne, d. h. der Verbindungslinie der beiden Endpunkte des Stabes. Denn ein an seinen Enden gelenkig gelagerter Stab kann immer nur eine Kraft ausüben, die in Richtung der Verbindungslinie der beiden Gelenke wirkt. Jede anders gerichtete Kraft würde eine Drehung des Stabes zur Folge haben.

II. Die verschiedene Wirkungsweise der Zug- und Druckstäbe auf die Knotenpunkte.

Nachdem wir somit die Lage einer jeden Stabkraft bestimmt haben, wollen wir auch noch deren Pfeilrichtung untersuchen. Wir wollen also die Pfeilrichtung einzeichnen, mit der ein Zug- bzw. Druckstab auf die an seinen Enden befindlichen Knotenpunkte (Bolzen) einwirkt. Denken wir uns eine elastische Feder (Fig. 2c), die um eine bestimmte Strecke auseinandergezogen sein möge (Fig. 2d). Die Feder ist jetzt also auf Zug beansprucht und hat das Bestreben, sich auf ihre ursprüngliche Länge zusammenzuziehen. Die Kraft S, die die Feder auf jeden ihrer Befestigungspunkte *0* und *1* ausübt, ist demnach *von* den Endpunkten *nach* dem Mittelpunkte der Feder gerichtet. Wir wollen dieses so ausdrücken: Eine auf Zug beanspruchte Feder wirkt auf ihre Befestigungspunkte *„ziehend"* (*von* den Befestigungspunkten *nach* dem Mittelpunkte) ein.

Haben wir nun umgekehrt eine Feder, die um eine Strecke zusammengedrückt wurde (Fig. 2e), so hat sie das Bestreben, sich auf ihre ursprüngliche Länge auszudehnen. Das heißt: Eine auf Druck beanspruchte Feder wirkt auf ihre Befestigungspunkte *„drückend"* (*vom* Mittelpunkte der Feder *nach* den Befestigungspunkten) ein.

Nun verhalten sich aber die Stäbe eines Fachwerkes genau

so wie die soeben untersuchte Feder. Ein Teil von ihnen wird infolge der Belastung auseinandergezogen (verlängert), die anderen werden zusammengedrückt (verkürzt). Durch diese Längenänderungen werden die in den Stäben wirkenden Spannkräfte hervorgerufen. Ergibt sich nun im Laufe der weiteren Rechnung, daß ein Stab, z. B. S_4' in Fig. 2a, auf Zug beansprucht ist, so wissen wir jetzt, daß er auf seine Befestigungspunkte, d. h. auf die an seinen Enden befindlichen Knotenpunkte „*ziehend*" einwirkt. Die Kräfte, die dieser Stab auf die Punkte *1'* und *2'* ausübt, müssen also so eingezeichnet werden, wie es in Fig. 2a geschehen ist. Haben wir aber einen Stab, der auf Druck beansprucht ist, z. B. S_2', so wirkt dieser Stab „*drückend*" auf seine Befestigungspunkte ein. Die Pfeile müssen dann also vom Stabmittelpunkte nach den Knotenpunkten gerichtet sein. Umgekehrt haben wir: Zeigt sich bei der Untersuchung eines Knotenpunktes, daß ein an ihm angreifender Stab auf den Knotenpunkt „ziehend" einwirkt, so ist dieser Stab ein Zugstab; und ergibt sich, daß ein Stab auf einen Knotenpunkt „drückend" einwirkt, so haben wir es mit einem Druckstab zu tun. Durch diese Überlegungen können wir also feststellen, wie die verschiedenen Stäbe auf die Knotenpunkte einwirken; und umgekehrt, können wir aus der Einwirkung eines Stabes auf die Knotenpunkte schließen, ob er ein Zug- oder ein Druckstab ist.

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß zu jedem Stab zwei Pfeilrichtungen gehören. Ist ein Stab z. B. auf Zug beansprucht, so hat er das Bestreben, sich wieder zusammenzuziehen, d. h. sowohl den einen Endpunkt als auch den anderen nach der Stabmitte hin zu bewegen (Fig. 2d). Daher kommt es, daß die beiden Pfeile dieses Stabes verschiedene Richtungen haben. Und zwar laufen sie beide aufeinander zu (Fig. 2d, ferner Stab S_4' in Fig. 2a). Beim gedrückten Stabe dagegen laufen die beiden Pfeilrichtungen voneinander fort (Fig. 2e, Stab S_2').

Man lasse sich also nicht dadurch täuschen, daß bei einem Druckstab, z. B. S_6' in Fig. 2a, die beiden Pfeile so gerichtet sind, als ob sie den Stab auseinanderziehen wollen; und umgekehrt bei einem Zugstab. Denn die beiden Pfeile von S_6' sollen ja nicht die Kraft angeben, die auf den Stab einwirkt, sondern umgekehrt die Kraft, die vom Stabe ausgeht, d. h. mit der er auf seine Endpunkte wirkt. Ein Druckstab bringt sich augenscheinlich in derselben Weise zur Geltung wie irgendein anderes Wesen, das durch die angrenzenden „Konstruktionsteile" zusammengedrückt wird und das sich nun nach beiden Seiten hin Luft machen will. Viel-

leicht ist dieses letztere Bild ganz anschaulich gewählt, um diese für den Anfänger immer etwas schwierige Entscheidung zwischen Zug- und Druckstab zu erleichtern.

Zusammenfassung.

I. Die von den einzelnen Stäben eines Fachwerkes auf die Knotenpunkte ausgeübten Kräfte wirken stets in der Verbindungslinie der beiden Endpunkte des Stabes. Bei geraden Stäben demnach innerhalb der Stabachse. Die gesamte Fachwerkkonstruktion kann natürlich in beliebiger Weise, z. B. auf Biegung, belastet werden; ihre einzelnen Bestandteile (Stäbe) erfahren aber immer nur Zug- bzw. Druckspannungen. [Darin liegt eben die Ökonomie der Fachwerkbauten.] Voraussetzung ist hierbei, daß die Lasten des Fachwerkes nur in dessen Knotenpunkten, nicht dazwischen, angreifen.

II. Hinsichtlich der Beanspruchung eines Stabes (ob Zug oder Druck) ergibt sich folgender Unterschied: Ein Zugstab wirkt auf die beiden an seinen Endpunkten befindlichen Knotenpunkte ziehend ein; seine Pfeilrichtungen zeigen also von den Knotenpunkten nach der Stabmitte. Ein Druckstab dagegen wirkt schiebend auf seine beiden Knotenpunkte ein; die entsprechenden Pfeile zeigen also vom Stab aus gegen die Endpunkte.

Nach dieser allgemeinen Orientierung wollen wir in den folgenden § 3—9 verschiedene Methoden zur Bestimmung der Größe der Stabkräfte durchnehmen.

§ 3.

I. Methode: Rechnerisch, durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf die einzelnen Knotenpunkte.

I. Wiederholung der mechanischen Grundlagen.

In § 5 des ersten Bandes haben wir uns mit dem wichtigen Falle beschäftigt, daß auf einen Punkt eine Gruppe von Kräften angreift, die sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Das Resultat dieser Untersuchung war folgender Satz: Greifen an einem Punkte mehrere Kräfte an, und bleibt der Punkt trotz der Einwirkung dieser Kräfte im Ruhezustand, so ist dieses ein Zeichen, daß die Kräfte in ganz bestimmten mathematischen Beziehungen zueinander stehen. Es bestehen dann nämlich zwischen den Kräften die Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad P_1 \cdot \cos\alpha_1 \pm P_2 \cdot \cos\alpha_2 \pm \ldots = 0 \qquad (R_x = 0),$$

$$\text{(II)} \qquad P_1 \cdot \sin\alpha_1 \pm P_2 \cdot \sin\alpha_2 \pm \ldots = 0 \qquad (R_y = 0).$$

Hierin sind P_1, P_2 usw. die betreffenden Kräfte und α_1, α_2 usw. ihre Neigungswinkel gegen eine (beliebig anzunehmende) feste Richtung. Also nur wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, halten die Kräfte den Punkt im Ruhestand; und umgekehrt, ist der Punkt im Ruhezustand, so können wir die beiden Gleichungen zwischen den Kräften anschreiben.

Im folgenden werden wir nun die einzelnen Knotenpunkte eines Fachwerkes betrachten. Da haben wir nämlich solch einen Fall, daß auf einen Punkt mehrere Kräfte wirken, während der Punkt im Ruhestand bleibt. Wir können also für die angreifenden Kräfte die entsprechenden Gleichungen (I) und (II) anschreiben und werden hierdurch auf die einfachste Weise zur Berechnung der Stabkräfte des betreffenden Fachwerkes gelangen.

II. Anschreibung der Gleichgewichtsbedingungen.

1. Knotenpunkt *0*.

Auf den Punkt *0* des Fachwerkes Fig. 2a wirken die drei Kräfte A, S_1 und S_2. Die Kraft A ist bekannt nach Größe und Richtung. Von S_1 und S_2 sind nach § 2 die Wirkungslinien bekannt, nämlich zusammenfallend mit den Systemlinien $\overline{01}$ und $\overline{02}$. Als unbekannt am Punkte *0* bleiben also noch übrig die Größen der beiden Kräfte S_1 und S_2 und die Art ihrer Einwirkung auf den Punkt (ob als Zug- oder Druckkraft).

Zunächst zeichnen wir die am Punkte *0* wirkenden Kräfte in ihren Wirkungslinien ein. Da wir noch nicht wissen, ob S_1 und S_2 Zug- oder Druckkräfte sein werden, nehmen wir vorläufig ganz willkürlich an, sie seien beide auf Zug beansprucht. Dementsprechend stellen wir sie auf den Punkt *0* „ziehend" wirkend dar (Fig. 2f). Ob diese Annahme richtig war, wird sich später erweisen. Zunächst muß man aber etwas annehmen, um überhaupt mit der Rechnung beginnen zu können.

Nun folgt die Berechnung von S_1 und S_2 durch folgenden grundlegenden Gedankengang: „Wir sehen, daß der Punkt *0* unter der Einwirkung der an ihm angreifenden Kräfte im Ruhezustand bleibt. Wenn aber ein Punkt unter solchen Umständen im Ruhezustand bleibt, können wir hinsichtlich der angreifenden Kräfte gewisse Gleichungen anschreiben. Wir wollen dies also auch im vorliegenden Falle tun und erhalten hierdurch zwei mathematische Beziehungen, aus denen wir nach der Lehre von den Gleichungen

die Unbekannten ausrechnen können.“ Die beiden Gleichgewichtsbedingungen lauten in diesem Falle:

$$\text{(I)} \qquad S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_1 = 0\,,$$

$$\text{(II)} \qquad A + S_2 \cdot \sin\alpha_1 = 0\,.$$

[In Gleichung (I) gibt die Kraft A, da sie vertikal verläuft, keine Horizontalprojektion ab; S_1 dagegen hat eine Horizontalprojektion gleich der Kraft selbst. In Gleichung (II) liefert S_1 die Vertikalprojektion Null; A dagegen erscheint in natürlicher Größe. Vgl. Band I, S. 16.] Diese Gleichungen schreiben wir zunächst so, daß rechts nur bekannte und links die unbekannten Glieder stehen:

$$\text{(Ia)} \qquad S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_1 = 0\,,$$

$$\text{(IIa)} \qquad S_2 \cdot \sin\alpha_1 = -A\,.$$

Nun setzen wir für A, $\cos\alpha_1$ und $\sin\alpha_1$ die Zahlenwerte ein (Fig. 2a), nämlich

$$A = 3000\text{ kg};\quad \cos\alpha_1 = \frac{3{,}00}{\sqrt{3{,}00^2 + 2{,}00^2}} = 0{,}832;\quad \sin\alpha_1 = \frac{2{,}00}{\sqrt{3{,}00^2 + 2{,}00^2}} = 0{,}555\,,$$

und erhalten die Resultate:

$$\text{(IIb)} \qquad S_2 = -\frac{3000}{0{,}555} = -5400\text{ kg},$$

$$\text{(Ib)} \qquad S_1 = -(-5400)\,0{,}832 = +4500\text{ kg}.$$

Hiermit sind die Größen von S_1 und S_2 ermittelt.

Besondere Beachtung erfordern aber noch die herausgekommenen Vorzeichen. Für die Kraft S_1 ergibt sich ein positives Vorzeichen. Dieses bedeutet, daß die Kraft tatsächlich so wirkt, wie sie von vornherein in die Rechnung eingeführt worden ist, nämlich mit dem Pfeil nach rechts am Punkte 0, als Zugkraft. Die Kraft S_2 dagegen erscheint mit negativem Vorzeichen. Dieses bedeutet, daß die ursprüngliche Annahme, unter der S_2 in die Rechnung eingeführt wurde, nicht zutrifft. D. h. der Pfeil von S_2 zeigt am Punkt 0 nicht von dem Punkte fort, sondern gegen den Punkt zu; oder mit anderen Worten: S_2 ist nicht eine Zugkraft, sondern eine Druckkraft. [Man beachte, daß beim Auflösen von Gleichungen ein bei einem Resultate auftretendes *negatives* Vorzeichen anzeigt, daß die ursprüngliche Annahme gerade *umgekehrt* richtig ist. Beispielsweise würde ein angenommenes Vermögen von x Mark, falls schließlich $x = -10000$ herauskommt, eine Schuldsumme von 10000 Mark bedeuten.]

Nun zeichnen wir die richtigen Pfeile in Fig. 2a unmittelbar beim Punkte 0 ein und kennzeichnen den Zugstab S_1 durch ein

beigeschriebenes Pluszeichen und den Druckstab S_2 durch ein beigeschriebenes Minuszeichen. Hiermit sind aus der Tatsache des Ruhezustandes des Punktes *0* die Kräfte S_1 und S_2 nach Größe und Art ihrer Beanspruchung (ob Zug oder Druck) bestimmt.

2. Knotenpunkt *1*.

Da zur Berechnung der Stabkräfte an jedem Punkte nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, suchen wir uns einen folgenden Knotenpunkt auf, an dem nur zwei unbekannte Stabkräfte vorkommen. Dieses ist Punkt *1* (Fig. 2a). Hier sind bekannt: 1) die Last $P = 2000$ kg; 2) die Kraft, die der Stab S_1 auf den Punkt ausübt. Denn die Spannkraft dieses Stabes ist bereits zu 4500 kg ermittelt. Außerdem haben wir gefunden, daß S_1 ein Zugstab ist; er wirkt also auf die an seinen Enden befindlichen Knotenpunkte ziehend ein. Punkt *1* wird also durch den Stab S_1 nach links gezogen, wie in Fig. 2h dargestellt ist. Der Pfeil bei S_1 ist hier als *„geschlossener“* Pfeil gezeichnet, um anzudeuten, daß diese Pfeilrichtung nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen des Punktes *1*, sondern bereits aus der Eigenschaft des betreffenden Stabes, ob Zug- oder Druckstab, gefunden ist. Als unbekannte, auf Punkt *1* einwirkende Kräfte bleiben S_3 und S_4.

Diese unbekannten Kräfte können entweder Zug- oder Druckkräfte sein. Wir wollen sie zunächst als Zugkräfte annehmen und zeichnen demgemäß die Pfeile ein (Fig. 2h). Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(I)} \qquad S_3 - S_1 = 0\,,$$
$$\text{(II)} \qquad S_4 - P = 0\,.$$

Diese Gleichungen schreiben wir wieder so, daß die unbekannten Glieder links allein stehen:

$$\text{(Ia)} \qquad S_3 = +S_1\,,$$
$$\text{(IIa)} \qquad S_4 = +P\,.$$

Nun setzen wir für S_1 und P die betreffenden Zahlen ein,

$$S_1 = 4500\,, \quad P = 2000\,,$$

und erhalten die Resultate:

$$S_3 = +4500 \text{ kg}\,, \quad S_4 = +2000 \text{ kg}.$$

Da beide Werte mit positivem Vorzeichen erscheinen, ist unsere ursprüngliche Annahme richtig, d. h. die Pfeile von S_3 und S_4 bleiben so, wie sie von vornherein eingeführt sind; S_3 und S_4 sind tatsächlich Zugkräfte. Dementsprechend werden in Fig. 2a am Punkte *1* die Pfeile eingezeichnet und zu den Stäben S_3 und S_4 die Vorzeichen hinzugeschrieben.

3. Knotenpunkt 2.

Der nächste Knotenpunkt, an dem nur zwei unbekannte Stabkräfte auftreten, ist der Punkt *2*. Die Stabkraft S_2 war gleich 5400 kg. Da der Stab S_2 sich als Druckstab ergeben hatte, wirkt die Kraft „drückend" auf Punkt *2* ein (Fig. 2i). Der Stab S_4 wirkt mit 2000 kg „ziehend" auf Punkt *2* ein. Die unbekannten Kräfte S_5 und S_6 nehmen wir zunächst als Zugkräfte an. Somit lauten die Gleichungen (Fig. 2i):

$$\text{(I)} \qquad S_5 \cdot \cos\alpha_1 + S_6 \cdot \cos\alpha_2 + S_2 \cdot \cos\alpha_1 = 0\,,$$

$$\text{(II)} \qquad S_5 \cdot \sin\alpha_1 - S_6 \cdot \sin\alpha_2 + S_4 - S_2 \cdot \sin\alpha_1 = 0\,,$$

$$\text{(Ia)} \qquad S_5 \cos\alpha_1 + S_6 \cos\alpha_2 = -S_2 \cos\alpha_1\,,$$

$$\text{(IIa)} \qquad S_5 \sin\alpha_1 - S_6 \sin\alpha_2 = +S_2 \sin\alpha_1 - S_4\,.$$

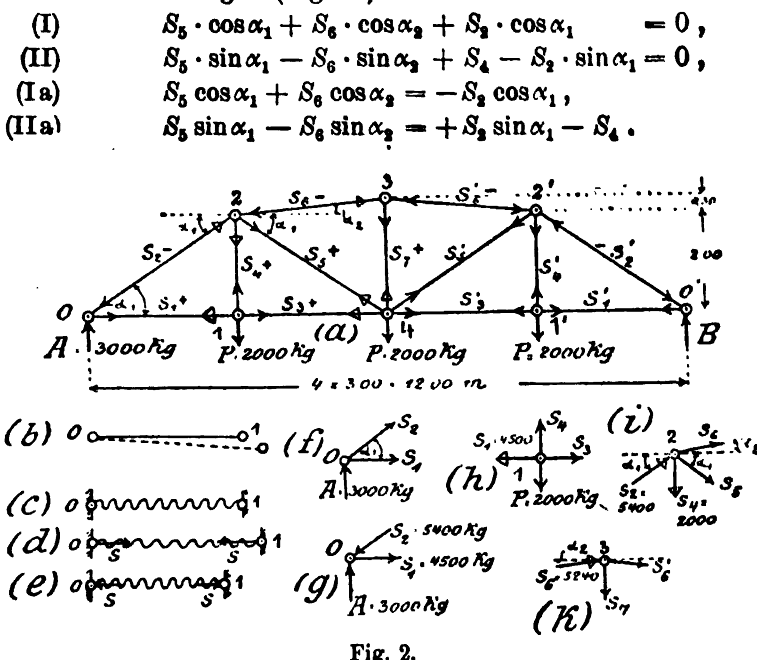


Fig. 2.

Nun setzen wir für S_2 und S_4, und ferner für $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$ usw. die Zahlenwerte ($\cos\alpha_2 = 0{,}995$, $\sin\alpha_2 = 0{,}100$) ein und erhalten die beiden Gleichungen:

$$\text{(Ib)} \qquad 0{,}832\, S_5 + 0{,}995\, S_6 = -4500\,,$$

$$\text{(IIb)} \qquad 0{,}555\, S_5 - 0{,}100\, S_6 = +1000\,.$$

[Man beachte, daß hierin für die bekannten Stabkräfte S_2 und S_4 nur die Zahlenwerte, ohne Vorzeichen, einzusetzen sind. Der Einfluß der Vorzeichen ist dadurch berücksichtigt, daß die bekannten Kräfte bereits mit ihrem richtigen Pfeile eingezeichnet sind. Ebenso werden natürlich die äußeren Kräfte, Auflagerdrücke und Lasten, nur mit ihrem Zahlenwerte eingesetzt.] Die Auflösung dieser Gleichungen liefert für die Unbekannten die Werte:

$$S_5 = +860 \text{ kg}; \quad S_6 = -5240 \text{ kg}.$$

Der Pfeil von S_5 war also bereits in Fig. 2i richtig angenommen Der Stab S_6 dagegen war falsch angenommen. Der Pfeil muß umgekehrt eingezeichnet werden; es ist nicht ein Zug-, sondern ein Druckstab. Die richtigen Pfeile von S_5 und S_6 werden nun in Fig. 2a bei Punkt *2* eingetragen und die Vorzeichen der Stäbe hinzugeschrieben.

4. Knotenpunkt *3*.

Bekannt ist die Stabkraft S_6. Unbekannt sind S_6' und S_7. Letztere Kräfte werden zunächst wieder als Zugkräfte angenommen und die Gleichgewichtsbedingungen angeschrieben:

$$\text{(I)} \qquad S_6' \cos\alpha_2 + S_6 \cos\alpha_2 = 0 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad S_7 + S_6' \sin\alpha_2 - S_6 \sin\alpha_2 = 0 \,.$$

Die Trennung der Bekannten und Unbekannten liefert die Form:

$$\text{(Ia)} \qquad S_6' \cos\alpha_2 = -S_6 \cos\alpha_2 \,, \quad \text{bzw. } S_6' = -S_6 \,,$$

$$\text{(IIa)} \qquad S_7 + S_6' \sin\alpha_2 = +S_6 \sin\alpha_2 \,.$$

Werden jetzt für die rechten Seiten der Gleichungen ihre Zahlenwerte (ohne Vorzeichen) eingesetzt, so entstehen die Gleichungen

$$\text{(Ib)} \qquad S_6' = -5240 \text{ kg} \,,$$

$$\text{(IIb)} \qquad S_7 + 0{,}100\, S_6' = +5240 \cdot 0{,}100 \,,$$

und aus diesen ergeben sich die Resultate:

$$S_6' = -5240 \text{ kg}; \quad S_7 = +1050 \text{ kg}.$$

Die richtigen Pfeile und Vorzeichen der Stäbe S_6' und S_7 sind hiernach in Fig. 2a eingetragen.

Da der Träger symmetrisch gebaut und belastet ist, sind die Stabkräfte der rechten Seite entsprechend gleich in der linken Seite. Somit ist die Berechnung des ganzen Fachwerkes erledigt.

Zusammenfassung.

Die soeben entwickelte Methode beruht auf der Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte. Der sehr einfache, aber auch sehr wichtige Gedankengang ist folgender: „Wir sehen, daß der betreffende Knotenpunkt im Ruhezustande ist. Folglich können wir für die an ihm angreifenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen ansetzen:

$$\text{(I)} \quad R_x = 0 \,, \qquad \text{(II)} \quad R_y = 0 \,.$$

Hierdurch haben wir zwei mathematische Gleichungen erhalten, durch deren Auflösung sich die Unbekannten ergeben."

Bekanntlich können nach den Lehren der Mathematik aus zwei Gleichungen immer nur zwei Unbekannte ermittelt werden. Deshalb haben wir bei Berechnung von Fig. 2a die Knotenpunkte in derartiger Reihenfolge genommen, daß bei jedem neuen Punkte außer den bereits bekannten Kräften (Lasten P, Auflagerkräfte, bereits vorher bestimmte Stabkräfte) immer nur zwei neue unbekannte Stabkräfte vorhanden sind. Letztere werden dann durch Auflösung der Gleichungen bestimmt.

Hinsichtlich des **Rechenschemas** empfiehlt sich folgendes: Die bereits bekannten Kräfte werden an dem betreffenden Punkte mit der Pfeilrichtung eingetragen, in der sie tatsächlich wirken. Die unbekannten Stabkräfte dagegen haben wir zunächst immer als Zugkräfte eingezeichnet. Dann werden die Gleichgewichtsbedingungen so geschrieben, daß links die unbekannten und rechts die bekannten Kräfte stehen, für letztere ihre Zahlenwerte (ohne weitere Vorzeichen) eingesetzt und die Gleichungen aufgelöst. Je nachdem hierbei für die gesuchten Stabkräfte ein positives oder ein negatives Vorzeichen herauskommt, ist sie tatsächlich — wie von vornherein angenommen war — eine Zugkraft oder aber eine Druckkraft. Die richtigen Pfeile der gefundenen Stabkräfte werden dann in die Systemfigur eingetragen und das Vorzeichen des Stabes hinzugeschrieben.

Man beachte hierbei, daß zu jedem Stabe zwei Pfeile gehören, um seine Wirkung auf die anschließenden Knotenpunkte zu kennzeichnen. Diese Pfeile laufen aufeinander zu bei *Zugstäben*, voneinander fort bei *Druckstäben*.

Man kann die unbekannten Stäbe natürlich auch als Druckstäbe in die Rechnung einführen. Namentlich wird man dies tun, wenn einem schon das statische Gefühl sagt, daß der betreffende Stab wahrscheinlich ein Druckstab sein wird. Immer ist aber daran zu denken, daß ein schließliches positives Resultat bedeutet: die ursprüngliche Annahme war richtig; ein negatives Vorzeichen sagt: die Annahme war falsch.

§ 4.
Beispiele zu § 3.

Die im vorigen Paragraphen erläuterte Methode zur Bestimmung der Stabkräfte ist die elementarste, da sie nichts weiter als die fortwährende Anwendung der Anfangsgründe der Mechanik, nämlich der Gleichgewichtsbedingungen des Punktes, ist. Sie hat

aber den Nachteil, daß sie etwas viel Zahlenrechnung erfordert. Aus diesem Grunde wird sie als selbständige Methode selten verwendet. Doch werden wir sehen, daß sie in Verbindung mit anderen Verfahren sehr gute Dienste leistet. Außerdem lassen sich aus dieser Berechnungsmethode Folgerungen von grundlegender Bedeutung für die Fachwerktheorie ziehen.

Erste Aufgabe.

Bei dem in Fig. 3 gezeichneten Fachwerkträger mit den Lasten $P_1 .. P_4$ sind die in den Stäben S_1, S_2, S_3 und S_4 auftretenden Spannkräfte zu ermitteln!

1) Stab S_1. Aus dem Gleichgewicht des Knotenpunktes *1* (Fig. 3b) ergibt sich durch Anwendung der Bedingung (II) ($R_y = 0$):

$$\text{(II)} \qquad S_1 - P_1 = 0\,; \qquad \text{hieraus:}$$

$$\text{(IIa)} \qquad S_1 = +P_1\,.$$

Die Stabkraft S_1 ist also ebenso groß wie die Last P, und zwar ist sie eine Zugkraft. Ein Resultat, das das statische Gefühl ohne weiteres aus Fig. 3b ableitet.

2) Stab S_2. Aus dem Gleichgewicht von Punkt *2* folgt (Fig. 3c), wenn S_2 zunächst als Zugkraft angenommen wird:

$$\text{(II)} \qquad S_2 + P_2 = 0\,; \qquad \text{also:}$$

$$\text{(IIa)} \qquad S_2 = -P_2\,.$$

Der Stab S_2 wird also auf Druck beansprucht und zwar mit einer Kraft gleich der Last P. Auch dieses Resultat folgt ohne besondere Rechnung aus dem Gleichgewichtsgefühl.

3) Stab S_3. Durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingung $R_y = 0$ folgt aus dem Gleichgewicht des Punktes *3*:

$$\text{(II)} \qquad S_3 = 0\,.$$

Der Stab S_3 in Fig. 3a ist also spannungslos. Ein Resultat, das stutzig machen kann. Doch ist es sicher richtig. Natürlich müssen die Stäbe S_{13} und S_{14} wirkliche Fachwerkstäbe sein, d. h. Punkt *3* muß ein wirkliches Gelenk sein.

4) Stab S_4. Ebenso ist bei der in Fig. 3a angenommenen Lastanordnung der Stab S_4 ohne Spannung. (Folgt aus dem Gleichgewicht des Punktes *4*!)

Zweite Aufgabe.

Beweise den Satz I (Fig. 3e): *Wirken an einem Knotenpunkte vier Kräfte, die paarweis in zwei Geraden liegen, so sind je zwei*

in einer Geraden liegende Kräfte gleich groß und von entgegengesetzter Richtung.

In Fig. 3e sind also die beiden Kräfte S und S und S' und S' je einander gleich. [Denn es ist z. B. $+S'\cos\alpha - S'\cos\alpha = 0$, daher $S' = S'$. Entsprechend ergibt sich, wenn man die Linie S'—S' als x-Achse nimmt, sofort die Gleichheit der beiden Kräfte S.]

Ist eine Kraft, z. B. ein S', gleich Null, so folgt, daß auch die andere Kraft S' gleich Null sein muß. Also der Satz II:

Wirken an einem Knotenpunkte drei Kräfte, von denen zwei in einer Geraden liegen, so erfordert das Gleichgewicht des Punktes, daß die dritte Kraft gleich Null ist.

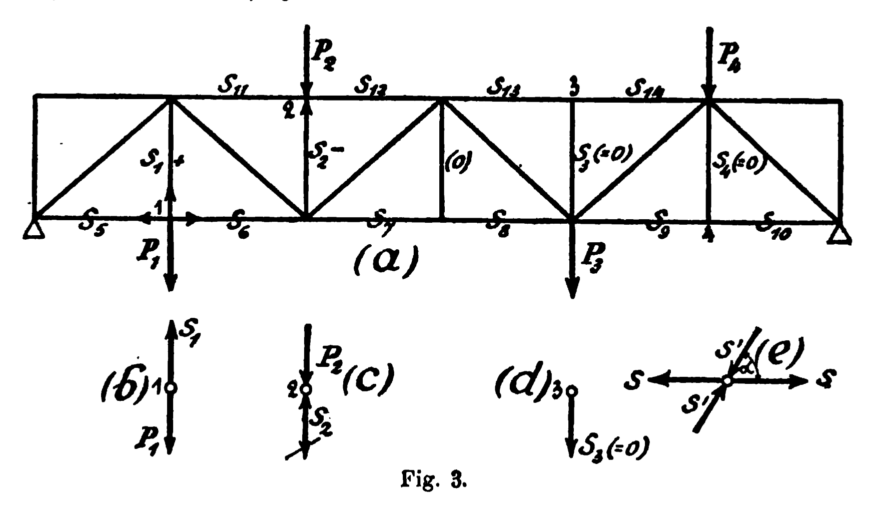


Fig. 3.

Aus diesen beiden Sätzen kann man in Fig. 3 sofort die Spannkräfte

$$S_1 = +P_1, \quad S_2 = -P_2, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = 0$$

hinschreiben. Auch die Vorzeichen lassen sich sofort angeben, wenn man bedenkt, daß äußere Last und Stabkraft sich gegenseitig aufheben müssen. Man erkennt dann folgendes: Läuft die Last auf den Knotenpunkt zu, so muß es auch die Stabkraft tun (*Druck*); läuft die Last fort, so muß auch die Stabkraft fortgerichtet sein. Das Kräftespiel ist ja in solchen einfachen Fällen vollständig klar.

Dritte Aufgabe.

Beweise, daß in Fig. 3a die Spannkräfte S_5 und S_6 einander gleich, und zwar entweder beide Zug oder beide Druck, sind; entsprechend $S_7 = S_8$, $S_9 = S_{10}$, $S_{11} = S_{12}$, $S_{13} = S_{14}$!

[Folgt sofort aus Satz I der vorigen Aufgabe.]

Vierte Aufgabe.

Bei dem in Fig. 4 gezeichneten Fachwerk seien die Spann kräfte S_1 und S_2 bereits ermittelt. Die Spannkraft S_3 ist zu finden!

In Zahlen: Spannkräfte $S_1 = S_2 = -10000$ kg

Neigungswinkel $\alpha_1 = \alpha_2 = 2°$.

Wird S_3 zunächst als Zug angenommen (Fig. 4b), so liefert die Betrachtung von Knotenpunkt *1* die Gleichung ($R_y = 0$):

(II) $$S_3 + P - S_1 \sin\alpha_1 - S_2 \sin\alpha_2 = 0 ,$$

(IIa) $$S_3 = +S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2 - P .$$

Hieraus, da $S_1 = S_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ angegeben war,

$$S_3 = +2\, S_1 \sin\alpha_1 - P .$$

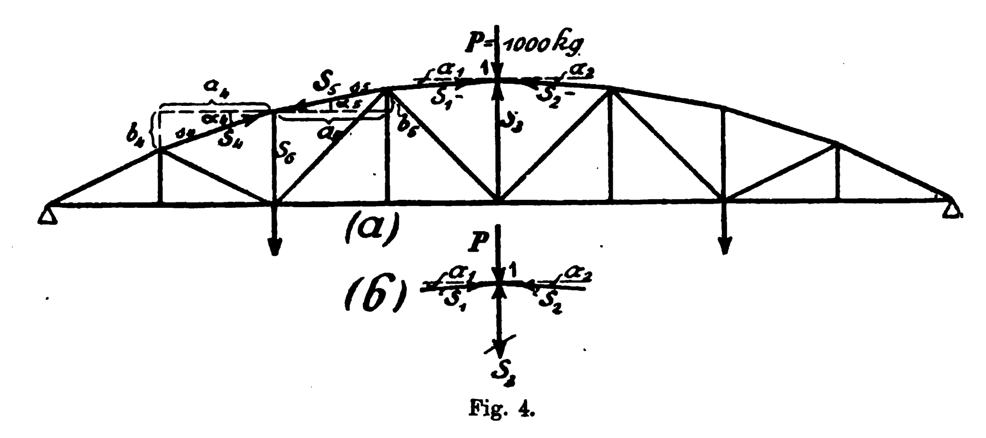


Fig. 4.

Setzt man nun die Zahlenwerte ein ($\sin\alpha_1 = 0{,}035$), so ergibt sich:

(IIb) $$S_3 = +2 \cdot 10000 \cdot 0{,}035 - 1000.$$

[Die bekannten Kräfte S_1 und P werden nur in ihrem Zahlenwerte, ohne nochmaliges Vorzeichen, eingesetzt; s. § 3.]

$$S_3 = +700 - 1000 = -300 \text{ kg}.$$

Somit ist aus dem Gleichgewicht des Knotens *1* bewiesen, daß der Stab S_3 einen *Druck* von 300 kg aufzunehmen hat.

Fünfte Aufgabe.

Dieselbe Aufgabe wie vorhin, nur daß $\alpha_1 = \alpha_2 = 4°$ ($\sin 4° = 0{,}070$). Es ergibt sich

$$S_3 = +400 \text{ kg}.$$

Aus dem Vergleich dieser mit der vorigen Aufgabe erkennt man, daß es von der Neigung der Stäbe S_1 und S_2 abhängt, ob der Stab S_3 Druck oder Zug bekommt. [Der Stab S_3 hat die Differenz zwischen

der Last P und der Summe der Vertikalprojektionen der Stäbe S_1 und S_2 aufzunehmen.]

Sechste Aufgabe.

In Fig. 4 sei

$$S_4 = -12000\ kg, \quad S_5 = -11940\ kg; \quad \alpha_4 = 10°, \quad \alpha_5 = 8°.$$

Welche Spannkraft hat der Stab S_6?

Lösung: $S_6 = +430$ kg.

Gelegentlich dieser Aufgabe sei auf folgendes aufmerksam gemacht: Mit den Werten sin, cos usw. rechnet es sich bekanntlich nicht sehr bequem. Will man sie vermeiden, so schreibe man in die Systemskizze die Horizontal- und die Vertikalprojektion der einzelnen Stäbe ein. So hat man in Fig. 4a

$$\cos\alpha_4 = \frac{a_4}{s_4} = \frac{\text{Horizontalprojektion}}{\text{Stablänge}},$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{b_4}{s_4} = \frac{\text{Vertikalprojektion}}{\text{Stablänge}}$$

usw.

Die Gleichung zur Berechnung von Stab S_6 würde in dieser Schreibweise lauten:

$$S_4 \cdot \frac{b_4}{s_4} - S_5 \cdot \frac{b_5}{s_5} - S_6 = 0,$$

$$S_6 = S_4 \frac{b_4}{s_4} - S_5 \frac{b_5}{s_5}.$$

Hat man eine maßstäblich gezeichnete Figur, so können die Längen b_4, s_4, b_5 und s_5 abgegriffen werden, wodurch die Rechenarbeit erheblich vereinfacht wird.

Siebente Aufgabe.

In Fig. 4 hatte sich bei einer anderen, aber ebenfalls vertikalen Belastung ergeben: $S_4 = -16000$ kg, $S_5 = -17000$ kg. Ist dieses Resultat möglich?

Lösung: Nein, es muß ein Rechenfehler vorhanden sein. Denn beim Ansetzen der Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$ (man tue dieses!) ergibt sich, daß die Bedingung durch diese Spannkräfte nicht erfüllt wird. (Wichtige Kontrolle!)

§ 5.

II. Methode: Zeichnerisch, durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf die einzelnen Knotenpunkte. (Cremonasche Kräftepläne.)

I. Wiederholung der mechanischen Grundlagen.

Das folgende graphische Verfahren geht ebenfalls von der Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte aus. Nur werden jetzt die Gleichgewichtsbedingungen nicht in ihrer rechnerischen, sondern in der zeichnerischen Form verwendet. Die graphische Form der Gleichgewichtsbedingungen lautet bekanntlich folgendermaßen: „Halten sich an einem Punkte mehrere Kräfte das Gleichgewicht, so haben sie die Eigenschaft, daß sie ein geschlossenes Kräftepolygon ergeben. Das heißt: Beim Aneinanderreihen der Kräfte fällt der Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft zurück in den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft.“ (Wiederhole Band I, § 5.)

Diese Gleichgewichtsbedingungen können wir nun zur Lösung der folgenden grundlegenden Aufgabe benutzen: Auf einen Punkt, der sich im Ruhezustande präsentiert, wirkt eine Gruppe von Kräften innerhalb bestimmter Wirkungslinien ein. Diese Kräfte seien bekannt bis auf zwei. Wie können auch diese zwei unbekannten Kräfte aus der Tatsache des Gleichgewichtes zeichnerisch ermittelt werden?

In Fig. 5a ist diese Aufgabe dargestellt. Die Kräftegruppe ist P_1, P_2, S_1 und S_2. Die ersten seien bekannt nach Größe und Richtung. Von den letzten beiden kenne man nur die Wirkungslinien, während ihre Größen unbekannt sind. Dafür sei uns aber die Tatsache bekannt, daß der Angriffspunkt dieser Kräftegruppe im Ruhezustand verharrt. Wie lassen sich nun die Größen von S_1 und S_2 zeichnerisch bestimmen?

Wir reihen zunächst die beiden vollständig bekannten Kräfte P_1 und P_2 nach Größe und Richtung aneinander (Fig. 5b, Linienzug a—b—c). Dann ziehen wir durch den Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft (Punkt c) und durch den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft (Punkt a) Parallele zu den Wirkungslinien der Kräfte S_1 und S_2. Diese beiden Parallelen schneiden sich in einem Punkte d. Zeichnen wir dann schließlich in dem Kräftepolygon a—b—c—d die Pfeile so ein, daß man, von a beginnend und den Pfeilen nachgehend, wieder zu a zurückkommt,

so stellt die Strecke $\overline{cd}$ die Kraft S_1 und die Strecke $\overline{da}$ die Kraft S_2 dar.

Beweis: Die so gefundenen Kräfte S_1 und S_2 liegen erstens in den vorgeschriebenen Wirkungslinien; zweitens ist ihre Größe derart, daß sie zusammen mit P_1 und P_2 ein geschlossenes Kräftepolygon ergeben. Sie erfüllen also die Bedingung der Aufgabe, im Verein mit den gegebenen Kräften P_1 und P_2 eine derartige Kräftegruppe zu bilden, die ihren Angriffspunkt im Ruhezustand hält. Nur wenn diese Kräfte S_1 und S_2 die in Fig. 5b dargestellten Größen haben, kann der Angriffspunkt der Kräftegruppe im Ruhezustande bleiben. Und umgekehrt, **ist** der Angriffspunkt im Ruhe-

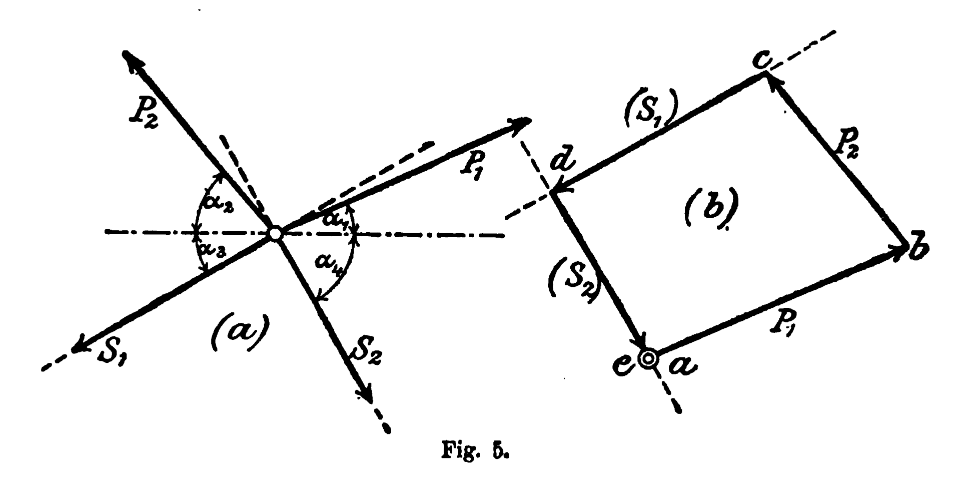


Fig. 5.

zustande, so können wir aus dieser Tatsache die Größe von S_1 und S_2 aus Fig. 5b abmessen.

Mehr als zwei unbekannte Kräfte lassen sich aber auf diese Weise nicht bestimmen! Wäre z. B. in Fig. 5 noch eine dritte Kraft, S_3, unbekannt, so könnte man diese ganz beliebig annehmen, an P_2 anreihen und dann durch Ziehen von Parallelen die beiden anderen Unbekannten S_1 und S_2 finden. Bei mehr als zwei Unbekannten gibt es also unendlich viele Lösungen der Aufgabe, denn wir könnten für S_3 unendlich viele beliebige Werte annehmen und würden trotzdem jedesmal ein S_1 und S_2 erhalten. Nur bei zwei Unbekannten ist die Lösung eindeutig; d. h. dann gibt es für jede Unbekannte **einen** und **nur einen** Wert, der die Aufgabe befriedigt. Bei drei Unbekannten dagegen ist die Aufgabe unbestimmt.

Die im folgenden entwickelte Methode der Stabkraftbestimmung

ist nun nichts anderes als die fortwährende Anwendung der soeben erledigten Aufgabe auf die einzelnen Knotenpunkte eines Fachwerkes.

II. Anwendung auf die einzelnen Knotenpunkte.

1. Knotenpunkt 0.

Auf den Punkt 0 in Fig. 6a wirken die drei Kräfte A, S_1 und S_2. Die Kraft A ist bekannt nach Größe und Richtung ($A = 3000$ kg). Von den Kräften S_1 und S_2 sind die Wirkungslinien bekannt, die Größen dagegen unbekannt. Sie jetzt auf zeichnerischem Wege aufzufinden, sei unsere nächste Arbeit.

Entsprechend der vorhin durchgenommenen Aufgabe, stellen wir zunächst die bereits bekannte Kraft A in einem beliebig zu wählenden Kräftemaßstab durch eine Strecke $\overline{ab}$ dar (Fig. 6b). Hierauf ziehen wir durch den Anfangs- und den Endpunkt dieser Strecke die Parallelen zu den Richtungen von S_1 und S_2. Diese Parallelen schneiden sich in Fig. 6b in einem Punkte c. *Dann ist* $\overline{bc} = S_1$ *und* $\overline{ca} = S_2$. Denn die beiden bisher unbekannten Kräfte S_1 und S_2 sind jetzt so bestimmt, daß sie erstens die vorgeschriebenen Wirkungslinien haben, und zweitens zusammen mit der dritten Kraft A ein Gleichgewichtssystem abgeben.

Hinsichtlich der Richtungen ist zu ersehen: A ist von a nach b gezeichnet. S_1 schließt sich daran an und reicht also *von* b *nach* c. S_2 schließt sich weiter an und geht also *von* c *nach* a (nach dem Anfangspunkt des Polygons zurück). Diese Richtungen von S_1 und S_2 werden in Fig. 6b durch die (offenen) Pfeile markiert, und zwar werden diese Pfeile natürlich an den Endpunkten derjenigen Strecken eingetragen, die die betreffenden Kräfte darstellen.

Sobald dann in Fig. 6b die Pfeile von S_1 und S_2 eingezeichnet sind, tragen wir diese Pfeile auch in Fig. 6a ein. Und zwar unmittelbar am Punkte 0, dessen Gleichgewicht wir ja betrachtet haben. S_1 ging im Kräftepolygon *von* links *nach* rechts. Diese Pfeilrichtung wird also auch in Fig. 6a am Punkte 0 auf S_1 eingezeichnet. Wir sehen jetzt, daß S_1 auf seinen Endpunkt 0 *ziehend* einwirkt. Er ist also ein *Zugstab* und bekommt ein Pluszeichen. Hiermit ist S_1 bestimmt. S_2 ging in Fig. 6b *von* rechts oben *nach* links unten. Diese Pfeilrichtung wird also auch in Fig. 6a unmittelbar am Punkte 0 eingezeichnet. Wir sehen: Stab S_2 wirkt *drückend* auf Punkt 0; er ist ein Druckstab und bekommt ein Minuszeichen.

Zum Schlusse zeichnen wir dann noch die Kräfte ein, mit denen die Stäbe S_1 und S_2 auf die an ihren **anderen** Enden befindlichen Knotenpunkte, *1* und *2*, einwirken. Stab S_1 wirkt als Zugstab **ziehend** auf jeden seiner Endpunkte. Auf Punkt *1* also nach links (vgl. das Schema mit der gespannten Feder in Fig 2d). S_2 wirkt als Druckstab **drückend** auf seine Endpunkte; also auf Punkt *2* in der Richtung nach rechts oben. Diese Pfeile zeichnen wir „**geschlossen**" sowohl in Fig. 6a, als auch in Fig. 6b. Sie

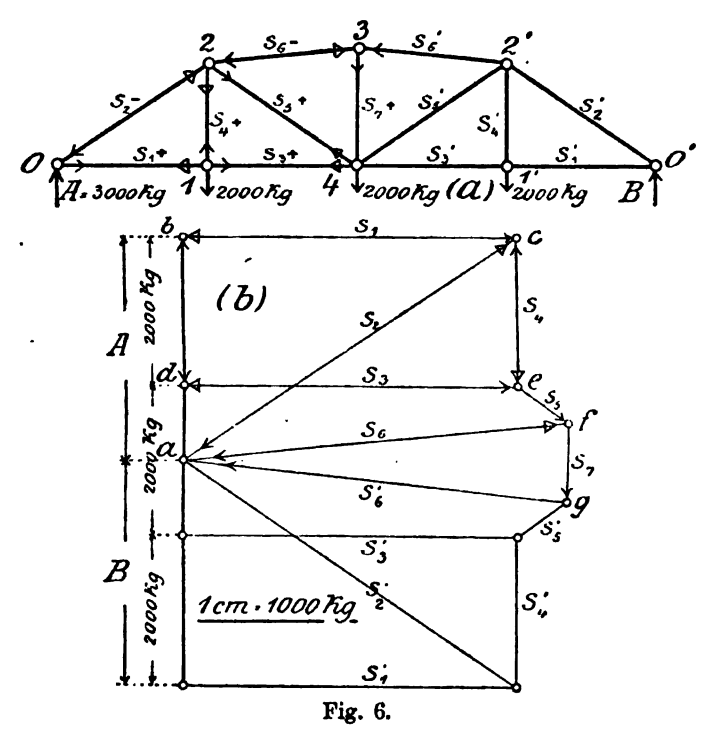


Fig. 6.

bezeichnen also die Wirkung der am Punkte *0* gefundenen Kräfte S_1 und S_2 auf ihre *anderen* Endpunkte *1* und *2*.

Somit sind aus dem Kräftepolygon *a—b—c* von Fig. 6b die Stabkräfte S_1 und S_2 ermittelt, und ferner ist die Wirkung dieser beiden Kräfte sowohl auf den Punkt *0* (offene Pfeile) als auch auf die Punkte *1* und *2* (geschlossene Pfeile) eingezeichnet. Jetzt erst können wir S_1 und S_2 als vollständig erledigt betrachten.

2. Knotenpunkt *1*.

Am Punkte *1* haben wir die Kräfte S_1, 2000 kg, S_3 und S_4. Bekannt sind hiervon die Last 2000 kg und die Stabkraft S_1 (letztere soeben gefunden). Unbekannt sind S_3 und S_4.

Genau wie vorhin reihen wir zunächst die bekannten Kräfte aneinander und ziehen dann durch den End- und den Anfangspunkt derselben die Parallelen zu den unbekannten Kräften. Die bekannte (nämlich vorhin gefundene) Kraft S_1 ist in Fig. 6b durch die Strecke $\overline{cb}$ dargestellt. Die Richtung der Kraft, die der Stab S_1 auf seinen *rechten* Endpunkt *1* ausübt, ist von rechts nach links, wie der *geschlossene* Pfeil angibt. *Wir* haben also jetzt c als Anfangspunkt und b als Endpunkt der Kraft S_1. Nun setzen wir an b die folgende Kraft, 2000 kg, an. Sie reiche in dem betreffenden Kraftmaßstab von b bis d. Durch d ziehen wir dann die Parallele zu S_3 und durch c die Parallele zu S_4 und erhalten: $S_3 = \overline{de}$ (*von d nach e*), $S_4 = \overline{ec}$ (*von e nach* dem Anfangspunkte c des Kräftepolygons $c—b—d—e—c$ zurück). Die hiermit gefundenen Richtungen markieren wir in Fig. 6b durch offene Pfeile, übertragen diese sofort auf den Punkt *1* in Fig. 6a und ersehen hieraus, daß S_3 und S_4 beides *Zug*stäbe sind. Somit sind S_3 und S_4 gefunden. Wegen des Folgenden markieren wir aber auch sogleich, wie diese Stäbe auf die an ihren anderen Enden befindlichen Knotenpunkte *4* und *2* einwirken (geschlossene Pfeile). [Es sei hierbei immer wieder darauf hingewiesen, daß die Kraft, die ein Stab auf den einen Befestigungspunkt ausübt, stets entgegengesetzt ist der Kraft, die er auf den anderen Endpunkt ausübt.] Jetzt erst können wir S_3 und S_4 als vollständig erledigt betrachten.

8. Knotenpunkt *2*.

Auf den Punkt *2* wirken die bekannten Kräfte S_2 und S_4 und die unbekannten Kräfte S_5 und S_6. S_2 wirkt drückend auf *2* ein, also nach rechts oben. Im Kräftepolygon ist diese Kraft dargestellt durch die Strecke $\overline{ac}$, und zwar ist die Richtung von a nach c (geschlossener Pfeil). Der nächste bekannte Stab am Punkte *2* ist S_4. Dieser wirkt (wie der geschlossene Pfeil angibt) abwärts. Die Kraft S_4 muß im Kräftepolygon also von c, dem Endpunkte der Kraft S_2, aus nach unten abgetragen werden. Sie ist in dieser Lage aber bereits vorhanden und braucht also nicht mehr besonders aufgezeichnet zu werden. Durch den Endpunkt von S_4, Punkt e, ziehen wir dann die Parallele zu S_5 und durch den Anfangspunkt a der ersten Kraft (S_2) die Parallele zu S_6. Wir finden hiermit: $S_5 = \overline{ef}$, $S_6 = \overline{fa}$. Stab S_5 ergibt sich als Zugstab; S_6 als Druckstab. Zum Schlusse werden noch die geschlossenen Pfeile eingezeichnet, um auch zu zeigen, wie die Stäbe S_5 und S_6 auf die an ihren anderen Enden befindlichen Knotenpunkte einwirken.

4. Knotenpunkt *3*.

Am Punkt *3* ist die Stabkraft S_6 bekannt. Sie ist in Fig. 6b dargestellt durch die Strecke von *a* nach *f* (in Richtung des geschlossenen Pfeiles). Durch Anfangs- und Endpunkt dieser Strecke ziehen wir Parallele zu den unbekannten Stäben S_7 und S_6' und finden diese nach Größe und Vorzeichen. S_6' ergibt sich natürlich gleich S_6.

5. Knotenpunkt *4*, *2'*, *1'*, *0'*.

Wenn man die Kräftepolygone noch weiterzeichnet, wie in Fig. 6b geschehen ist, so bekommt man $S_5' = S_5$, $S_4' = S_4$ usw. Somit sind sämtliche Stabkräfte des Fachwerkes bestimmt.

III. Zusammenstellung der Spannkräfte.

Nachdem somit die Kräftepolygone aufgezeichnet sind, können wir aus Fig. 6b die Stabkräfte abgreifen. Der Kräftemaßstab war so gewählt, daß 1 cm 1000 kg bedeutet. Hiernach ergeben sich für die einzelnen Stäbe folgende Werte:

Stab	Stabkraft (kg)
S_1 S_1'	+4450
S_2 S_2'	−5350
S_3 S_3'	+4450
S_4 S_4'	+2000
S_5 S_5'	+ 850
S_6 S_6'	−5150
S_7	+1050

Somit ist die Fachwerkfigur 6a berechnet.

IV. Bezeichnung und Vorteil der Methode.

Jede Stabkraft in Fig. 6a ist also in Fig. 6b durch eine Strecke dargestellt. Wir nennen Fig. 6b einen „Cremonaschen Kräfteplan“. *Cremona*, gest. als Professor in Rom, hat besonders die geometrischen Eigenschaften dieser Kräftepläne untersucht. Der Gedanke, das Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte auf graphischem Wege zu untersuchen und hierdurch die Stabkräfte zu bestimmen, ergibt sich ja ohne weiteres als Ergänzung zu der in den vorigen Paragraphen gezeigten analytischen Methode.

Man könnte auch zu jedem Knotenpunkte in einer besonderen kleinen Figur das zugehörige Kräftepolygon auftragen. Dann müßten aber dessen sämtliche Stabkräfte, auch die bereits vorher gefundenen, neu aufgezeichnet werden. Der Vorzug eines *Cremona*schen Kräfteplanes besteht nun gerade darin, daß die zu

den einzelnen Knotenpunkten gehörigen Kräftepolygone (Polygon *a—b—c* zu Knotenpunkt *0*, Polygon *c—b—d—e* zu *1*, usw.) nicht getrennt aufgezeichnet werden, sondern daß man diese zu einer zusammenhängenden Figur zusammenschiebt, so daß jede Kraft nur einmal gezeichnet zu werden braucht. Hierdurch spart man nicht nur an Arbeit, sondern die Zeichnung wird auch genauer als bei getrennt aufgezeichneten Kräftepolygonen der einzelnen Punkte.

Im folgenden Paragraphen wollen wir zunächst ein etwas kompliziertes Beispiel mittels Kräfteplan untersuchen und den Arbeitsvorgang so, wie er sich für die Praxis empfiehlt, übersichtlich und gewissermaßen gebrauchsfertig zusammenstellen (s. Aufgabe 1 und 2).

§ 6.

Beispiele und Erweiterungen zu § 5.

Vorbemerkung: Vor allen Dingen sei darauf hingewiesen, daß der Leser unbedingt die folgenden Zeichnungen selber mitzeichnen muß, und zwar zeichnen, nicht nur skizzieren! Es empfiehlt sich hierzu ein kleines Reißbrett (ca. 37 × 47 cm) mit entsprechendem handlichen Zeichengerät. Dieses Reißbrett muß beim Studium neben dem Buche, oder vielmehr das Buch neben dem Reißbrett liegen, wenn aus der Arbeit etwas Brauchbares herauskommen soll. In den folgenden Aufgaben werden wir nicht nur den § 5 wiederholen, sondern manche praktische Erweiterung hinzunehmen.

Erste Aufgabe.

Für die in Fig. 7a dargestellte Dachkonstruktion sind die Stabkräfte mittels Kräfteplan zu bestimmen!

Die Belastung besteht aus den drei Kräften W_0, W_1, W_2 rechtwinklig zur Dachfläche (Windlasten) und aus den vertikalen Lasten P_1 und P_2.

Die Stäbe wollen wir jetzt bezeichnen: O = Obergurtstab, U = Untergurtstab, D = Füllungsstab.

Beim Aufzeichnen der Kräftepolygone empfiehlt es sich, zunächst immer sämtliche äußeren Kräfte zu einem Polygon zusammenzureihen und dann erst an die Polygone der einzelnen Knotenpunkte zu gehen.

a) Das Polygon der äußeren Kräfte.

α) Zunächst bestimmen wir die Auflagerkräfte. Die beiden Lasten von 380 kg verteilen sich gleichmäßig auf B und V.

Die Auflagerkraft B infolge der Windlasten ergibt sich, indem wir von diesen Lasten die Summe der statischen Momente in bezug auf den Punkt *0* bilden [wobei wir die Windlasten zu ihrer im

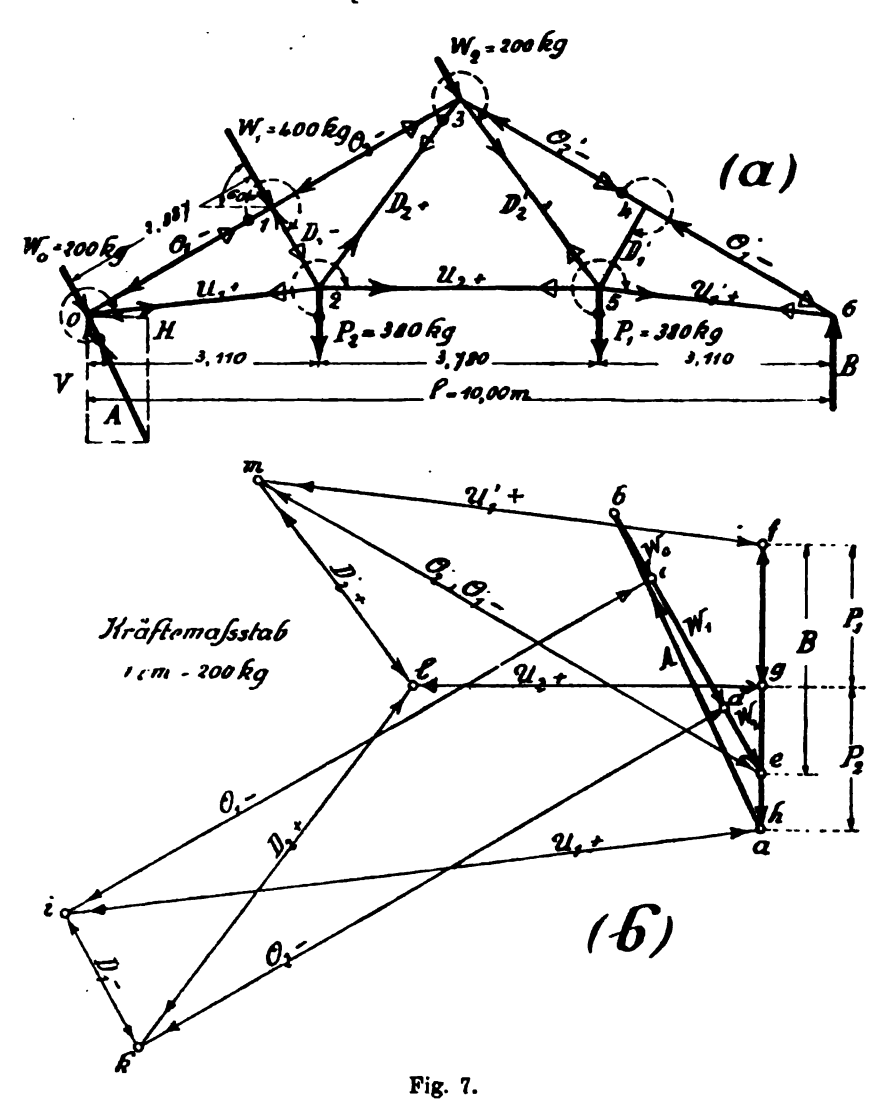


Fig. 7.

Punkte *1* angreifenden Resultierenden (200 + 400 + 200) zusammenfassen]. Somit wird:

$$B = 380 + \frac{1}{10{,}00} \cdot (200 + 400 + 200) \cdot 2{,}887$$

$$= 380 + 231 = 611 \text{ kg}.$$

Die Seitenkräfte V und H des Auflagerdruckes A folgen nun aus den Bedingungen, daß $V + B$ = Summe aller Vertikalprojektionen und H = Summe aller Horizontalprojektionen der Lasten sein müssen:

$$V = [2 \cdot 380 + (200 + 400 + 200)\sin 60°] - B$$
$$= [760 + 693] - 611 = 842 \text{ kg},$$
$$H = (200 + 400 + 200)\cos 60° = 400 \text{ kg}.$$

(Wiederhole Band I, § 15 und § 17!) Durch V und H ist dann auch der Auflagerdruck A bestimmt.

β) Um nun für das Weitere die äußeren Kräfte stets zur Hand zu haben, beginnen wir den Kräfteplan damit, daß wir zunächst sämtliche äußeren Kräfte aufzeichnen. Wir reihen also sämtliche äußeren Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander (Fig. 7b). Hierbei ist die Reihenfolge an und für sich beliebig. Will man aber einfache Kräftepläne haben, so nehme man die äußeren Kräfte stets in derselben Reihenfolge, wie sie am Umfange des Fachwerkes aufeinanderfolgen: Beginnen wir z. B. mit der Kraft A und gehen am Umfange des Fachwerkes rechtsherum, so stoßen wir in Fig. 7a der Reihe nach auf folgende Kräfte:

$$A - W_0 - W_1 - W_2 - B - P_1 - P_2 .$$

In derselben Reihenfolge sind nun diese Kräfte im Kräftepolygon Fig. 7b zusammengesetzt:

$$a - b = A ,$$
$$b - c = W_0 ,$$
$$c - d = W_1 ,$$
$$d - e = W_2 ,$$
$$e - f = B ,$$
$$f - g = P_1 ,$$
$$g - h = P_2 .$$

[h, der Endpunkt des Polygons, fällt zusammen mit a, dem Anfangspunkte.] Bei einer anderen Reihenfolge, z. B. $A - W_0 - W_1 - W_2 - P_1$ usw. hätten wir B übersprungen. Dann bekämen wir Schwierigkeiten beim Kräfteplan.

Ferner sei noch auf folgende Regel zur Erzielung übersichtlicher Kräftepläne aufmerksam gemacht: Man soll die äußeren Kräfte so einzeichnen, daß sie nicht im Innern der Systemfigur, sondern außerhalb derselben erscheinen. Die Last P_1 z. B. muß also am Knotenpunkte *5* hängend gezeichnet werden; nicht auf

dem Punkte stehend, weil sie dann im Innern der Fachwerkfigur wäre. Diese Regel ist wichtig für die Reihenfolge, in der die Kräfte an den einzelnen Punkten genommen werden (s. unter „b").

b) Die Polygone der einzelnen Knotenpunkte.

Jetzt gehen wir zu den Stabkräften an den einzelnen Knotenpunkten. Der erste Punkt, an dem nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind, ist der Punkt *0* (oder Punkt *6*). An ersterem greifen an: A, W_0, O_1 und U_1. Hiervon sind A und W_0 bekannt; unbekannt sind die Stabkräfte O_1 und U_1.

An und für sich könnten wir diese Kräfte in beliebiger Reihenfolge zu einem Polygon verbinden. Es zeigt sich aber folgendes: Wenn man einen geschlossenen Kräfteplan (in dem jede Kraft nur einmal gezeichnet zu werden braucht) haben will, so nehme man an jedem Knotenpunkte die Kräfte in derselben Reihenfolge, in der man die äußeren Kräfte genommen hat. Bei den äußeren Kräften sind wir am Umfange des Fachwerkes *„rechtsherum"* gegangen (Fig. 7b), folglich müssen wir auch an jedem Knotenpunkte *„rechtsherum"* gehen. Wir wollen uns also am Knotenpunkte *0* einen *„rechtsherum"* zeigenden Pfeil einzeichnen, der zuerst die bekannten und zum Schlusse die beiden unbekannten Kräfte schneidet. Dieser Pfeil gibt dann an, in welcher Reihenfolge die am Punkte *0* angreifenden Kräfte beim Aufzeichnen des zu diesem Punkte gehörigen Kräftepolygons zu nehmen sind; nämlich in der Reihenfolge:

$$A—W_0—O_1—U_1 .$$

Das Kräftepolygon selber ist nun sehr einfach gezeichnet. A und W_0 sind bereits in Fig. 7b aufgetragen (Linienzug $a—b—c$). Durch den Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft (Punkt c) ziehen wir die Parallele zum Stab O_1 und durch den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft (Punkt a) die Parallele zum Stab U_1. Diese beiden Parallelen schneiden sich in einem Punkte i. Dann ist $a—b—c—i—a$ das Polygon der Kräfte $A—W_0—O_1—U_1$. Die Pfeile sind so eingetragen, daß der Umfahrungssinn des Polygons stetig vom Anfangspunkt aus wieder zum Anfangspunkt zurückläuft. Diese Pfeilrichtungen werden nun in die Systemfigur Fig. 7a auf O_1 und U_1 unmittelbar am Punkte *0* eingetragen und hierdurch erkannt, daß O_1 ein Druckstab ist, während U_1 eine Zugkraft auf den Punkt *0* ausübt, was durch die hinzugeschriebenen Minus- bzw. Pluszeichen festgelegt wird. Zum Schlusse kennzeichnen wir durch die geschlossenen Pfeile (in Fig. 7a und 7b,)

in welcher Weise die soeben aufgefundenen Stäbe O_1 und U_1 auf ihre anderen Enden, nämlich Knotenpunkt *1* und Knotenpunkt *2*, wirken. Dann erst sind die am Punkte *0* wirkenden Kräfte vollständig erledigt.

Jetzt zum nächsten Punkte, an dem nur zwei unbekannte Kräfte wirken. Es ist dieses Punkt *1*. Denn von den vier an ihm angreifenden Kräften sind O_1 und W_1 bekannt, so daß nur O_2 und D_1 als unbekannt übrigbleiben. Die Reihenfolge, in der die Kräfte zusammenzusetzen sind, erfahren wir wieder dadurch, daß wir am Punkte *1* einen „*rechtsherum*" zeigenden Pfeil so einzeichnen, daß er zuerst die bekannten und zuletzt die unbekannten Kräfte schneidet. („Rechtsherum", da wir die äußeren Kräfte $A—W_0—W_1$ usw. am Umfange des Fachwerkes in der Reihenfolge „rechtsherum" genommen haben.) Dieser Pfeil zeigt uns, daß die Reihenfolge sein muß:

$$O_1—W_1—O_2—D_1\,.$$

Die ersteren beiden Kräfte liegen im Kräftepolygon Fig. 7b bereits gezeichnet vor: Die Kraft O_1 wirkt von i nach c, wie der geschlossene Pfeil angibt. Daran ist bereits angesetzt die Kraft $W_1 = \overline{cd}$. Durch den Endpunkt der letzteren Kraft ziehen wir nun die Parallele zu O_2 und durch den Anfangspunkt der ersteren Kraft die Parallele zu D_1. Insgesamt entsteht dann das geschlossene Polygon $i—c—d—k—i$. Die Pfeile werden so eingezeichnet, daß man, vom Anfangspunkte i des Polygons beginnend und den Pfeilen nachgehend, wieder zu i zurückgelangt. Die hierdurch bestimmten Pfeilrichtungen von O_2 und D_1 werden nun in die Systemfigur am Punkt *1* eingetragen. Wir sehen, daß sowohl O_2 wie D_1 ein Druckstab ist. Schließlich werden die geschlossenen Pfeile bei O_2 und D_1 eingezeichnet, um zu zeigen, wie wir diese Kräfte bei den Knotenpunkten *2* und *3* zu nehmen haben.

Der nächste Punkt mit nur zwei unbekannten Kräften ist der Punkt *2*. Von seinen fünf Kräften sind gegeben bzw. bereits gefunden P_2, U_1 und D_1; unbekannt sind D_2 und U_2. Die Reihenfolge für diese fünf Kräfte gibt uns wieder ein „*rechtsherum*" zeigender Pfeil, der so eingetragen wird, daß er zuerst durch die bekannten und zum Schlusse durch die unbekannten Kräfte geht. Sie ist:

$$P_2—U_1—D_1—D_2—U_2\,.$$

Im Kräftepolygon Fig. 7b muß also P_2 die erste Kraft sein. Sie liegt bereits gezeichnet vor (Anfangspunkt g). Ferner schließen

sich daran in richtiger Reihenfolge bereits U_1 und D_1. Durch den Endpunkt k der letzten Kraft ziehen wir nun die Parallele zu D_2 und durch den Anfangspunkt g der ersten Kraft die Parallele zu U_2. Hierdurch entsteht das Polygon $g—h—i—k—l—g$. Dann werden die Pfeile der aufgefundenen Kräfte D_2 und U_2 in Fig. 7b eingezeichnet, in Fig. 7a übertragen und die Art der Beanspruchung in diesem Falle beidemal durch Pluszeichen gekennzeichnet.

Punkt *3* ist der nächste Punkt mit nur zwei Unbekannten. Der gebogene Pfeil zeigt an, daß die Kräfte in der Reihenfolge aneinander zu setzen sind:

$$D_2—O_2—W_2—O_2'—D_2'.$$

[Die beiden letzten Kräfte sind natürlich die Unbekannten.] Es ergibt sich das Kräftepolygon $l—k—d—e—m—l$. O_2' stellt sich als Druck, D_2' als Zug heraus.

Im Punkte *4* ist die Reihenfolge:

$$O_2'—O_1'—D_1'.$$

O_2' ist in seiner Wirkung auf den Punkt *4* dargestellt durch die Strecke von m nach e (Fig. 7b). Durch e ziehen wir also die Parallele zu O_1' und durch m die Parallele zu D_1'. Es stellt sich heraus, daß diese letztere Parallele gleich Null wird und daß O_1' gleich O_2' wird. [Dieses Resultat folgt auch sofort aus Satz II, 2. Aufgabe von § 4.]

Zum Schlusse untersuchen wir Punkt *5*. Die Reihenfolge ist:

$$P_1—U_2—D_2'—D_1'—U_1'.$$

Unbekannt haben wir nur noch die eine Kraft U_1'. Das Kräftepolygon fängt mit Punkt f (Anfangspunkt von P_1) an und geht dann weiter: $f—g—l—m—f$. [Die Stabkraft D_1' ist gleich Null.]

Am letzten Punkte, bei Punkt *6*, sind überhaupt keine unbekannten Kräfte mehr. Denn U_1' und O_1' sind bereits aus dem Gleichgewicht der Punkte *4* und *5* gefunden, und der Auflagerdruck B wurde schon am Anfange bestimmt. Wie wir jetzt sehen, hätten wir aber B nicht vorher auszurechnen brauchen, sondern hätten es jetzt aus dem Gleichgewicht des Punktes *6* bestimmen können. Es ist aber immer besser, die Auflagerkräfte von vornherein zu berechnen und dann erst den Kräfteplan zu beginnen. Auf diese Weise schafft man sich angenehme Kontrollen für die Richtigkeit der Zeichnung. So haben wir z. B. die Kontrolle, daß am Punkte *6* die ermittelten Kräfte U_1' und O_1' und der berechnete Auflagerdruck B ein geschlossenes Polygon darstellen müssen. In der Tat ist dieses in Fig. 7b der Fall.

Zweite Aufgabe.

Das Verfahren beim Aufzeichnen von Kräfteplänen ist zu wiederholen. Ferner sollen die geometrischen Beziehungen zwischen Systemfigur und Kräfteplan untersucht werden!

I. Wiederholung.

a) Die äußeren Kräfte. Zunächst werden die äußeren Kräfte zusammengestellt. In der Systemfigur werden sie so eingezeichnet, daß sie am Umfange des Fachwerkes, aber außerhalb der umschließenden Stäbe (Gurtstäbe) erscheinen. Um dann das Polygon der äußeren Kräfte zu erhalten, gehen wir am Umfange des Fachwerkes entlang und reihen die Kräfte in derselben Reihenfolge aneinander, wie wir beim Umfahren des Fachwerkes auf sie stoßen. [Zu den äußeren Kräften gehören natürlich Lasten und Auflagerkräfte. Letztere nicht vergessen und nicht außerhalb der Reihenfolge nehmen!] Hiermit sind die äußeren Kräfte für das Folgende zusammengestellt.

b) Die Stabkräfte. Nun werden die Knotenpunkte des Fachwerkes einzeln betrachtet und die betreffenden Polygone gezeichnet. Hierbei ist zu beachten:

Je nachdem wir beim Umfahren des Fachwerkes (äußere Kräfte) „rechts-" oder „linksherum" gegangen sind, nehmen wir auch nachher bei den einzelnen Knotenpunkten die Kräfte in der Reihenfolge „rechts-" oder „linksherum". Zur Vermeidung von Fehlern empfiehlt es sich also, an jedem Knotenpunkte einen rechts- bzw. linksherum zeigenden Pfeil einzutragen, der zuerst die gegebenen bzw. bereits ermittelten, und zum Schlusse die beiden unbekannten Kräfte trifft. Hierdurch werden Fehler in der Reihenfolge der Kräfte vermieden.

Dann werden, von Punkt zu Punkt fortschreitend, die Kräftepolygone gezeichnet. Beim Aufzeichnen dieser Kräftepolygone beginnt man stets mit den bereits bekannten Kräften und reiht diese nach Größe und Richtung aneinander. Dann zieht man durch den Endpunkt der zuletzt gezeichneten und durch den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft Parallele zu den beiden unbekannten Stabkräften des Knotenpunktes und schließt hierdurch das Polygon. Auf diese Weise werden zunächst die *Größen* der gesuchten Stabkräfte ermittelt.

Nun werden an die Endpunkte der betreffenden Polygonseiten die (offenen) Pfeile eingezeichnet, und zwar so, daß man, vom Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft beginnend und

den Pfeilen nachgehend, wieder zum Anfangspunkt zurückkehrt. Diese Pfeile werden hierauf in die Systemfigur unmittelbar an dem untersuchten Knotenpunkt übertragen und hierdurch entschieden, ob die gefundenen Stabkräfte Zug oder Druck bedeuten. Auf diese Weise sind dann auch die *Vorzeichen* der gesuchten Stabkräfte ermittelt.

Zum Schlusse werden dann die Pfeile umgekehrt (geschlossene Pfeile) und in die Systemfigur an die anderen Enden der Stäbe und in das Kräftepolygon an die anderen Enden der betreffenden Strecken eingetragen, um zu zeigen, wie die soeben gefundenen Kräfte auf die an ihren anderen Enden befindlichen Knotenpunkte einwirken.

Auf diesem Wege schreitet man von Knotenpunkt zu Knotenpunkt weiter. Mehr als zwei Unbekannte kann man an keinem Knotenpunkt bestimmen (vgl. die in Absatz I von § 5 behandelte Aufgabe). Man muß also die Reihenfolge so wählen, daß an jedem neuen Knotenpunkte immer nur zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sind.

Wie man sieht, ist die Kräfteplan-Methode ganz elementar. Der einzige Kunstgriff besteht darin, daß man die zu den einzelnen Knotenpunkten gehörigen Kräftepolygone nicht einzeln aufzeichnet, sondern so zusammenschiebt, daß sie eine zusammenhängende Figur bilden. Hierdurch wird erreicht, daß man beim Aufzeichnen des zu einem Knotenpunkte gehörigen Kräftepolygons die bekannten Kräfte dieses Punktes bereits in der richtigen Lage vorfindet. Neu zu zeichnen sind also nur die Parallelen zu den beiden unbekannten Kräften des Punktes. In einem solchen Kräfteplan gehört demnach zu jeder Kraft des Fachwerkes eine bestimmte Linie des Planes.

II. Geometrische Beziehungen zwischen Fachwerkfigur und Kräfteplan.

Da ein Kräfteplan in ganz bestimmter, gesetzmäßiger Weise aus der Systemfigur abgeleitet wird, lassen sich zwischen beiden gewisse geometrische Beziehungen entdecken. Von seiten der Mathematiker sind diese Beziehungen mit Vorliebe behandelt. Für die Praxis ist jedoch eine derartige mathematische Untersuchung entbehrlich. Es genügt, wenn wir durch Vergleich von Fig. 7a und 7b einige ins Auge fallende Eigenschaften erwähnen.

a) Hinsichtlich der äußeren Kräfte. Die äußeren Kräfte dürfen im Kräfteplan nicht vereinzelt liegen, sondern müssen sich fortlaufend aneinander reihen. Um dieses zu erreichen, haben wir

ja auch den Kräfteplan von vornherein damit begonnen, daß zunächst die äußeren Kräfte in einem zusammenhängenden Polygon aufgetragen wurden.

b) Hinsichtlich der Stabkräfte. Zu jedem Punkte der Fachwerkfigur gehört ein Polygon im Kräfteplan, nämlich das zu dem betreffenden Punkte gehörige Kräftepolygon. Dieses ist ja die Entstehung des Kräfteplanes. Umgekehrt zeigt sich aber, daß auch zu jedem Punkte des Kräfteplanes ein Polygon in der Fachwerkfigur gehört. So schneiden sich z. B. im Punkte k des Kräfteplanes die Stabkräfte D_1, D_2 und O_2. Und in der Tat bilden diese drei Stäbe in der Fachwerkfigur ein Polygon (Dreieck *2—1—3*). Ferner: Im Punkte c des Kräfteplanes schneiden sich die Kräfte W_0, O_1 und W_1. In der Tat bilden diese drei Kräfte in Fig. 7a ein Polygon (das allerdings nach der einen Seite offen erscheint, da W_0 und W_1 sich erst in der Unendlichkeit schneiden). Zusammenfassend können wir also sagen: Jedem Eckpunkte des Fachwerkes entspricht ein Polygon im Kräfteplan, und jedem Eckpunkte des Kräfteplanes entspricht ein Polygon im Fachwerke. Wegen dieser Gegenseitigkeit spricht man von „reziproken" Kräfteplänen.

Eine zweite Eigenschaft der Stabkräfte ist folgende: Liegt ein Gurtstab im Fachwerke zwischen zwei äußeren Kräften, so geht die Spannkraft dieses Stabes im Kräfteplan durch den Schnittpunkt dieser beiden äußeren Kräfte. So liegt z. B. der Gurtstab U_2 in Fig. 7a zwischen den äußeren Kräften P_1 und P_2. In der Tat geht im Kräfteplan die Kraft U_2 durch den Schnittpunkt von P_1 und P_2.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß zu einem einfachen Dreieckfachwerke sich stets ein einfacher Kräfteplan zeichnen läßt. Das heißt ein solcher, bei dem zu jeder Kraft des Fachwerkes nur eine Linie im Kräfteplan gezogen zu werden braucht. [Es braucht also niemals eine bereits gefundene Kraft für einen späteren Knotenpunkt noch einmal aufgetragen zu werden.] Bei anderen Fachwerken lassen sich solche einfache Kräftepläne nicht immer erzielen. Derartige „nicht-einfache" Konstruktionen, die übrigens viel seltener vorkommen als die einfachen Dreieckfachwerke, werden wir im 2. Vortrage noch genauer untersuchen.

Dritte Aufgabe.

Bei dem in Fig. 8a gezeichneten Konsoldache sind die Stabkräfte mittels Kräfteplan zu ermitteln!

Bei *A* ist das feste Lager des Fachwerkes; *B* ist eine Verankerung.

a) Das Polygon der äußeren Kräfte.

Die Auflagerkräfte sind:

$$B = (300 + 600 + 600 + 300)\frac{2{,}25}{1{,}20} = 3375 \text{ kg},$$

$$H = B = 3375 \text{ kg},$$

$$V = (300 + 600 + 600 + 300) = 1800 \text{ kg}.$$

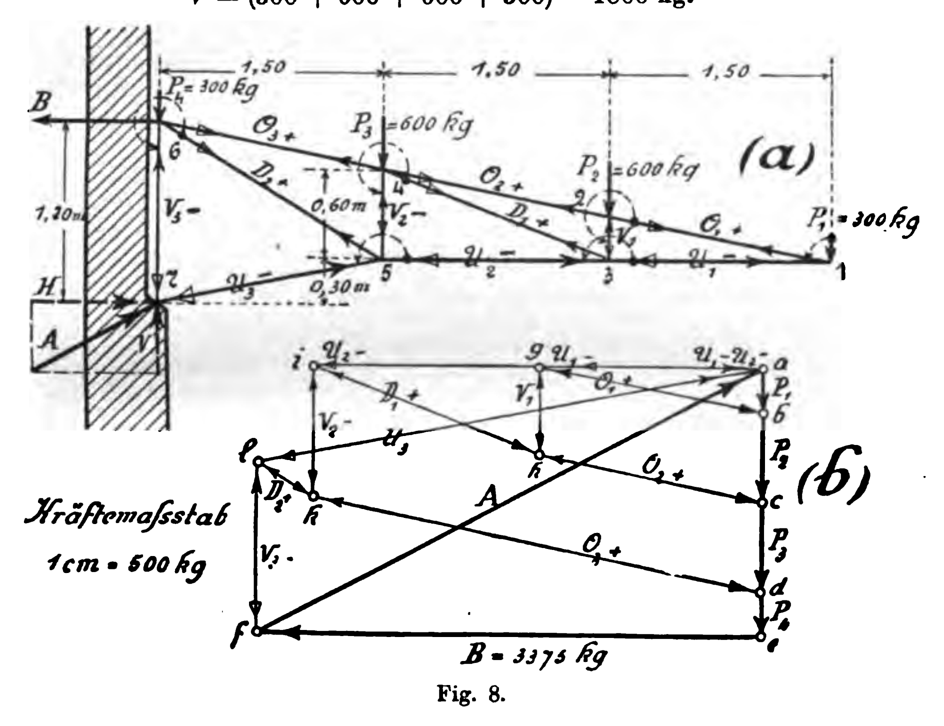


Fig. 8.

Nehmen wir die äußeren Kräfte am Umfange des Fachwerkes z. B. „linksherum", so haben wir, am Punkte *1* anfangend, die Reihenfolge:

$$P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - B - A\,.$$

Nach dieser Reihenfolge ist auch der Kräfteplan entworfen, indem diese Kräfte zu einem Polygon *a—b—c—d—e—f—a* aneinander gereiht sind (Fig. 8b).

b) Die Polygone der inneren Kräfte.

Beim Aufzeichnen des Kräfteplanes können wir am Punkte *1* anfangen, da hier nur zwei Unbekannte vorhanden sind. Da die äußeren Kräfte „linksherum" genommen sind, gehen wir auch

an jedem Knotenpunkte linksherum. Der demgemäß eingezeichnete Pfeil ergibt am Punkte *1* die Reihenfolge der Kräfte:

$$P_1 - O_1 - U_1 .$$

In dieser Reihenfolge zeichnen wir also das zu Punkt *1* gehörige Kräftepolygon ($a—b—g$, Fig. 8b) und finden hierdurch die bisher unbekannten Kräfte O_1 und U_1 nach Größe und Vorzeichen (Fig. 8b und 8a).

In derselben Weise sind die übrigen Knotenpunkte untersucht: Zunächst wird stets festgestellt, welche Kräfte bekannt und welche unbekannt sind. (Die Zahl der unbekannten darf nicht größer als zwei sein, da sich sonst kein bestimmtes Polygon zeichnen läßt.) Dann wird der linksherum zeigende Pfeil eingetragen, der angibt, in welcher Reihenfolge die Kräfte zu nehmen sind. Dann wird das Polygon wirklich gezeichnet und hierdurch die bisher unbekannten Kräfte bestimmt. In der folgenden Tabelle ist die Reihenfolge der Arbeiten übersichtlich zusammengestellt.

Punkt	Bekannt	Unbekannt	Reihenfolge	Polygon
1	P_1	O_1 U_1	$P_1 - O_1 - U_1$	$a—b—g—a$
2	O_1 P_2	O_2 V_1	$O_1 - P_2 - O_2 - V_1$	$g—b—c—h—g$
3	U_1 V_1	D_1 U_2	$U_1 - V_1 - D_1 - U_2$	$a—g—h—i—a$
4	D_1 O_2 P_3	O_3 V_2	$D_1 - O_2 - P_3 - O_3 - V_2$	$i—h—c—d—k—i$
5	U_2 V_2	D_2 U_3	$U_2 - V_2 - D_2 - U_3$	$a—i—k—l—a$
6	D_2 O_3 P_4 (B)	V_3	$D_2 - O_3 - P_4 - B - V_3$	$l—k—d—e—f—l$
7	alle	—	$U_3 - V_3 - H - V$	$a—l—f—a$

In den Punkten *1—5* sind zwei Unbekannte. Im Punkt *6* ist nur die eine Unbekannte V_3 (da der Auflagerdruck B ja schon vorher berechnet worden ist), und wenn man bis zum Punkt *7* gekommen ist, so sind bereits sämtliche Kräfte bekannt. Das Polygon am Punkte *7* gibt also eine Kontrolle ab, indem es zeigt, ob H und V vorher richtig berechnet worden sind. Somit ist der Kräfteplan erledigt.

Zusatz: Im vorliegenden Falle wäre es gar nicht nötig gewesen, zunächst die Auflagerkräfte zu bestimmen, sondern wir hätten sofort mit dem Kräfteplan beginnen können. Denn wir hatten ja einen Knotenpunkt (Punkt *1*), an dem nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden sind. An diesem Punkte konnten wir also sofort mit dem Kräfteplan beginnen, ohne erst die Auflagerkräfte zu kennen. Dann hätten sich weiterhin am Punkte *6* die beiden Kräfte V_3 und B (nicht nur V_3 allein) ergeben, und aus

dem zu dem Punkte 7 gehörigen Polygon die Kräfte H und V bzw. die Kraft A. In der Tat läßt sich also der vollständige Kräfteplan Fig. 8b aufzeichnen, ohne daß man vorher die Auflagerkräfte A und B ermittelt. Besser ist es jedoch, man bestimmt vorher die Auflagerdrücke und benutzt die an den Punkten 6 und 7 sich ergebenden Polygone als Kontrollen für die ganze Zeichnung.

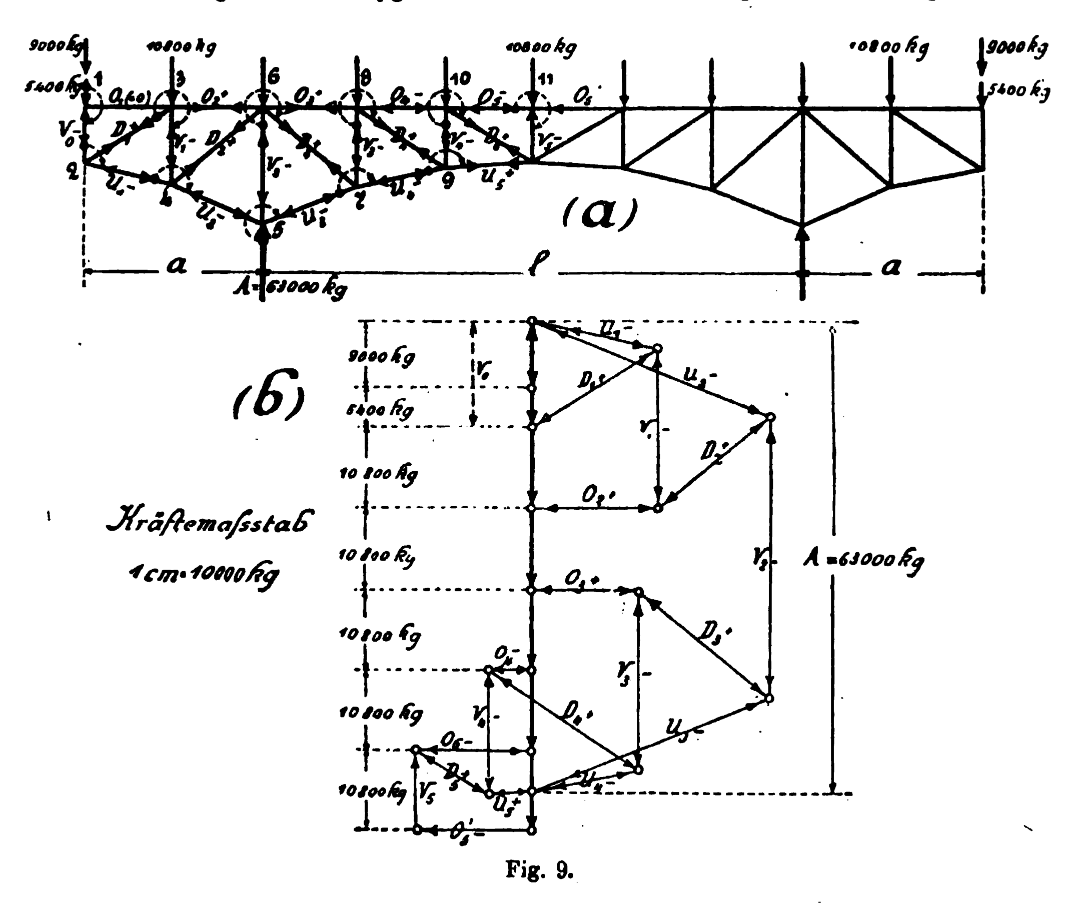


Fig. 9.

Vierte Aufgabe.

Für den in Fig. 9a gezeichneten Fachwerkträger mit überkragenden Enden sind die Stabkräfte zu bestimmen!

Der Kräfteplan ist in Fig. 9b gezeichnet. Auf jeden Fall zeichne man ihn aber noch einmal selber auf, da man nur auf diese Weise die nötige Übung erlangen kann! Beim Aufzeichnen nehme man einmal die Kräfte „rechtsherum" und dann „linksherum", um zu sehen, wie der Kräfteplan je nach dieser Anordnung zu

verschiedenen Seiten der äußeren Kräfte fällt. Die Spannkräfte reihe man in einer Tabelle zusammen.

Fünfte Aufgabe.

Folgender Satz ist zu beweisen: *Liegen bei einem Knotenpunkte mit drei Stäben* (Fig. 10a) *zwei derselben in einer Geraden und der dritte in Richtung der Last, so ist die Spannkraft dieses dritten Stabes gleich der Last, und die Spannkräfte der beiden anderen Stäbe sind untereinander gleich.*

In Fig. 10a soll also die Spannkraft des Stabes V gleich der Last P sein, während S_1 und S_2 gleich große Spannkräfte haben sollen. Der Beweis hierfür ergibt sich sofort durch Aufzeichnen des zu dem Knotenpunkte gehörigen Kräftepolygons (Fig. 10b). Dieses liefert

$$V = P\,; \quad S_1 = S_2\,.$$

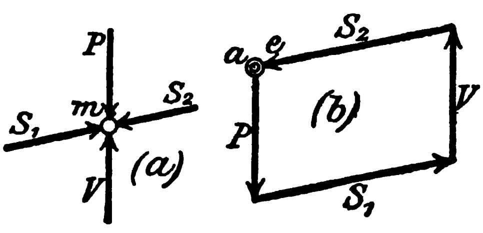


Fig. 10.

Hierbei ist zu beachten, daß V und S_1, S_2 nicht rechtwinklig zueinander stehen brauchen. Es ist nur nötig, daß einerseits S_1 und S_2 und andererseits V und P je in einer geraden Linie liegen. Wirkt P gegen den Knotenpunkt hin, so ist V eine Druckkraft (Fig. 10a); wirkt es von dem Knotenpunkte fort, so ist V eine Zugkraft.

Sechste Aufgabe.

Es ist zu beweisen: *Laufen an einem Knotenpunkte, der unbelastet ist, drei Stäbe zusammen, von denen zwei in einer geraden Linie liegen, während der dritte mit ihnen einen Winkel bildet, so ist die Spannkraft dieses dritten Stabes gleich Null und die beiden anderen Stäbe haben gleich große Spannkräfte.*

Dieser Satz folgt ohne weiteres aus Fig. 10, wenn man P gleich Null setzt. Man beachte auch hier, daß es nicht nötig ist, daß V rechtwinklig zu S_1, S_2 steht. Es muß auf jeden Fall gleich Null sein, wenn der Knotenpunkt unbelastet ist und die beiden anderen Stäbe S_1 und S_2 in einer Geraden liegen.

Siebente Aufgabe.

Für ein einfaches, aus zwei Stäben S_1 und S_2 bestehendes Stabgerüst (Fig. 11a) *sind die Stabkräfte durch die Last P und die Stablängen auszudrücken!*

Wir wollen hierbei zwei Fälle unterscheiden:

a) *Die Last P ist parallel der Verbindungslinie 1—2* (Fig. 11b). In diesem Falle sind das Kräftepolygon und die Systemfigur zwei ähnliche Dreiecke (Fig. 11b), da die Seiten paarweis parallel sind. [Man kann also die Systemfigur direkt als das in einem bestimmten Maßstabe gezeichnete Kräftepolygon auffassen.] Daraus folgt:

$$S_1 : P = s_1 : z\,,$$

$$S_2 : P = s_2 : z\,.$$

Fig. 11.

Also ergeben sich die Formeln:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} S_1 = P \cdot \dfrac{s_1}{z}\,, \\[2ex] S_2 = P \cdot \dfrac{s_2}{z}\,. \end{cases}$$

In Worten: Die Spannkraft eines Stabes ist gleich der Last P multipliziert mit der Länge des Stabes und dividiert durch den Abstand z der Fußpunkte der Stäbe.

b) *Die Last P ist nicht parallel der Verbindungslinie 1—2 der Fußpunkte* (Fig. 11c). In diesem Falle ziehen wir durch den Fußpunkt des einen Stabes, z. B. S_1, die Parallele zu der Last P.

Diese Parallele schneide auf dem anderen Stabe eine Strecke s_2' ab. Dann folgt wieder aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$S_1 = P \cdot \frac{s_1}{z},$$

$$S_2 = P \cdot \frac{s_2'}{z}.$$

Also dieselben Formeln wie vorhin, nur daß jetzt statt der wirklichen eine gedachte Stablänge eingeführt werden muß. [Man verlegt gewissermaßen den Fußpunkt *2* nach *2'*, damit die Verbindungslinie *1—2'* der Fußpunkte parallel der Last P wird.]

Hinsichtlich der Vorzeichen gilt stets die Regel: Liegt die Last innerhalb des Winkels zwischen den beiden Stäben, so haben diese gleiche Vorzeichen; anderenfalls ungleiche Vorzeichen.

Die obigen Formeln sind sehr bequem, um bei einem durch eine Kraft P belasteten Knotenpunkte schnell die Stabspannungen zu bestimmen. Überhaupt empfiehlt es sich öfter, wenn man einen Knotenpunkt zu untersuchen hat, das betreffende Kräftepolygon nur zu skizzieren und dann mit Hilfe von geometrischen oder trigonometrischen Formeln die einzelnen Spannkräfte rechnerisch hinzuschreiben.

§ 7.

III. Methode: Rechnerisch, durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf zusammenhängende Fachwerkteile. (*Ritter*sche Methode.)

Bei den bisherigen Methoden haben wir stets das Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte untersucht, um die zur Berechnung der Stabkräfte nötigen Aussagen zu erhalten. In vielen Fällen ist es aber zweckmäßig, die Knotenpunkte nicht einzeln, sondern gruppenweise zu betrachten, d. h. direkt größere Teile der betreffenden Fachwerkfigur hinsichtlich ihres Gleichgewichtes zu untersuchen. Diese Bestimmungsmethoden sind besonders deswegen so wertvoll, weil sie gestatten, einen einzelnen Stab herauszugreifen und ihn allein zu ermitteln. Als Einleitung zu dieser Arbeit mögen zunächst die im Band I, § 12—13 entwickelten Sätze über das Gleichgewicht eines durch Kräfte beanspruchten Körpers wiederholt werden.

I. Wiederholung der mechanischen Grundlagen.

Auf einen scheibenförmigen Körper mögen die Kräfte P_1, P_2 usw. einwirken (Fig. 12). Die Neigungswinkel dieser Kräfte

gegen eine angenommene x-Richtung seien α_1, α_2 usw. Im allgemeinen werden diese Kräfte den Körper natürlich irgendwie in Bewegung setzen. Es kann aber auch sein, daß sich die Kräfte an dem Körper im Gleichgewicht halten, und dieses ist der Fall, der für das Folgende von Wichtigkeit ist.

In Band I, § 12 und § 13, hatten wir für diesen besonderen Fall gesehen: Zeigt es sich, daß ein Körper trotz der Einwirkung von Kräften in der Ruhelage bleibt, so ist dies ein Zeichen, daß die Kräfte nicht beliebig an dem Körper angebracht sind, sondern daß **zwischen ihnen gewisse Beziehungen bestehen.** Es

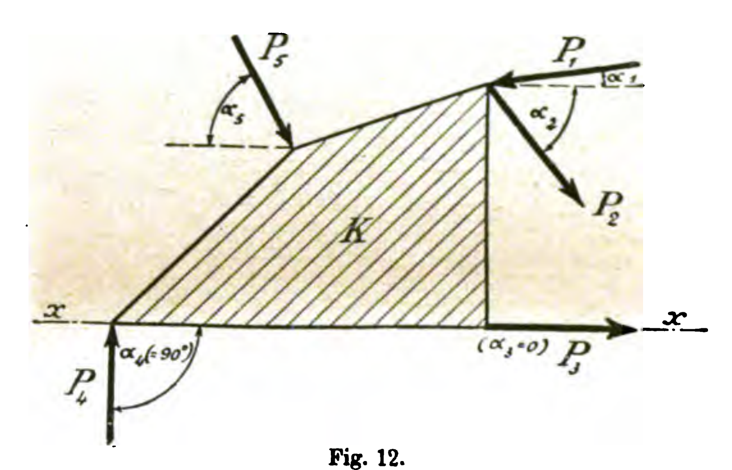


Fig. 12.

lassen sich nämlich bezüglich einer solcher Kräftegruppe drei Aussagen machen. Diese Aussagen lauten:

Im Gleichgewichtsfalle einer Kräftegruppe ist:

Form A
- I. *die Summe der Projektionen der Kräfte auf eine x-Achse* $= 0$,
- II. „ „ „ „ „ „ „ „ *y-Achse* $= 0$,
- III. „ „ „ *statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Punkt* $= 0$.

Statt diese Form der Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden, kann man auch sagen:

Im Falle des Gleichgewichts ist:

Form B
- I. *die Summe der Projektionen der Kräfte auf eine beliebige Achse* $= 0$,
- II. „ „ „ *statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Punkt* $= 0$,
- III. „ „ „ „ „ „ „ „ „ *zweiten Punkt* $= 0$.

Oder man kann die Bedingungen auch so anschreiben:

Eine Gleichgewichtsgruppe von Kräften erfüllt die Bedingungen:

Form C
- I. *Summe der statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Punkt* $= 0$,
- II. „ „ „ „ „ „ „ „ *zweiten Punkt* $= 0$,
- III. „ „ „ „ „ „ „ „ *dritten Punkt* $= 0$.

In welcher dieser drei Formen man die Gleichgewichtsbedingungen verwenden will, ist freigestellt, da ja jede Form nichts weiter als eine andere Einkleidung ein und desselben Grundgedankens ist. (Wiederhole Band I, § 12 und § 13!) Wir wollen mit der Verwendung der letzten Form — $\Sigma M_E = 0$, $\Sigma M_F = 0$, $\Sigma M_G = 0$ — beginnen. Die Benutzung dieser Gleichungen zur Berechnung von Stabkräften ist zum erstenmal von dem verstorbenen Professor *A. Ritter* (Aachen) gelehrt (1863).

II. Die Rittersche Schnittmethode.

Diese Methode besteht darin, daß man das Fachwerk durch einen Schnitt in einen linken und einen rechten Teil zerlegt und nun das Gleichgewicht eines dieser beiden Teile betrachtet (ähnlich wie bei der Berechnung der Spannungen eines auf Biegung beanspruchten vollwandigen Balkens).

a) Berechnung eines Obergurtstabes O.

α) *Ableitung einer Formel für O.*

Bei diesem Schnitte ist auf folgendes zu achten. Will man einen bestimmten Stab untersuchen, z. B. den Stab O in Fig. 13, so muß der Schnitt so gelegt werden, daß er diesen Stab schneidet, außerdem aber nur noch durch *zwei* unbekannte andere Kräfte geht. In Fig. 13 erfüllt z. B. der Schnitt α—α diese Bedingungen. Er geht durch den gesuchten Stab O und schneidet außerdem aber nur noch *zwei* andere Kräfte, die wir noch nicht kennen (nämlich D und U).

Dieser „*Ritter*sche Schnitt" zerlegt nun das Fachwerk in einen linken und einen rechten Teil. Betrachten wir z. B. den linken Teil (Fig. 13b). Er stellt einen Körper dar, an dem die gegebenen Kräfte A, P_1 und P_2, außerdem aber noch die Stabkräfte O, D und U wirken. Letztere dürfen beim Aufzählen der Kräfte natürlich nicht übergangen werden. Denn wir wollen ja gerade die inneren Kräfte gemeinsam mit den äußeren Kräften in die Gleichgewichtsbedingungen hineinbringen.

Die Wirkung dieser sämtlichen Kräfte besteht darin, daß der betrachtete Fachwerkteil im Ruhezustand verharrt, denn das ganze Fachwerk ist ja im Ruhezustande. Wir können also für diese Kräfte die *Gleichgewichtsbedingungen* anschreiben. Von den vorhin aufgeführten drei Formen A, B und C wird sich besonders die letztere als zweckmäßig erweisen. Wir wollen also für die an-

greifenden Kräfte die Bedingung anschreiben, daß die Summe der statischen Momente in bezug auf irgendeinen Punkt gleich Null ist.

Bei der *Wahl des Bezugspunktes* für die Momente muß man aber etwas schlau vorgehen. Außer der Kraft O, die berechnet werden soll, sind an dem betrachteten Teile noch unbekannt die Kräfte D und U. Wenn wir nun den Bezugspunkt für die Momente ganz beliebig wählen würden, erschienen in der Momentengleichung natürlich auch die Kräfte D und U, die, da sie unbekannt sind, die Gleichung unnötig komplizieren würden. Wollen wir aber die Gleichung so einrichten, daß das statische Moment einer Kraft, z. B. D, gleich Null wird, so müssen wir den Bezugspunkt für die Momente auf dieser Kraft nehmen. Denn dann ist das Lot vom Bezugspunkte auf die Kraft D gleich Null und folglich auch das statische Moment von D gleich Null. Wenn wir aber sogar erreichen wollen, daß von *zwei* Kräften D und U die statischen Momente gleich Null werden, so müssen wir den Bezugspunkt so wählen, daß er sowohl auf D als auch auf U liegt; d. h. wir müssen den *Schnittpunkt von D und U* als Bezugspunkt nehmen. Durch diese nicht mehr willkürliche, sondern absichtliche Wahl des Bezugspunktes wird also erreicht, daß von den drei Stäben O, D und U die beiden letzten das Moment Null ergeben und nur noch O in der Momentengleichung verbleibt. Augenscheinlich haben wir hierdurch eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung erreicht. Diese Vereinfachung ist der Kernpunkt der Methode.

Nach dieser Überlegung würde man in Fig. 13 bei Berechnung des Stabes O den Schnittpunkt der beiden anderen Stäbe, D und U, zum Bezugspunkte für die Momente wählen. Dieser Punkt werde mit o bezeichnet, um anzudeuten, daß er der zu dem Stabe O gehörige Bezugspunkt ist. Nun schreiben wir von sämtlichen Kräften, die an dem betrachteten Fachwerkteile Fig. 13b angreifen, die Momentengleichung für diesen Punkt o an und erhalten (die rechtsherum zeigenden Momente positiv eingeführt; die unbekannten Stäbe zunächst als Zug angenommen):

$$\text{(I)} \qquad +A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 p_2 + O \cdot r_o + D \cdot 0 + U \cdot 0 = 0\,.$$

Wie man sieht, fallen die beiden letzten Glieder tatsächlich fort und O bleibt als einzige Unbekannte übrig.

$$O \cdot r_o = -(+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2)\,,$$

$$\text{(Ia)} \qquad O = -\frac{+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2}{r_o}\,.$$

Hiermit ist die Stabkraft O gefunden: Wir rechnen die Produkte $A \cdot a$, $P_1 \cdot p_1$ usw. aus, bilden die Summe $+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$ und dividieren diese Summe durch den Abstand r_o. Das Resultat ist dann die Spannkraft des Stabes O.

β) Zurückführung der obigen Formel auf bereits bekannte Ausdrücke.

Der Zähler des obigen Bruches ist die Summe der statischen Momente aller seitlich vom Schnitte befindlichen Kräfte in bezug auf den Punkt o. Mit dieser Summe haben wir aber bereits dauernd in der Biegungslehre zu tun gehabt (Band I, 7, 10 u. f. Vortrag). Man stelle sich nämlich einen vollwandigen Balken AB vor, der mit denselben Kräften P_1, P_2 usw. belastet ist wie das Fachwerk Fig. 13a. Wenn wir bei diesem Balken die Normalspannungen σ an der Stelle o berechnen sollten, müßten wir zunächst genau dieselbe Summe $+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$ bilden, wie sie soeben für die Spannkraft O aufgestellt ist (vgl. Band I, S. 193 u. f.). Der einzige Unterschied ist der, daß beim Balken diese Momentensumme M durch das Trägheitsmoment J bzw. Widerstandsmoment W dividiert werden muß, während sie jetzt durch den Abstand r_o zu dividieren ist.

Damals, in der Biegungslehre, haben wir diesen im Zähler auftretenden Summenausdruck $+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - \ldots$ „*Momentensumme*", „*Biegungsmoment*" oder auch kurz „*Moment*" der äußeren Kräfte in bezug auf den betreffenden Punkt o genannt und mit M_o bezeichnet. Dieselbe Bezeichnung wollen wir auch jetzt beibehalten, so daß die frühere Formel für O geschrieben wird:

$$\text{(Ib)} \qquad \boxed{O = -\frac{M_o}{r_o} = -\frac{\text{Biegungsmoment des Punktes } o}{\text{Abstand } r_o \text{ (von } o \text{ bis } O)}}.$$

Diese Formel für die Spannkraft des Stabes O läßt sich ebenso leicht merken wie die Formel $\sigma = \frac{M}{W}$ für die Spannung σ eines auf Biegung beanspruchten Balkens. In der Tat sind ja die Gurtstäbe eines Fachwerkes ungefähr dasselbe wie die äußersten Fasern beim vollwandigen Träger.

γ) Nutzen aus der Einführung von M.

Daß in der Formel für O unser alter Bekannter „M" wieder auftaucht, ist weiter gar nicht wunderbar; denn wir haben ja zur

Berechnung von O dieselbe Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ verwenden, wie bei der Berechnung der Spannungen σ eines gebogenen vollwandigen Balkens. Wohl aber ergibt sich aus diesem Wiedersehen mancher Vorteil. Die Momentensummen von Kräften sind nämlich für alle denkbaren Belastungsfälle bereits in der Biegungslehre untersucht und zu einfachen Formeln zusammengestellt (Band I, § 56—76). Dieselben Resultate können wir jetzt bei der Berechnung von O verwenden, da es sich ja um ein und denselben Ausdruck M handelt! Haben wir also z. B. einen Fachwerkträger, der eine gleichmäßig verteilte Last q trägt, so werden wir, um

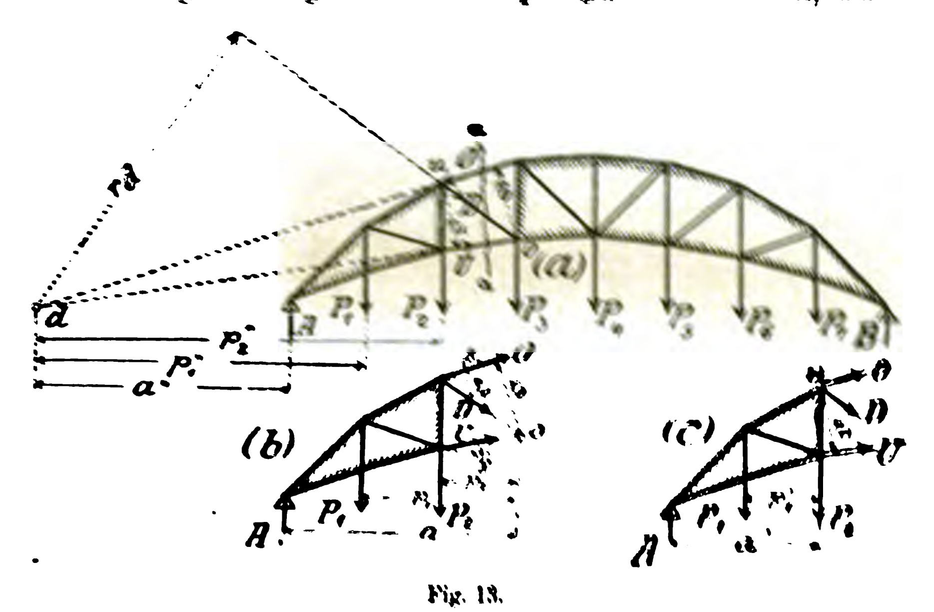


Fig. 13.

den Summenausdruck M für irgendeine Stelle zu berechnen, einfach mit der Formel arbeiten: $M = \frac{q}{2} x(l - x)$, s. Band I, § 60. Überhaupt kommt uns jetzt die Arbeit, die wir früher auf die Zusammenstellung und Untersuchung der Summenwerte M verwendet haben, wieder reichlich zugute.

Von den vielen Folgerungen, die sich aus der Bekanntschaft mit M ergeben, ist besonders eine wichtig: In § 60, Band I, ist bewiesen, daß bei einem Träger zwischen zwei Stützpunkten, ohne überkragende Enden, die Momentensummen für alle Schnitte positiv sind. [In der Summe $+ A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - \ldots$ ist also das Produkt $A \cdot a$ stets größer als die Produkte $P_1 \cdot p_1 \ldots$ zusammen.] In dem Ausdrucke für die Stabkraft O steht also im Zähler stets

eine positive Zahl. Da nun vor dem Bruchstrich ein Minuszeichen steht, so folgt, daß für O stets ein negatives Resultat herauskommt. Dieses bedeutet aber, daß die Kraft O nicht, wie in Fig. 13b zunächst eingeführt wurde, eine Zugkraft, sondern das Gegenteil, also eine Druckkraft, ist. Wir haben also aus dem, was früher über die Momentensumme M bewiesen ist, und aus der jetzt für O aufgestellten Formel den wichtigen Satz:

Bei einem Fachwerkträger ohne überkragende Enden ist bei vertikaler Belastung der Obergurt stets auf Druck beansprucht, vorausgesetzt, daß es sich, wie in Fig. 13, um ein einfaches Dreieckfachwerk handelt.

b) Berechnung eines Untergurtstabes U.

α) *Aufstellung einer Formel für U.*

Genau entsprechend ist die Berechnung eines Untergurtstabes U: Zunächst wird durch das Fachwerk der Schnitt α—α gelegt, der diesen Stab trifft, außerdem aber nur noch zwei andere Stäbe schneidet. Dann wird der eine Fachwerkteil seitlich von diesem Schnitte als selbständiger Körper hinsichtlich seines Gleichgewichtszustandes betrachtet (Fig. 13c). Die vorhandenen Kräfte sind A, P_1, P_2, U, D und O. U soll bestimmt werden; D und O wollen wir jetzt nicht haben. Damit nun diese beiden letzteren Kräfte aus der Momentengleichung herausfallen, wählen wir den Bezugspunkt für die Momente so, daß er sowohl auf D als auch auf O liegt; d. h. den Schnittpunkt dieser beiden Stäbe (Punkt u in Fig. 13c). Die zu bestimmende Kraft U wird zunächst, da sie ja noch unbekannt ist, als Zugkraft eingeführt. Dann lautet die Bestimmungsgleichung $\Sigma M_u = 0$:

$$\text{(II)} \qquad +A \cdot a' - P_1 \cdot p_1' - P_2 \cdot 0 - U \cdot r_u + D \cdot 0 + O \cdot 0 = 0 .$$

Hieraus folgt:

$$U \cdot r_u = +A \cdot a' - P_1 \cdot p_1' ,$$

$$\text{(IIa)} \qquad U = + \frac{+A \cdot a' - P_1 \cdot p_1'}{r_u} .$$

β) *Vereinfachung der Formel durch Einführung von M.*

Die Summe $+A \cdot a' - P_1 \cdot p_1'$ ist aber wieder nichts anderes, als das, was wir in der Biegungslehre als die „*Momentensumme*" oder das „*Moment*" eines Balkens AB für den Punkt u bezeichnet hatten. [Man stelle sich einen vollwandigen auf A und B gelagerten Balken vor, der genau so belastet ist wie der vorliegende Fachwerk-

träger. Die Momentensumme eines solchen Balkens an der Stelle u wäre genau der Ausdruck $M_u = +A \cdot a' - P_1 \cdot p_1'$.] Wir wollen diese Summe demgemäß als „Moment M_u" der Stelle u bezeichnen, so daß die Formel für die Stabkraft U lautet:

(IIb)
$$U = +\frac{M_u}{r_u} = +\frac{\text{Biegungsmoment am Punkte } u}{\text{Abstand } r_u}.$$

γ) Folgerungen aus der Formel für U.

Nachdem somit der Ausdruck für die Spannkraft U aufgestellt ist, werden wir uns natürlich wieder den Umstand zunutze machen, daß wir die Charaktereigenschaften des Summenwertes M bereits früher (in der Biegungslehre) gründlich untersucht haben. Z. B. den Satz, daß bei einem Balken, der sich nur zwischen zwei Stützpunkten erstreckt, für jede Stelle die Momentensumme $+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - \ldots$ eine positive Zahl ist. Da nämlich in der Formel vor dem Werte M ein Pluszeichen steht, so ist ersichtlich, daß aus der Formel für U stets ein *positives* Resultat herauskommen muß. Die Spannkraft U wirkt demnach so, wie sie von vornherein in die Rechnung eingeführt wurde (Fig. 13c), nämlich als *Zug*. Also:

Bei einem Dreieckfachwerk ohne überkragende Enden ist bei vertikaler Belastung der Untergurt stets auf Zug beansprucht.

c) Berechnung eines Füllungsstabes (Diagonale oder Vertikale).

α) Aufstellung einer Formel für D.

D sei jetzt der gesuchte Stab. Im übrigen gilt dasselbe Schema wie bei O und U: Der Schnitt α—α, der durch den gesuchten Stab D geht und außerdem nur noch zwei andere Stäbe trifft, ist bereits in Fig. 13a gezeichnet. Nun kommt es wieder darauf an, den Bezugspunkt für die Momente so zu wählen, daß die beiden anderen vom Schnitte getroffenen Stabkräfte O und U aus der Momentengleichung herausfallen. Diese Eigenschaft hat der Punkt d (Fig. 13a), der Schnittpunkt von O und U. In bezug auf d lautet die Momentengleichung (rechtsherum positiv eingeführt; D als Zug angenommen):

(III)
$$-A \cdot a'' + P_1 \cdot p_1'' + P_2 \cdot p_2'' + D \cdot r_d = 0.$$

Hieraus folgt:

(IIIa)
$$D = \frac{+A \cdot a'' - P_1 \cdot p_1'' - P_2 \cdot p_2''}{r_d}.$$

β) Bezeichnung des Zählerausdruckes als Moment M.

Im Zähler des obigen Bruches steht die Summe der statischen Momente aller seitlich vom Schnitte $\alpha-\alpha$ befindlichen Kräfte in bezug auf den außerhalb der Stützweite liegenden Punkt d. Wir wollen diesen Summenausdruck die Momentensumme des Schnittes $\alpha-\alpha$ in bezug auf den Punkt d nennen und mit M_d bezeichnen. Somit lautet die Formel für D:

(IIIb) $$D = \frac{M_d}{r_d} = \frac{\text{Momentensumme des Punktes } d}{\text{Abstand } r_d}.$$

γ) Das Moment M_d ist zu unterscheiden von den „Momenten" der Biegungslehre!

In der obigen Formel für D ist aber auf eins zu achten: Zwischen dem Summenausdrucke M_d und den vorhin gefundenen Ausdrücken M_o und M_u besteht ein gewisser Unterschied. Bei dem Werte M_o z. B. werden von allen Kräften, die seitlich (links oder rechts) von dem Punkte o sind, die statischen Momente in bezug auf diesen selben Punkt o genommen. Das gleiche ist bei dem Momente M_u der Fall oder überhaupt bei jeder Momentensumme, die in der Festigkeitslehre auftaucht. Immer ist der Bezugspunkt der Momente gleichzeitig die Trennungsstelle, die die Kräfte in eine linke und eine rechte Gruppe zerlegt, von denen dann die eine oder die andere betrachtet wird. Bei dem Summenausdrucke M_d dagegen ist es anders. Hier liegt der Bezugspunkt (Punkt d) vollständig getrennt von der Schnittstelle ($\alpha-\alpha$). Einen derartigen Fall — Momente der seitlich von einem Schnitte $\alpha-\alpha$ befindlichen Kräfte, aber in bezug auf einen Punkt, der irgendwo fern vom Schnitte zwischen anderen Kräften liegt — haben wir in der Festigkeitslehre noch nie behandelt, da er bisher nicht gebraucht wurde. Jetzt ist also in dem Ausdrucke $M_d = A \cdot a'' - P_1 \cdot p_1'' \ldots$ ein neuer Begriff aufgetaucht. Zur Unterscheidung wollen wir solche Momentensummen wie M_o und M_u als „Biegungsmomente" bezeichnen (da sie mit den in der Biegungslehre gebrauchten übereinstimmen); dagegen M_d schlechthin als „Momentensumme" (des Schnittes $\alpha-\alpha$ für den Punkt d).

Um M_d zu berechnen, kann man also nicht auf frühere Untersuchungen zurückgreifen. Man muß vielmehr die Summe

$V_v = \pm$ [illegible] ... [illegible], wie sie sich schon bei der Ableitung der Formel für D herausgebildet hat. Zunächst wird der Punkt d als Schnittpunkt von O und U bestimmt, dann werden die Abstände [illegible] usw. gemessen, die Produkte [illegible] usw. gebildet und schließlich der Ausdruck [illegible]

III. Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen haben wir durch Legung von Schnitten und geschickte Anwendung der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ folgende Formeln aufgestellt:

$$O = -\frac{M_o}{r_o}; \quad U = +\frac{M_u}{r_u}; \quad D = [\text{illegible}]\frac{M_d}{r_d}; \quad V = [\text{illegible}]\frac{M_v}{r_v}.$$

Die Formeln für O und U sind besonders praktisch, weil die Bezugspunkte o und u mit den Knotenpunkten des Fachwerks zusammenfallen und deshalb die Summenausdrücke M_o, M_u sehr bequem auszurechnen sind. (Genau so wie ein einfaches „Biegungsmoment M", das man für den betreffenden Knotenpunkt aufzustellen hätte.) Die Formeln für D und V sind weniger bequem, weil die Bezugspunkte d, v unregelmäßig liegen und deshalb die Ausrechnung der M-Werte mehr Arbeit macht. **Grundsätzlich können wir jetzt aber die Spannkräfte des betrachteten Dreieckfachwerks durch einfache Formeln direkt hinschreiben.**

Zur Einübung der Methode arbeite der Leser die erste Aufgabe von § 8 (mit Ausschluß von V_2) durch.

§ 7a.

Ergänzung zu § 7: Besondere Formeln für Diagonalen und Vertikalen.

Die Durcharbeitung einer Aufgabe nach *Ritter* zeigt, daß dieses Rechenverfahren bei den Gurtstäben sehr bequem, bei den Füllungsstäben recht unbequem ist (s. § 8, erste Aufgabe). Wir wollen deshalb für D und V noch andere Formeln aufstellen; namentlich, indem wir die bisher noch nicht gebrauchten Formen A und B der Gleichgewichtsbedingungen ebenfalls verwenden. Allerdings gelten diese neuen Formeln zunächst nur für **vertikale Lasten**. (Die Erweiterung für schräge Lasten s. § 8, siebente Aufgabe.)

Je nach der Form des Fachwerks empfehlen sich verschiedene Wege.

I. Für den Parallelträger (Fig. 14).

Beim Träger mit geradlinigen, parallelen Gurten, die rechtwinklig zu den äußeren Kräften verlaufen, ergibt sich für D und V folgender einfache Rechnungsgang. Wir legen den Schnitt α—α (Fig. 14a) und betrachten entweder den linken oder den rechten Teil. Auf den linken Teil z. B. wenden wir dann die Gleichgewichtsbedingung an: *Summe der Vertikalprojektionen aller*

Kräfte gleich Null. Dann erhalten wir die Gleichung (Fig. 14a und 14b):

$$+A - P_1 - P_2 - D \cdot \sin\varphi = 0.$$

[O und U geben, da sie horizontal verlaufen, keine Vertikalprojektion.]
Hieraus folgt:

$$(1a) \qquad D \cdot \sin\varphi = +(A - P_1 - P_2).$$

Der Klammerausdruck ist aber wieder ein alter Bekannter. Denken wir uns nämlich einen vollwandigen Balken $\overline{AB}$ und berechnen für die Stelle α—α dieses Balkens die „Kraftsumme" („Querkraft") Q, so erhalten wir:

$$Q = +A - P_1 - P_2;$$

also genau dasselbe wie die rechte Seite der obigen Formel (Band I, § 41, §§ 56—76). Wir werden also auch die Formel für D in der abgekürzten Weise schreiben:

$$D \cdot \sin\varphi = +Q,$$

$$(1b) \qquad \boxed{D = +\frac{Q}{\sin\varphi}}$$ [für linkssteigende Diagonalen].

Bei der Ableitung der obigen Formel ist eine *links*steigende Diagonale zugrunde gelegt. Ist die Diagonale *rechts*steigend, wie auf der rechten Seite (Fig. 14), so ergibt sich, wie man selber untersuchen möge, die Formel:

$$(1b) \qquad \boxed{D = -\frac{Q}{\sin\varphi}}$$ [für rechtssteigende Diagonalen].

In Fig. 14a und 14c ist noch der Fall gezeichnet, daß eine *Vertikale* bestimmt werden soll. Dann müssen wir einen Schnitt legen, der durch diesen Stab geht. Es ist dieses Schnitt β—β. Schreiben wir dann wieder die Gleichgewichtsbedingung an: *Summe der Vertikalprojektionen gleich Null,* so wird (Fig. 14c):

$$+A - P_1 - P_2 + V = 0,$$

$$(2a) \qquad V = -(A - P_1 - P_2).$$

Für den Summenausdruck $(A - P_1 - P_2)$ schreiben wir wieder abgekürzt „Kraftsumme Q des Schnittes β—β", so daß die Formel lautet:

$$(2b) \qquad \boxed{V = -Q}$$ [falls V zwischen zwei linkssteigenden Diagonalen liegt].

Bei dieser Formel ist eine Vertikale angenommen, die zwischen zwei linkssteigenden Diagonalen liegt. Liegt die Vertikale zwischen

zwei rechtssteigenden Diagonalen (Fig. 14a, rechte Seite), so liefert die entsprechend durchgeführte Ableitung das Resultat:

(2b) $\boxed{V = +Q}$ (falls V zwischen zwei rechtssteigenden Diagonalen liegt).

Liegt die Vertikale zwischen links- und rechtssteigenden Diagonalen (Fig. 14a, mittelste Vertikale), so wird sie zweckmäßig direkt aus dem Gleichgewicht eines ihrer Endknotenpunkte bestimmt. In Fig. 14a würde sich hiernach für die mittelste Vertikale die Spannkraft Null ergeben. Für alle übrigen Vertikalen gelten aber die obigen Formeln (2a).

In Worten sagen die Formeln (1b)—(2b) aus: *Beim Parallelträger sind die Füllungsstäbe gleich der Summe aller Kräfte seitlich*

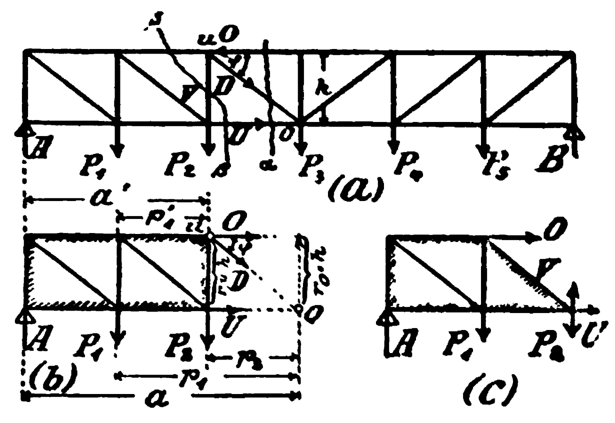


Fig. 14.

von dem maßgebenden Schnitte $\alpha-\alpha$, bzw. $\beta-\beta$, dividiert durch den Sinus des Neigungswinkels des betreffenden Stabes.

Dieses Resultat ist ja auch ohne weiteres einleuchtend: Die Stabkräfte haben die Aufgabe, den äußeren Kräften das Gleichgewicht zu halten. Wenn also die äußeren Kräfte mit einem bestimmten Betrage $Q = A - P_1 - \ldots$ z. B. nach oben schieben, muß die Diagonale bzw. Vertikale mit demselben Betrage nach unten schieben. [Die Gurtstäbe wirken in vertikaler Richtung überhaupt nicht, da sie horizontal verlaufen.] Daher entstehen die obigen Gleichungen.

Zusammenstellung der Formeln von Absatz I:

(1) $D = +\dfrac{Q}{\sin\varphi}$, bzw. $= -\dfrac{Q}{\sin\varphi}$,

(2) $V = -Q$, bzw. $= +Q$.

Beispiele zu Absatz I s. § 8, vierte und fünfte Aufgabe.

II. Für den Träger mit gekrümmter Gurtung.

1. Berechnung der Diagonalen. (Fig. 15.)

Zur Bestimmung einer Diagonale D benutzt man in diesem Falle zweckmäßig die Gleichgewichtsbedingung: *Summe aller Horizontalprojektionen gleich Null.* Dann fallen die äußeren Kräfte aus der betreffenden Gleichung heraus, da sie vertikal verlaufen, und wir erhalten D ausgedrückt nur durch O und U:

$$+O \cdot \cos\beta + D \cdot \cos\varphi + U \cdot \cos\gamma = 0,$$

$$D \cdot \cos\varphi = -O \cdot \cos\beta - U \cdot \cos\gamma,$$

$$\text{(3a)} \qquad D = \frac{1}{\cos\varphi}[-O \cdot \cos\beta - U \cdot \cos\gamma].$$

[β, φ und γ sind die Neigungswinkel der Stäbe O, D und U. O ist zunächst als Zug eingeführt; dafür setzen wir nachher für O das Minuszeichen ein.] In Worten sagt diese Gleichung aus: *Die Horizontalprojektion der Diagonale muß zum Zwecke des Gleichgewichtes entgegengesetzt gleich sein der Summe der Horizontalprojektionen von Ober- und Untergurt.*

Diese Horizontalprojektionen $O \cdot \cos\beta$ des Obergurtes und $U \cdot \cos\gamma$ des Untergurtes lassen sich aber sehr leicht direkt aus den Momenten bestimmen. Ziehen wir nämlich in Fig. 15a die vertikalen Linien oo' und uu', und nennen diese h_o und h_u, so ist der Winkel zwischen r_o und h_o gleich $\sphericalangle\beta$ (da die Schenkel dieser beiden Winkel senkrecht zueinander stehen), und der Winkel zwischen r_u und h_u ist gleich $\sphericalangle\gamma$. Folglich ist

$$r_o = h_o \cdot \cos\beta, \quad r_u = h_u \cdot \cos\gamma.$$

Setzen wir diese Werte in die ursprünglich für O und U aufgestellten Formeln

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M_o}{r_o}, \\[2ex] U = +\dfrac{M_u}{r_u} \end{cases}$$

ein, so gehen diese über in

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M_o}{h_o \cdot \cos\beta}, \\[2ex] U = +\dfrac{M_u}{h_u \cdot \cos\gamma}. \end{cases}$$

Somit haben wir zunächst die Spannkraft O durch das Biegungsmoment des gegenüberliegenden Punktes o, die vertikale Träger-

höhe h_o an dieser Stelle und dem Neigungswinkel β des Stabes ausgedrückt. Entsprechend U. Aus den Formeln 7a folgt sofort:

$$\text{(1b)} \qquad \left|\begin{array}{l} O \cdot \cos\beta = -\dfrac{M_o}{h_o}, \\[2ex] U \cdot \cos\gamma = -\dfrac{M_u}{h_u}. \end{array}\right| \quad \text{Horizontalprojektionen der Stabkräfte } O \text{ und } U.$$

Hiermit haben wir auch die Horizontalprojektionen $O \cdot \cos\beta$ und $U \cdot \cos\gamma$ der Stabkräfte O und U bestimmt. Diese Werte setzen

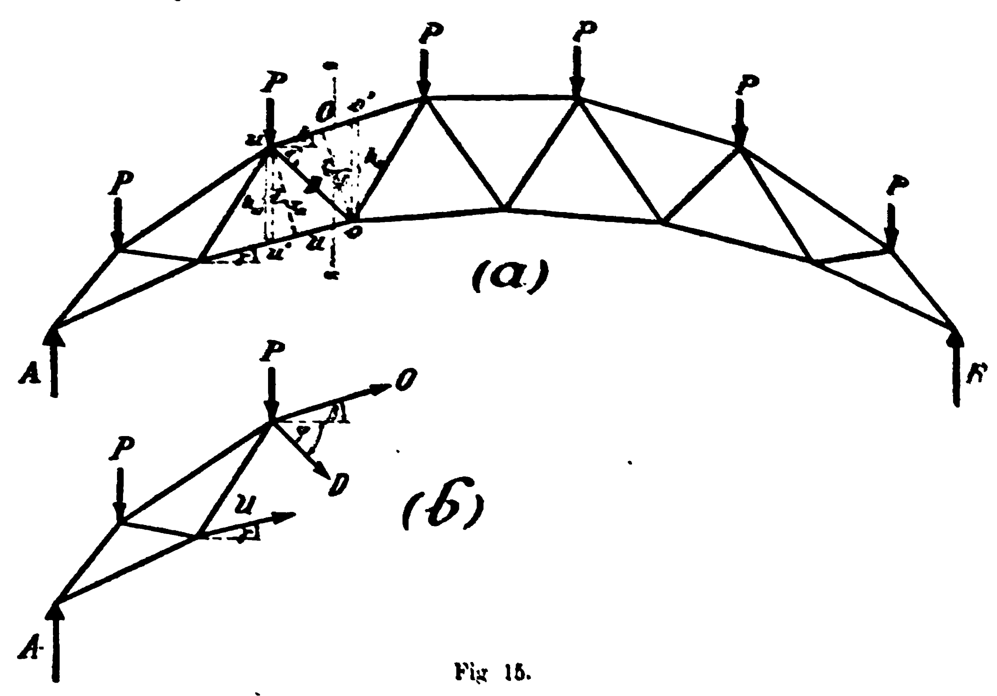


Fig. 15.

wir nun in die vorhin für D aufgestellte Formel (3a) ein und erhalten:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[-\left(-\frac{M_o}{h_o}\right) - \frac{M_u}{h_u}\right],$$

$$\text{(3b)} \qquad \boxed{D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right].}$$

Die Spannkraft D einer Diagonalen ist gleich der Momentensumme an ihrem Fußpunkte dividiert durch die vertikale Trägerhöhe an dieser Stelle, vermindert um das Moment an ihrem oberen Endpunkte dividiert durch die Höhe an dieser Stelle, das Ganze dividiert durch den Cosinus des Neigungswinkels der Diagonale.

2. Berechnung der Vertikalen. (Fig. 16, 16′.)

Bei den Vertikalen müssen wir unterscheiden:

a) Zwischenvertikalen (Fig. 16a, 16′),

b) Hauptvertikalen (Fig. 16b, 16″a und b).

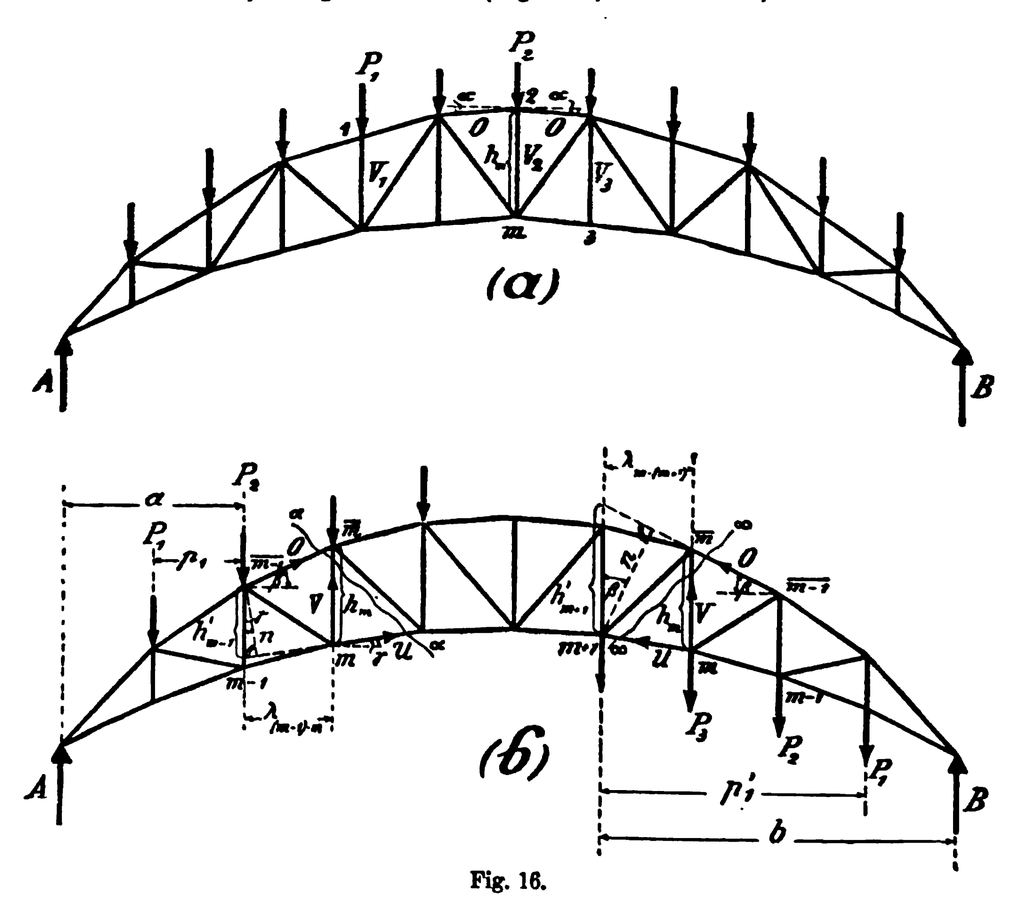


Fig. 16.

a) Berechnung der Zwischenvertikalen. (Fig. 16a, 16′.)

Eine Zwischenvertikale wird zweckmäßig aus dem Gleichgewicht eines ihrer beiden Endknotenpunkte bestimmt (Methode I und II, § 3—6). Denn ein Schnitt, der außer der Vertikale nur noch zwei andere Stäbe treffen soll, führt von selber rund um den Knotenpunkt herum (Fig. 16′). Natürlich sucht man sich denjenigen Knotenpunkt der betreffenden Vertikale heraus, an dem am wenigsten Kräfte zu berücksichtigen sind.

Beispielsweise ergibt sich für Fig. 16a (nach den in § 4, zweite Aufgabe, und in § 6, fünfte Aufgabe entwickelten Sätzen):

Stabkraft $V_1 = -P_1$ [illegible]

$V_3 = $ [illegible]

Stab V_2 folgt aus Punkt 2 (O und V zunächst als Zug eingeführt) [illegible]

$$P_2 - V_2 - O\sin\alpha - O\sin\alpha - [illegible] = 0$$

$$V_2 = -P_2 - 2O\cdot\sin\alpha.$$

Statt diese Formel direkt zu verwenden, kann man noch $O\cdot\sin\alpha$ durch das Moment M_m ausdrücken:

$$O = -\frac{M_m}{h_m\cdot\cos\alpha}, \quad \text{also} \quad O\cdot\sin\alpha = -\frac{M_m\cdot\sin\alpha}{h_m\cos\alpha} = -\frac{M_m}{h_m}\operatorname{tg}\alpha,$$

so daß die Formel für V_2 übergeht in:

$$V_2 = -P_2 + 2\frac{M_m}{h_m}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ein anderes Beispiel für die Berechnung von Zwischenvertikalen bietet Fig. 16'. Hier kann man direkt ablesen:

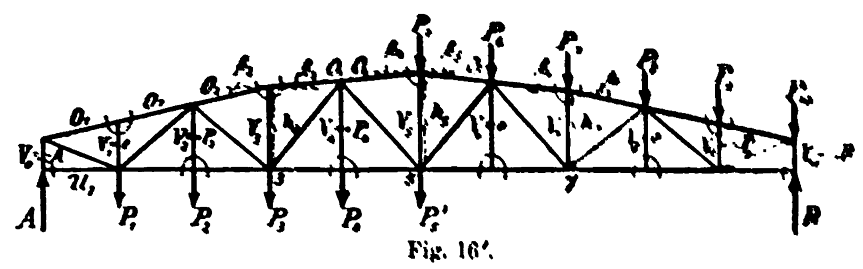


Fig. 16'.

$$V_0 = -A;\quad V_1 = 0;\quad V_2 = +P_2;\quad V_4 = +P_4;\quad V_6 = 0;\quad \text{usw.}$$

Für V_3 liefert die Gleichgewichtsbedingung (V_3, O_3 und O_4 zunächst als Zugkräfte eingeführt):

$$V_3 + O_3\cdot\sin\beta_3 - O_4\cdot\sin\beta_4 = 0,$$
$$V_3 = -O_3\cdot\sin\beta_3 + O_4\cdot\sin\beta_4.$$

(Da O_3 und O_4 in Wirklichkeit Druckkräfte sind, müssen sie nachher bei der Ausrechnung in die obige Formel als **negative** Zahlen eingesetzt werden.) Statt dessen kann man noch umformen:

$$O_3 = -\frac{M_3}{h_3\cdot\cos\beta_3}, \quad \text{also} \quad O_3\cdot\sin\beta_3 = -\frac{M_3\cdot\sin\beta_3}{h_3\cos\beta_3} = -\frac{M_3}{h_3}\operatorname{tg}\beta_3,$$

entsprechend
$$O_4\cdot\sin\beta_4 = -\frac{M_3}{h_3}\operatorname{tg}\beta_4;$$

mithin
$$V_3 = +\frac{M_3}{h_3}\operatorname{tg}\beta_3 - \frac{M_3}{h_3}\operatorname{tg}\beta_4 = \frac{M_3}{h_3}(\operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_4).$$

Hiermit ist V_3 aus M_3, h_3 und den Neigungswinkeln der Gurtstäbe bestimmt.

Genau entsprechend lassen sich V_5 und V_7 ausdrücken:

$$V_5 = -P_5 + \frac{M_5}{h_5}(\operatorname{tg}\beta_4 + \operatorname{tg}\beta_5),$$

$$V_7 = P_7 + \frac{M_7}{h_7}(-\operatorname{tg}\beta_6 + \operatorname{tg}\beta_7).$$

Hiermit sind die Zwischenvertikalen erledigt. Die allgemeine Formel (mit Berücksichtigung der verschiedenen Gurtneigungen) s. in der Zusammenstellung § 7b, Abs. I.

b) Berechnung der Hauptvertikalen. (Fig. 16b, 16″a und b.)

Die Berechnung der Hauptvertikalen bei einem Träger mit gebogener Gurtung ist etwas umständlicher. Wir wollen hierbei drei verschiedene Wege verfolgen:

α) durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$,

β) „ „ „ „ $R_y = 0$,

γ) aus dem Gleichgewicht einzelner Knotenpunkte.

Die letzte Methode ist jedoch nur für den Spezialfall abgeleitet und anwendbar, daß bei dem betreffenden Fachwerk nur eine Gurtung gekrümmt ist, während die andere horizontal verläuft.

α) Mittels $\Sigma M = 0$. Um hiernach die Vertikale V in Fig. 16b, linke Seite, zu bestimmen, legen wir den Schnitt $\alpha - \alpha$ und stellen am linken Teile die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ in bezug auf den Punkt $\overline{m-1}$ auf. Diese lautet (Fig. 16b, linke Seite):

$$A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - V \cdot \lambda_{(m-1)-m} - U \cdot n = 0\,.$$

[$\lambda_{(m-1)-m}$ soll die Feldweite vom Knoten $m-1$ bis zum Knoten m bezeichnen und ist gleichzeitig das Lot vom Bezugspunkte $\overline{m-1}$ auf die Kraft V; n ist das entsprechende Lot auf die Kraft U bzw. deren Verlängerung.]

Hieraus folgt:

$$V = \frac{1}{\lambda_{(m-1)-m}}\left[(A \cdot a - P_1 \cdot p_1) - U \cdot n\right]. \tag{4a}$$

Diese Formel läßt sich nun weiter vereinfachen: Der Ausdruck $A \cdot a - P_1 \cdot p_1$ bedeutet die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die seitlich vom Punkte $m-1$ sind, in bezug auf diesen Punkt. Er ist also das gewöhnliche „Biegungsmoment M_{m-1} des Punktes $m-1$“ (oder auch des Punktes $\overline{m-1}$; beide Momentensummen sind einander gleich, da die Punkte vertikal übereinander liegen). Für die Kraft U setzen wir nach der kürzlich entwickelten Formel:

$$U = +\frac{M_{\overline{m}}}{h_m \cdot \cos\gamma} = +\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\gamma}\,.$$

[Das Moment für den Punkt $\overline{m}$ ist gleich dem Moment des darunterliegenden Punktes m. Es ist also gleichgültig, ob wir $M_{\overline{m}}$ oder M_m schreiben.] Schließlich drücken wir noch n aus:

$$n = h'_{m-1} \cdot \cos\gamma\,,$$

worin h'_{m-1} die Strecke bedeutet, die die Verlängerung von U auf der durch $\overline{m-1}$ gehenden Vertikalen abschneidet. [Der Winkel

zwischen n und h'_{m-1} ist gleich dem Winkel γ des Stabes U.]
Dann geht die Formel (4a) über in:

$$V = \frac{1}{\lambda_{(m-1)-m}}\left[M_{m-1} - \frac{M_m}{h_m \cdot \cos\gamma} \cdot h'_{m-1}\cos\gamma\right],$$

$$\boxed{V = \frac{1}{\lambda_{(m-1)-m}}\left[M_{m-1} - \frac{M_m}{h_m} \cdot h'_{m-1}\right].} \tag{4b}$$

Lasten am Obergurt.

Somit ist auch V durch die Biegungsmomente M_m und M_{m-1} des einfachen Balkens und einige Hilfsgrößen ausgedrückt.

Die obige Formel gilt aber nur dann, wenn sich im Punkte m der unteren Gurtung keine Last befindet. Wäre hier nämlich etwa eine Last P_m, so würde das statische Moment dieser Last in Gleichung (4a) noch hinzukommen, so daß diese lauten würde:

$$V = \frac{1}{\lambda_{(m-1)-m}}[(A \cdot a - P_1 \cdot p_1 + P_m \cdot \lambda_{(m-1)-m}) - U \cdot n].$$

An und für sich kann man ja diese Formel ebenso ausrechnen, wie die Formel (4a). Nur vereinfachen kann man sie nicht. Denn der Summenausdruck $A \cdot a - P_1 \cdot p_1 + P_m \cdot \lambda_{(m-1)-m}$ ist weder das, was wir als „Biegungsmoment" des Punktes $\overline{m-1}$, noch irgendeines anderen Punktes, definiert haben. Diese Summe ist vielmehr ein neuer Begriff, der jedesmal neu ausgerechnet werden müßte (vgl. die ähnliche Bemerkung in Absatz II, c, γ von § 7).

Um nun aber die Formel für V stets so zu haben, daß nur die regulären, aus der Biegungslehre bekannten „Biegungsmomente" der einzelnen Knotenpunkte auftreten, führt man, falls die Lasten am *Untergurt* angreifen, die Untersuchung etwas anders durch. Man verlängert dann nämlich nicht den Untergurt, sondern den Obergurt (Fig. 16b, rechte Seite) und stellt die Momentengleichung für den Punkt $m+1$ auf. Bei Betrachtung des rechten Teiles, als des einfacheren in Fig. 16b, lautet dann die Gleichung (am rechten Teile haben wir beim Aufstellen von Momentensummen „linksherum" positiv genommen, s. Band I, § 56 Schluß):

$$B \cdot b - P_1 \cdot p'_1 - \ldots + V \cdot \lambda_{m-(m+1)} + O \cdot n = 0,$$

$$V = \frac{1}{\lambda_{m-(m+1)}}[-O \cdot n - (B \cdot b - P_1 \cdot p'_1 - \ldots)]. \tag{4a'}$$

Setzen wir nun, wie früher, für O, n usw. ihre Werte ein (Fig. 16b, rechte Seite):

$$O = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta},$$

$$n = h'_{m+1} \cdot \cos\beta,$$

$$B \cdot b - P_1 \cdot p'_1 - \ldots = M_{m+1}, \quad \text{[Biegungsmoment von } m+1]$$

so folgt für V der Ausdruck:

$$V = \frac{1}{\lambda_{m-(m+1)}}\left[\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta} \cdot h'_{m+1}\cos\beta - M_{m+1}\right],$$

(4b') $$\boxed{V = \frac{1}{\lambda_{m-(m+1)}}\left[\frac{M_m}{h_m} h'_{m+1} - M_{m+1}\right]}$$ Lasten am Untergurt.

β) **Mittels $R_y = 0$.** Da die obigen Formeln nicht gerade bequem sind, wollen wir noch eine andere Formel für V aufstellen, indem wir z. B. für den Schnitt α—α die Gleichung $R_y = 0$ anschreiben. Dann ergibt sich:

$$A - P_1 - P_2 + V + O\sin\beta + U\sin\gamma = 0$$

und hieraus nach einigen einfachen Umformungen:

(4c) $$V = -Q + \frac{M_m}{h_m}(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\gamma).$$

[Es ist $A - P_1 - P_2$ gleich der „Kraftsumme" Q eines einfachen Balkens für den Schnitt α—α. Ferner ist $O\sin\beta = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos\beta} \cdot \sin\beta = -\frac{M_m}{h_m} \cdot \mathrm{tg}\beta$.]

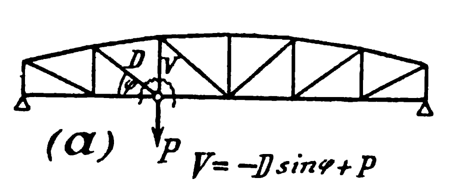
γ) **Spezialfall:** Fachwerk mit nur einer gekrümmten Gurtung; die andere Gurtung verläuft horizontal (Fig. 16"). In diesem Falle läßt sich eine Hauptvertikale einfacher dadurch berechnen, daß man das Gleichgewicht eines ihrer beiden Endknotenpunkte betrachtet. Und zwar desjenigen Knotenpunktes, der in der geraden Gurtung liegt. (Dann fallen nämlich bei $R_y = 0$ die beiden anschließenden Gurtstäbe fort.)

Hiernach ergibt sich z. B. für Fig. 16"a (D und V zunächst als Zug eingeführt):

$$D\sin\varphi + V - P = 0,$$

(5) $$V = -D\sin\varphi + P.$$

Entsprechend ist V in Fig. 16"b zu finden.



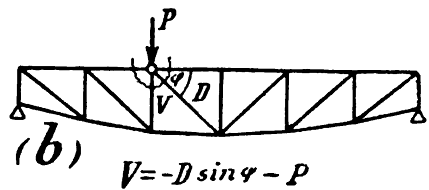


Fig. 16".

Zusammenstellung der Formeln von Absatz II:

Diagonalen: (3) $$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right].$$

Zwischenvertikalen: Aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte.

Hauptvertikalen: Im allgemeinen

(4) $$V = \frac{1}{\lambda}\left[M - \frac{M}{h} \cdot h'\right] \quad \text{oder} \quad V = -Q + \frac{M}{h}(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\gamma);$$

für Spezialfall Fig. 16" $$V = -D\sin\varphi \pm P.$$

§ 7b.

Zusammenstellung der Formeln von § 7 und § 7a. Weitere Betrachtungen. Benennungen.

In diesem Paragraphen sollen die vorhin abgeleiteten Formeln noch einmal zusammengestellt und einige weitergehende Betrachtungen, die das Verständnis der Formeln erleichtern können, daran geknüpft werden.

I. Zusammenstellung der Formeln.

1. Für die Gurtstäbe.

Es ist (Fig. 17):

$$\text{(I)} \qquad \boxed{O = -\frac{M_o}{r_o}, \quad U = +\frac{M_u}{r_u}.}$$

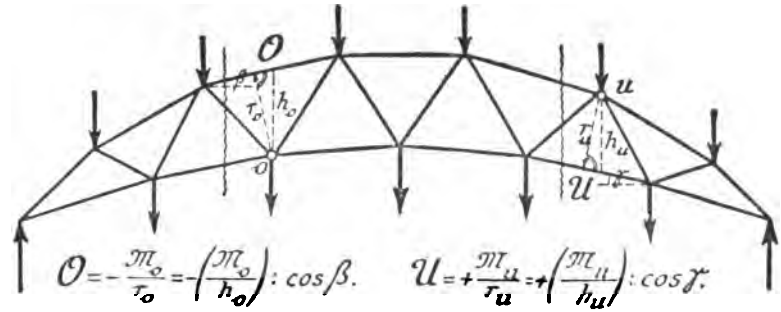


Fig. 17.

Hierin ist o der dem Stabe O gegenüberliegende Knotenpunkt; M_o das Biegungsmoment in bezug auf den Punkt o; r_o das Lot von o auf den Stab O. Entsprechend bei U. Häufig werden wir bei der Berechnung der Gurtstäbe auch so vorgehen, daß wir statt der Lote r die vertikalen Höhen h des Fachwerkes einführen, da diese Längen bequemer aus der Systemfigur zu entnehmen sind. Dann berechnen wir nicht direkt die Gurtkräfte O und U, sondern zunächst deren Horizontalprojektionen (Horizontalkomponenten) $O \cdot \cos\beta$ und $U \cdot \cos\gamma$. Für diese lauten die Formeln:

$$O \cdot \cos\beta = -\frac{M_o}{h_o},$$

$$U \cdot \cos\gamma = +\frac{M_u}{h_u}.$$

[β und γ sind die Neigungswinkel der Stäbe O und U, h_o und h_u sind die vertikalen Höhen des Fachwerkes an den Stellen o und u.] Sobald dann diese Horizontalprojektionen berechnet sind, ergeben sich die Stabkräfte selber durch Division mit $\cos\beta$ bzw. $\cos\gamma$:

$$\text{(Ia)} \qquad \boxed{\begin{aligned} O &= -\left(\frac{M_o}{h_o}\right) : \cos\beta, \\ U &= +\left(\frac{M_u}{h_u}\right) : \cos\gamma. \end{aligned}}$$

Spezialfall: Parallelträger. Hierfür ist (s. Fig. 14)

$$r_o = r_u = h \text{ (Trägerhöhe),}$$

Folglich gehen die Formeln für O und U über in:

$$\text{(Ic)} \qquad O = -\frac{M_o}{h}; \qquad U = +\frac{M_u}{h}.$$

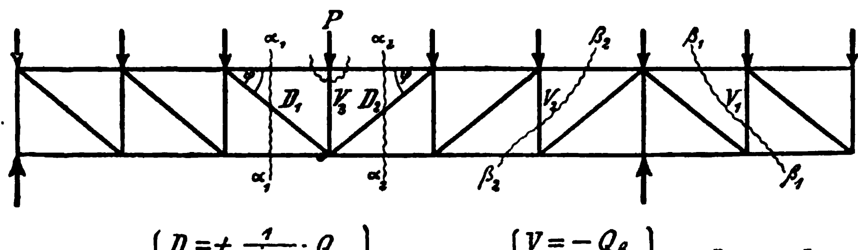
2. Für die Füllungsstäbe.

a) Für den Parallelträger.

Wir berechnen zunächst die Summe (Querkraft) Q aller Kräfte, die seitlich von dem zu D bzw. V gehörigen Schnitte liegen. (Hierbei ist zu beachten, daß zu zwei aneinanderstoßenden Stäben D und V verschiedene Schnitte gehören; vgl. Fig. 14.) Dann ist (Fig. 18):

$$\text{(II)} \qquad \boxed{D = \pm\frac{1}{\sin\varphi}Q}$$ [+ bei linkssteigender Diagonale, — „ rechtssteigender „],

$$\text{(III)} \qquad \boxed{V = \mp Q}$$ [—, falls V zwischen zwei linkssteigenden Diagonalen, +, „ „ „ „ rechtssteigenden „].



$$\left\{\begin{aligned} D_1 &= +\frac{1}{\sin\varphi}\cdot Q_{\alpha_1} \\ D_2 &= -\frac{1}{\sin\varphi}\cdot Q_{\alpha_2} \end{aligned}\right\} \qquad \left\{\begin{aligned} V_1 &= -Q_{\beta_1} \\ V_2 &= +Q_{\beta_2} \end{aligned}\right\} \qquad [V_3 = -P]$$

Fig. 18.

In diesen Formeln bedeutet Q die Kraftsumme von der ersten Kraft an bis zu dem Schnitte α—α bzw. β—β, der zu der untersuchten Diagonale D bzw. Vertikale V gehört.

Ausnahme (Zwischenvertikalen): Für die *Zwischenvertikalen (Hilfsvertikalen)* — die mit den Diagonalen nicht einen fortlaufenden Linienzug bilden — gilt die obige Formel für V nicht. Denn bei diesen Stäben führt der betreffende Schnitt, der außer dem gesuchten Stabe nur noch zwei andere Stäbe trifft, rund um einen Knotenpunkt herum. (Er zerlegt also das Fachwerk gar nicht in einen linken und rechten Teil.) Deshalb wird eine Hilfsvertikale auch direkt aus dem Gleichgewicht eines ihrer Endknotenpunkte bestimmt (Methode I oder II, § 3—6). So ergibt sich z. B. für Vertikale V_3 von Fig. 18 direkt:

$$V_3 = -P.$$

b) Für den Träger mit gebogener Gurtung.

α) **Diagonalen.** Die Formel zur Berechnung von D lautet:

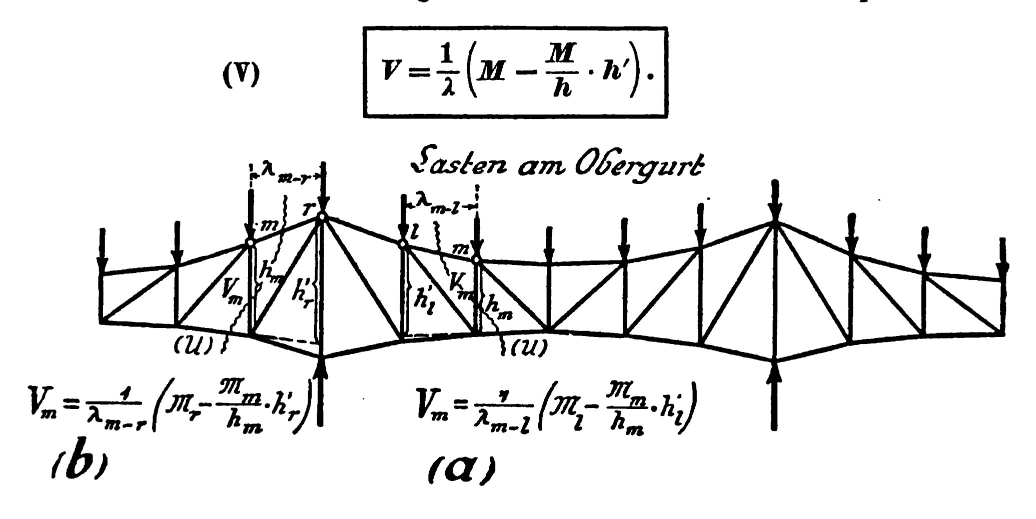
$$\text{(IV)} \qquad \boxed{D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right).}$$

Fig. 19.

Hierin ist φ der Neigungswinkel der Diagonale gegen die Horizontalrichtung. Um in die Klammer die richtigen Momente einzusetzen, denke man sich stets den zu der Diagonale gehörigen Schnitt gelegt. Dann steht im ersten Gliede das Moment desjenigen Punktes, der dem vom Schnitte getroffenen *Obergurt*stab gegenüberliegt; und an zweiter Stelle steht das Moment des dem *Untergurt*stabe gegenüberliegenden Knotenpunktes. Die Momente M_o und M_u sind natürlich mit ihren Vorzeichen einzusetzen. Die Höhen h_o und h_u sind einfache Längen ohne Vorzeichen. Beim Ausrechnen der Klammer ergibt sich dann von selber, ob die Stabkraft D positiv (Zug) oder negativ (Druck) ist.

β) **Hauptvertikalen.** Für die (Haupt-)Vertikalen haben wir drei verschiedene Formeln abgeleitet. Die erste lautet im Prinzip:

$$V = \frac{1}{\lambda}\left(M - \frac{M}{h} \cdot h'\right). \tag{V}$$



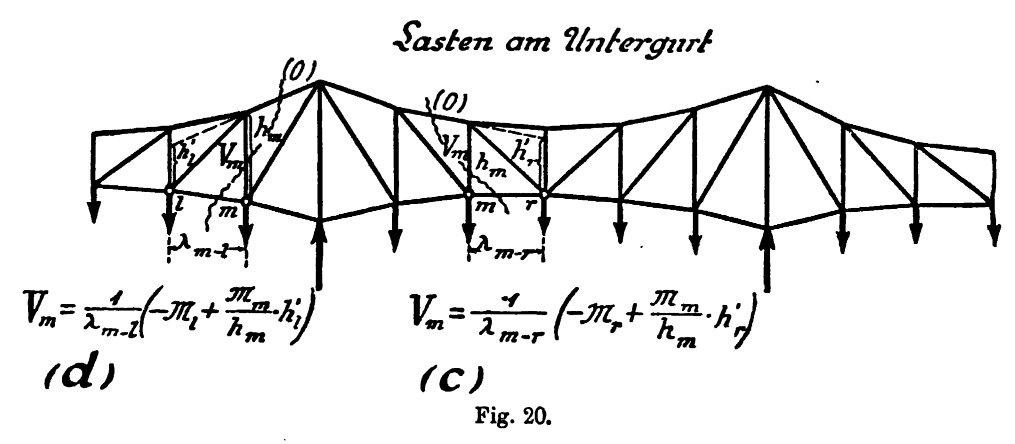


Fig. 20.

Bei Anwendung muß jedoch unterschieden werden, ob die Belastung am Obergurt oder am Untergurt angreift. Ferner ändert sich die Formel etwas, je nachdem die betreffende Vertikale V zwischen zwei linkssteigenden oder zwischen rechtssteigenden Diagonalen liegt. In Fig. 20 sind für alle vier Fälle die Formeln für V eingeschrieben:

Belastung oben { V zwischen linkssteigenden Diagonalen,
V „ rechtssteigenden „

Belastung unten { V zwischen linkssteigenden Diagonalen,
V „ rechtssteigenden „

Abgeleitet sind diese Formeln in Abschnitt II des vorigen Paragraphen nur für den 1. und 4. Fall (vgl. Fig. 16). Für die beiden anderen Fälle sind sie natürlich entsprechend zu entwickeln. (Die Bezeichnungen sind jetzt etwas anders gewählt als vorhin).

Die Bedeutung der vorkommenden Größen behält man am besten, wenn man sich die Entstehung der Formeln vergegenwärtigt: Zunächst wird der Schnitt gelegt, der außer der zu untersuchenden Vertikale nur noch zwei andere Stäbe, einen Ober- und einen Untergurtstab, trifft. Dieser Schnitt durchbricht die belastete Gurtung zwischen dem Knoten m (an der betreffenden Vertikale selbst) und einem Knoten l (links) bzw. r (rechts) von der Vertikale. Für diesen Punkt l bzw. r wird nun die Momentengleichung aufgestellt. Deshalb kommt vor der Klammer zunächst der Abstand der Vertikale von dem Punkte l bzw. r vor. In der Klammer steht zuerst das Biegungsmoment für den Punkt l bzw. r. Dann das Moment M_m am Punkte m selbst, die vertikale Trägerhöhe h_m an dieser Stelle und ein Hilfswert h_l' bzw. h_r'. Letzterer wird erhalten, indem man den von dem Schnitte getroffenen unbelasteten Gurtstab nach der Richtung von l bzw. r verlängert bis zum Schnitte mit der Vertikalen bei l bzw. r. Dann ist h_l' bzw. h_r der Abstand dieses Schnittpunktes bis zum Punkte l bzw. r. (Die Formeln entstammen den Vorlesungen von Professor *Müller-Breslau.*)

Die zweite Formel für eine Hauptvertikale V_m lautet:

$$(\text{V a})\quad \begin{cases} V_m = -Q + \dfrac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma), & \text{falls } V \text{ zwischen linkssteigenden Diagonalen,} \\ V_m = +Q + \dfrac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma), & \text{„ } V \text{ „ rechtssteigenden „} \end{cases}$$

Diese Formel ist dadurch entstanden, daß wir den zu der Vertikalen gehörenden Schnitt legten und auf den abgetrennten Teil die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Vertikalprojektionen gleich Null" anwendeten. Aus dieser Entstehung folgt die Bedeutung der einzelnen Glieder: Q ist die Kraftsumme von der äußersten Kraft bis zum Schnitte. M_m und h_m sind Moment und vertikale Fachwerkhöhe an der Stelle der Vertikale. β und γ sind die Neigungswinkel des außerdem noch vom Schnitte getroffenen Ober- und Untergurtstabes, und zwar müssen diese Winel *positiv* oder negativ eingeführt werden, je nachdem der betreffende Gurtstab von links nach rechts *steigt* oder fällt. Natürlich müssen Q und M ebenfalls mit ihren Vorzeichen eingesetzt werden.

Als dritte Formel für eine Hauptvertikale ist folgende zu merken, die aber nur dann gilt, wenn wenigstens **eine Gurtung des Fachwerkes geradlinig**, und zwar rechtwinklig zu der Vertikale verläuft. Dann ergibt sich aus dem Gleichgewicht des Punktes, in dem V und die geradlinige Gurtung zusammenlaufen, für V der Ausdruck:

$$\text{(Vb)} \qquad \boxed{V = -D\sin\varphi \pm P.}$$

(a) $V = -D\sin\varphi + P$ (b) $V = -D\sin\varphi - P$

Fig. 21.

Hierin ist D die Diagonale, die an der geradlinigen Gurtung mit V zusammenkommt; φ ist ihr Neigungswinkel. P ist die Knotenpunktslast in dem betrachteten Knotenpunkte. Das Pluszeichen ist zu nehmen, wenn die (abwärts gerichtete) Last am Untergurt angreift; das Minuszeichen, wenn P am Obergurt angreift. Auch für D ist die Spannkraft natürlich mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens einzusetzen.

In der obigen Formel für Fig. 21 ist vorausgesetzt, daß zunächst die Diagonalen berechnet sind und dann erst zu den Vertikalen übergegangen wird. Man kann jedoch die V-Kräfte auch direkt durch die Momente ausdrücken, indem man für D noch seinen Wert einsetzt:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right].$$

Dann geht die obige Formel über in:

$$V = -\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right]\cdot\sin\varphi \pm P,$$

$$\text{(Vc)} \qquad \boxed{V = -\operatorname{tg}\varphi\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right] \pm P.}$$

Für die Hauptvertikalen haben wir somit die drei verschiedenen Formeln V, Va und Vb, c. Für den ständigen Gebrauch braucht man sich aber nur Formel Vb, c zu merken, da die in der Praxis vorkommenden Fachwerke (sofern sie nicht Parallelträger sind) fast stets nach dem Schema der Fig. 21 gebaut sind: ein Gurt geradlinig, der andere gekrümmt. Systeme mit beiderseitig gekrümmter Gurtung kommen seltener vor.

γ) **Zwischenvertikalen.** Die Zwischenvertikalen haben wir aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte bestimmt. Aus den durchgearbeiteten Beispielen Fig. 16a und 16′ (§ 7a, Absatz II) und aus Fig. 22 findet man leicht folgende allgemeine Regel zur Berechnung von Zwischenvertikalen: Stoßen in einem Knotenpunkte x die Vertikale V, die vertikal abwärts gerichtete Last P und zwei Gurtstäbe zusammen, so ist (Fig. 22):

(VI)
$$V = -P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\beta_l + \operatorname{tg}\beta_r), \quad \text{falls Punkt } x \text{ im Obergurt,}$$
$$V = +P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\gamma_l + \operatorname{tg}\gamma_r), \quad \text{„ „ „ „ Untergurt.}$$

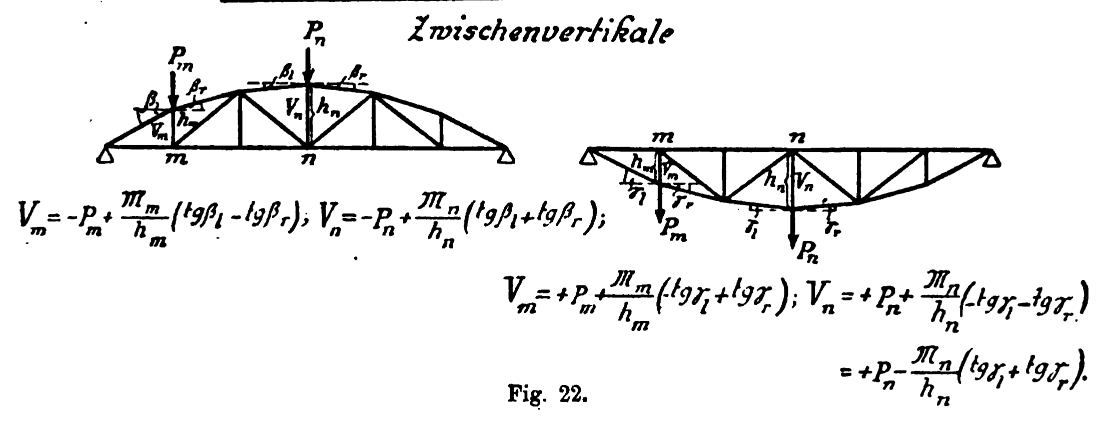


Fig. 22.

Hierin ist P die betreffende Knotenpunktslast. M und h sind Biegungsmoment und vertikale Fachwerkhöhe an der Stelle der Vertikale. β_l und β_r bzw. γ_l und γ_r sind die Neigungswinkel des anstoßenden linken und rechten Gurtstabes gegen die Horizontalrichtung, und zwar müssen diese Winkel *positiv* oder negativ eingesetzt werden, je nachdem sie *unterhalb* oder oberhalb der Horizontalen liegen.

Spezialfall: Gehen an dem betreffenden Knotenpunkte die Gurtstäbe geradlinig durch, so ist in die obigen Formeln

$$\beta_l = -\beta_r, \quad \text{bzw.} \quad \gamma_l = -\gamma_r$$

einzusetzen.. (Der eine von de nbeiden Winkeln liegt dann unter, der andere über der Horizontalen, oder es sind beide gleich Null.) Dann folgt:

$$\text{(VIa)} \qquad V = \mp P,$$

worin P die Last ist, die sich an dem betrachteten Knotenpunkte befindet. Diese Formel ergibt sich ja auch direkt aus der Anschauung.

II. Einige allgemeine Betrachtungen zu den Formeln.

1. Allgemeines über Eigenschaften und Anwendung der Formeln.

a) Wenn man die im vorigen Absatze zusammengestellten Formeln in ihrer Gesamtheit überblickt, erkennt man, daß die in ihnen enthaltene Rechenmethode sich durch zwei vorteilhafte Eigenschaften auszeichnet. Erstens gestattet sie, jede Stabkraft für sich — unabhängig von den anderen — durch einen geschlossenen Ausdruck zu bestimmen; zweitens sind die hierbei verwendeten Formeln selber sehr geeignet für den praktischen Gebrauch.

In diesen Formeln kommen nämlich nur die Begriffe vor, die bereits aus der Festigkeitslehre bekannt sind: das Biegungsmoment M und die Querkraft Q. Wenn man nach diesen Formeln arbeitet, kann man also zunächst von der Fachwerkgestalt des betreffenden Tragwerks vollständig absehen. Man berechnet vielmehr die gebrauchten Hilfswerte M, bzw. Q genau so, als ob es sich um einen vollwandigen Balken mit der betreffenden Belastung handelte, bei dem man für die Stelle o, u, m usw. das Biegungsmoment M, bzw. die Querkraft Q auszurechnen hätte. Sobald man dann M und Q hat, ergeben die betreffenden Formeln die Stabkräfte.

Bei den M-Werten kommt noch als günstig in Betracht, daß die Bezugspunkte o, u, m usw., für die die Summenausdrücke aufzustellen sind, stets mit den Knotenpunkten des Fachwerkes zusammenfallen. Deshalb kann man die Hebelarme der Kräfte direkt aus der Systemfigur entnehmen, wodurch die Ausrechnung der Produkte ebenfalls erleichtert wird.

b) Infolge dieser vorteilhaften Eigenschaften eignet sich die Methode vorzüglich, um die ganze Ausrechnung eines Systems tabellarisch durchzuführen. Hierbei geht man so vor: Zunächst entwickelt man für sämtliche Knotenpunkte die Biegungsmomente M; ev., namentlich bei Parallelträgern, auch die Querkräfte Q. Dann stellt man die Quotienten $\frac{M}{h}$ zusammen. Dieser Wert bildet den eigentlichen Ausgangspunkt der Berechnung; denn mit seiner Hilfe kann man die Spannkräfte O, U, D und V direkt hinschreiben. Da wir für jede Spannkraft mehrere Formeln zur Verfügung haben, können wir ferner am Schlusse der Berechnung leicht noch Kontrollen hinsichtlich Rechenfehler vornehmen. Öfters führt man diese Kontrollen auch in der Weise durch, daß man einen neuen Schnitt legt, die bereits gefundenen Spannkräfte in eine bisher noch nicht benutzte Gleichgewichtsbedingung einsetzt und nachsieht, ob diese nun ebenfalls erfüllt ist. Wenn man das Kapitel „Gleichgewichtsbedingungen" wirklich verstanden hat, ergeben sich solche Kontrollen von selber (s. § 8, sechste Aufgabe).

So erkennt man, daß unsere III. Methode der Stabkraftbestimmung sich durch besondere Einfachheit, Übersichtlichkeit und Kontrollfähigkeit auszeichnet. Sie ist die wichtigste für die moderne Statik.

2. Weitere Betrachtung über Auftreten und Wirkung der Biegungsmomente.

Hinsichtlich des Hilfswertes M möge noch einiges wiederholt und weitergeführt werden. Das Biegungsmoment M_m eines Punktes m ist die Summe der statischen Momente aller Kräfte, die seitlich (links oder rechts) von dem Punkte sind, in bezug auf den Punkt. Hierbei ist zu beachten,

daß bei der Summierung die rechts- und die linksherum zeigenden Kräfte durch **verschiedene** Vorzeichen zu unterscheiden sind.

Um nun die Wirkung eines solchen Biegungsmomentes etwas handgreiflicher zu zeigen, ist in Fig. 23a und 23b je ein Balken dargestellt, dessen linker und rechter Teil der Deutlichkeit wegen etwas auseinandergerückt

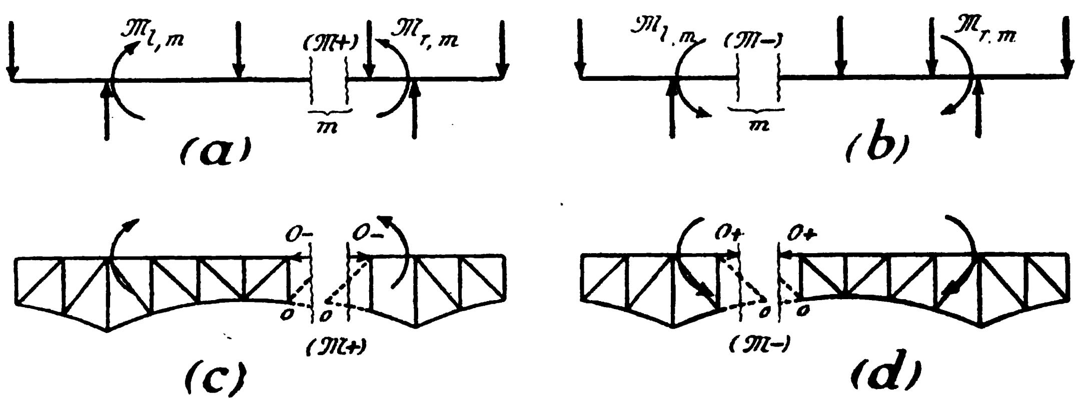


Fig. 23.

gezeichnet sind. Nun wurde für eine Stelle m dieses Trägers die Momentensumme M_m aufgestellt, und zwar wurde der Summenausdruck M_m sowohl am linken als auch am rechten Teile berechnet. Am linken Teile werde das Resultat $M_{l,m}$, am rechten Teile $M_{r,m}$ genannt. Dann muß sich, wo man auch den Schnitt m nimmt (Fig. 23a oder 23b), hinsichtlich dieser beiden Werte $M_{l,m}$ und $M_{r,m}$ der für m aufgestellten Momentensumme stets folgendes ergeben: Überwiegen am linken Teile die rechtsherum zeigenden Kräfte, so überwiegen dafür am rechten Teile um denselben Betrag die linksherum zeigenden Kräfte; und umgekehrt. (Man mache sich ein Zahlenbeispiel!) Mit anderen Worten: Der am **linken** Teile aufgestellte Wert $M_{l,m}$ und der am **rechten** Teile abgeleitete Wert $M_{r,m}$ der Momentensumme einer Stelle m sind **gleich groß**, haben aber stets **entgegengesetzten Drehungssinn** in bezug auf den Punkt m. [Dies folgt daraus, daß $M_{l,m}$ und $M_{r,m}$ zusammen gleich Null sind, da ja der ganze Balken mit allen seinen Kräften im Gleichgewichte ist und also für jede Stelle das Moment **Null** ergibt. **Sämtliche** Kräfte zusammen können aber nur dann die Summe der Momente gleich Null haben, wenn das Moment der rechten Kräfte für sich das Moment der linken Kräfte austilgt; d. h. wenn $M_{r,m}$ gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet $M_{l,m}$ ist.]

Man mache sich also klar, daß zu einem am linken Teile gefundenen Moment M_l am rechten Teile stets ein gleich großes, aber entgegengesetzt drehendes Moment M_r gehört (genau so, wie überhaupt zu jeder Wirkung eine Gegenwirkung gehört), und daß **eine andere Kombination als Fig. 23a und 23b einfach unmöglich ist.**

Um diese beiden möglichen Fälle, in denen das Moment eines Punktes auftreten kann, zu unterscheiden, haben wir Fig. 23a ein *positives*, Fig. 23b ein *negatives* Moment genannt. Es gilt also folgende Vorzeichenfestsetzung:

als *positiv* wird eingeführt { am linken Teile rechtsherum, bzw. „ rechten „ linksherum,

als *negativ* wird eingeführt { am linken Teile linksherum, bzw. „ rechten „ rechtsherum.

Oder, in anderer Zusammenstellung:

am linken Teile: ↻ = +, ↺ = —,
„ rechten „ ↺ = +, ↻ = —.

Dieses sind also die Vorzeichen, mit denen die einzelnen Kräfte in die Summenausdrücke einzuführen sind, und Fig. 23a und 23b stellen die beiden überhaupt möglichen Fälle dar, nach denen sich das Moment einer Stelle m ergeben kann.

Nun diese beiden Fälle hinsichtlich ihrer Wirkung auf einen Gurtstab, z. B. den Stab O in Fig. 23c und 23d. Hier sind die beiden Möglichkeiten dargestellt, nach denen sich das in bezug auf den Punkt o genommene Biegungsmoment ergeben kann. Gleichzeitig sind aus der Bedingung, daß das Moment des Stabes O dem äußeren Moment M_o das Gleichgewicht halten muß, die Pfeilrichtungen von O eingetragen und schließlich die Vorzeichen des Stabes O bestimmt. Man erkennt: Ist das Moment des Bezugspunktes o positiv, so ist die Stabkraft O negativ (Druck); ist M_o negativ, so ist O positiv. Dieses folgt ja auch direkt aus den früheren Formeln (I) und (Ia). Worauf es jetzt aber ankommt, ist, einzusehen, daß die beiden möglichen verschiedenen Momentenanordnungen (Fig. 23a und 23b) genau den beiden Möglichkeiten in der Spannkraft (Zug oder Druck) der Gurtstäbe entsprechen. Und daß der Gegensatz in den Richtungen der am rechten und am linken Teile aufgestellten Momentensumme eines Punktes genau dem entspricht, daß auch ein Stab auf seinen linken und seinen rechten Endpunkt stets entgegengesetzt gerichtete Kräfte ausübt. Jeder Erscheinungsform bei den Momenten entspricht eine bestimmte Eigenschaft bei den Stabkräften. Alles hängt organisch miteinander zusammen.

8. Weitere Betrachtung über Auftreten und Wirkung der Querkräfte.

Die Querkraft für einen Schnitt α—α ist die Summe aller Kräfte, die seitlich (links oder rechts) von dem Schnitte sind. Hierbei ist zu beachten, daß die nach oben und die nach unten zeigenden Kräfte durch verschiedene Vorzeichen auseinanderzuhalten sind.

Um die Wirkung einer solchen Kraftsumme etwas handgreiflicher zu zeigen, ist in Fig. 24a und 24b je ein Träger dargestellt, dessen linker und rechter Teil etwas auseinandergerückt gezeichnet sind. Für einen Schnitt α—α dieses Trägers wurde die Kraftsumme Q aufgestellt. Und zwar wurden sowohl am linken Teile die vorhandenen Kräfte zu ihrer Resultierenden $Q_{l,\alpha}$ vereinigt, als auch am rechten Teile die betreffenden Kräfte zu ihrer Resultierenden $Q_{r,\alpha}$. Diese Resultierenden $Q_{l,\alpha}$ und $Q_{r,\alpha}$ sind für zwei verschiedene Schnitte des Balkens in Fig. 24a und 24b in ihren richtigen Lagen eingezeichnet. [$Q_{r,\alpha}$ kam hierbei seitlich von der zugehörigen rechten Kräftegruppe zu liegen. Da eine Resultierende nur eine gedachte Kraft ist, die die Gesamtwirkung der wirklich vorhandenen Kräfte darstellt, kann sie vollständig fern von der Kräftegruppe erscheinen; sogar in unendlichem Abstande. Vgl. Band I, § 11.] Dann muß sich,

wo man auch den Schnitt α—α legt, stets folgendes ergeben: Überwiegen am linken Teile die nach oben zeigenden Kräfte, so überwiegen dafür am rechten Teile um denselben Betrag die nach unten zeigenden Kräfte; und umgekehrt. (Man mache sich ein Zahlenbeispiel!) Mit anderen Worten: Der am linken Teile aufgesteilte Wert $Q_{l,\alpha}$ der Kraftsumme einer Stelle α—α ist ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet dem am rechten Teile gefundenen Wert $Q_{r,\alpha}$ derselben Kraftsumme. [Dies folgt daraus, daß sämtliche Kräfte (am ganzen Balken) des Gleichgewichtes wegen den Betrag Null ergeben müssen. Folglich muß die am linken Teile für sich genommene Summe entgegengesetzt gleich sein der am rechten Teile genommenen Summe. Man sieht noch weiter ein, daß $Q_{l,\alpha}$ und $Q_{r,\alpha}$, damit sie sich gegenseitig tilgen, in ein und dieselbe Gerade fallen müssen.]

Man mache sich also klar, daß zu einer am linken Teile aufgestellten Kraftsumme stets eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraftsumme am rechten Teile gehört. Fig. 24a und 24b stellen somit die beiden Fälle dar, die beim Zusammenzählen von Kräften an einem Träger überhaupt möglich sind. Eine andere Kombination gibt es nicht.

Zur Unterscheidung nennt man im Falle Fig. 24a die Querkraft *positiv*, bei Fig. 24b *negativ*. Es gilt demnach folgende Vorzeichenfestsetzung:

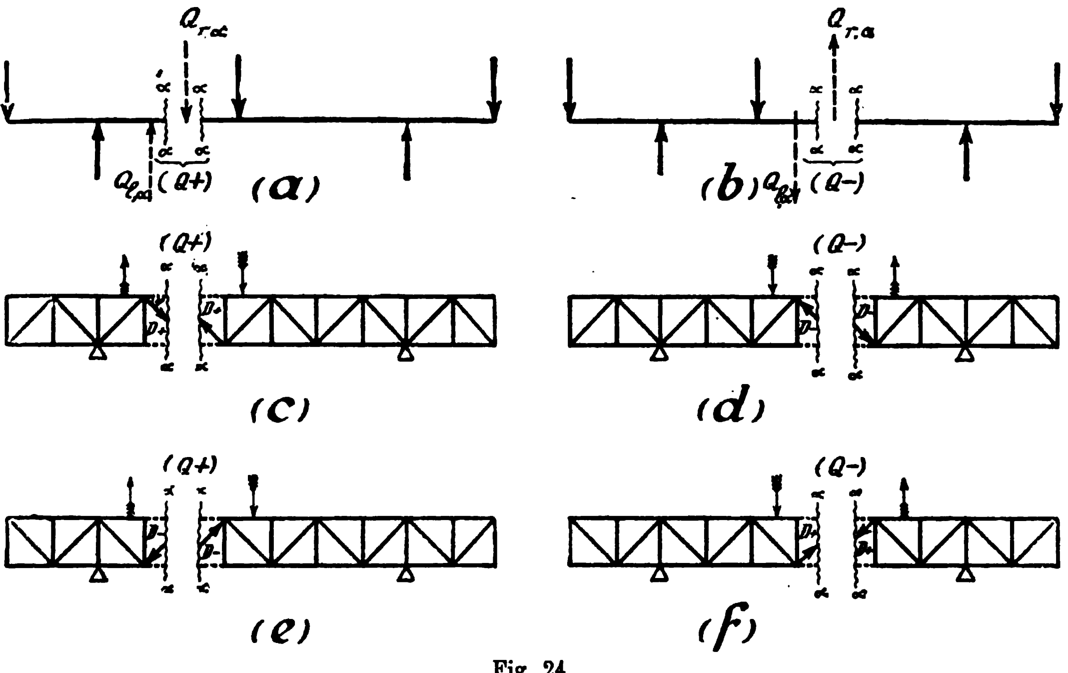


Fig. 24.

als *positiv* wird eingeführt { am linken Teile die Richtung nach oben,
„ rechten „ „ „ „ unten,

als *negativ* wird eingeführt { am linken Teile die Richtung nach unten,
„ rechten „ „ „ „ oben.

Oder, in andorer Zusammenstellung:

am linken Teile: $\uparrow = +$, $\downarrow = -$,
„ rechten „ $\downarrow = +$, $\uparrow = -$.

Somit sind die möglichen Erscheinungsformen der Querkraft eines Schnittes besprochen.

In Fig. 24c—f ist nun die Wirkung der Querkräfte dargestellt. Zunächst sind die Richtungen, in denen eine positive bzw. negative Querkraft auf einen linken oder rechten Trägerteil wirkt, eingetragen und dann die Wirkung dieser Richtungen auf die Spannkraft einer Diagonalen bestimmt. Hierbei muß zwischen linkssteigenden (Fig. 24c—d) und rechtssteigenden (Fig. 24e—f) Diagonalen unterschieden werden. Besser als aus allen Formeln ergibt sich hier direkt aus der Anschauung des Gleichgewichtes, welche Kräfte in einer Diagonale durch die Werte Q hervorgerufen werden. Man erkennt:

linkssteigende Diagonale { positive Querkraft erzeugt Zug, negative „ „ Druck,
rechtssteigende Diagonale { positive Querkraft erzeugt Druck, negative „ „ Zug.

Auch hier sei darauf hingewiesen, wie organisch sich alles entwickelt. Es muß zwei verschiedene Formen der Querkraft geben, da ja auch die Stabkraft in zwei verschiedenen Formen auftritt. Und daß $Q_{l,\alpha}$ und $Q_{r,\alpha}$ am linken und am rechten Teile eines Balkens stets entgegengesetzte Richtung haben, entspricht genau der stets entgegengesetzten Einwirkung einer Stabkraft auf ihre beiden Endpunkte (von denen der eine ja stets zum linken, der andere zum rechten Fachwerkteile gehört). Es muß so sein und nicht anders.

Übungsaufgabe: Man zeichne entsprechend für eine Hauptvertikale V die verschiedenen Beanspruchungen bei positiver und bei negativer Querkraft auf! Resultat:

V zwischen linkssteigenden Diagonalen { positive Q. erzeugt Druck, negative „ „ Zug,
V zwischen rechtssteigenden Diagonalen { positive Q. erzeugt Zug, negative „ „ Druck.

III. Benennungen.

Die zuerst abgeleiteten Formeln

$$(1) \qquad O = -\frac{M_o}{r_o}, \quad U = +\frac{M_u}{r_u}, \quad D = \frac{M_d}{r_d}$$

wollen wir die „*ursprüngliche Rittersche Methode*“ nennen. Sie war die bahnbrechende Methode ihrer Zeit (1863). Doch ist sie namentlich bei den Füllungsstäben recht unbequem, da deren Bezugspunkte häufig sehr ungünstig liegen (Punkt d in Fig. 13). Auch die Lote r_o und r_u sind nicht angenehm.

Deshalb haben wir die Methode so umgearbeitet, daß nur solche Bezugspunkte für die Momente auftreten, die gleichzeitig Knotenpunkte des Fachwerkes sind. Auch die übrigen in den Formeln vorkommenden Hilfsgrößen haben die Annehmlichkeit,

daß sie aus der Systemfigur leicht entnommen werden können. Aus diesem Gesichtspunkte heraus entstanden die Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} O = -\left(\frac{M_o}{h_o}\right) : \cos\beta\,; & U = +\left(\frac{M_u}{h_u}\right) : \cos\gamma\,; \\ D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right); & V = \pm\frac{1}{\lambda}\left(M - \frac{M}{h}\cdot h'\right). \end{cases}$$

Diese Formeln mögen die „*abgeänderte Rittersche Methode*“ heißen.

Es bleiben noch übrig die für spezielle Zwecke aufgestellten Formeln. Nämlich die Formeln für Diagonalen und Vertikalen von Parallelträgern:

$$(3)\qquad D = \pm\frac{1}{\sin\varphi}Q\,,\qquad V = \mp Q\,,$$

ferner die Formel für V bei Trägern mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung:

$$(4)\qquad V = -D\sin\varphi \pm P\,,$$

und schließlich die Formeln für Zwischenvertikalen:

$$(5)\quad \begin{cases} V = -P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\beta_l + \operatorname{tg}\beta_r) \\ \quad = +P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\gamma_l + \operatorname{tg}\gamma_r)\,. \end{cases}$$

Diese Formeln führen keine besondere Benennung.

Um den Leser nicht durch eine Menge neuer Dinge zu ermüden, ist in den bisherigen Untersuchungen dieses Paragraphen immer nur der Fall vertikaler Belastung betrachtet. Der folgende Paragraph wird in den ersten Beispielen zunächst eine Einübung der soeben durchgenommenen Methoden bringen, dann aber auch zeigen, wie der Fall schräger Belastung zu behandeln ist.

§ 8.

Beispiele zu § 7—§ 7b.

Erste Aufgabe.

Das in Fig. 26 gezeichnete Fachwerk ist nach der ursprünglichen Ritterschen Methode zu berechnen!

Der Obergurt verläuft gerade und ist unter einem Winkel von 25° geneigt. Die Knotenpunkte des Untergurtes liegen auf einer Parabel mit $l = 18{,}00$ m Spannweite und $f = 2{,}60$ m Stich. Die Höhe der einzelnen Punkte der Parabel über der Horizontalen finden wir dann aus der Gleichung (s. Band I, § 55):

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x)\,,$$

worin x die Entfernung des betreffenden Punktes vom linken und $(l - x)$ vom rechten Auflager bedeutet. Da wir gleiche Feldweiten haben, können wir die Entfernungen l und x noch durch die Feldweite $\lambda = 3{,}00$ m ausdrücken. Somit ergeben sich für die Höhen der einzelnen Punkte folgende einfache Ausdrücke:

$$\text{Punkt } 1: \quad y_1 = \frac{4f}{(6\lambda)^2} \cdot 1\lambda \cdot 5\lambda = \frac{4f \cdot \lambda^2}{36\lambda^2} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{4f}{36} \cdot 1 \cdot 5$$

$$= 0{,}289 \cdot 1 \cdot 5 = 1{,}45 \text{ m},$$

$$\text{„} \quad 2: \quad y_2 = 0{,}289 \cdot 2 \cdot 4 = 2{,}31 \text{ „}$$

$$\text{„} \quad 3: \quad y_3 = 0{,}289 \cdot 3 \cdot 3 = 2{,}60 \text{ „} \quad (= f).$$

Hiernach kann man das Fachwerk aufzeichnen.

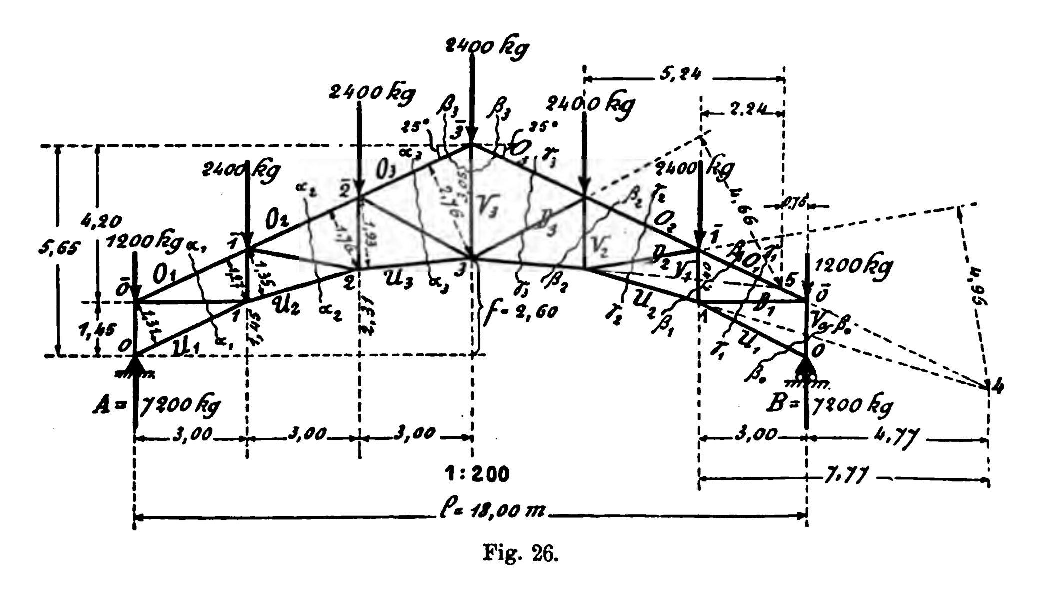


Fig. 26.

a) Die Gurtstäbe. Die Berechnung der Gurtstäbe geschieht nach den Formeln:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M_o}{r_o}, \\[2ex] U = +\dfrac{M_u}{r_u}. \end{cases}$$

In diese Formeln ist das Moment desjenigen Knotenpunktes einzusetzen, der dem zu berechnenden Stabe gegenüber liegt. Ist man hinsichtlich des Bezugspunktes irgendwie im Zweifel, so lege man stets den *Ritter*schen Schnitt durch den Stab, der außer diesen nur noch zwei andere Stäbe trifft. Der Schnittpunkt dieser

beiden anderen Stäbe ist dann als Bezugspunkt für die Momente zu wählen (damit diese beiden Stäbe selber aus der Momentengleichung herausfallen und der gesuchte Stab als einzige Unbekannte übrigbleibt). Auf diese Weise findet man sicher zu jedem Stabe den richtigen Bezugspunkt.

In der folgenden Tabelle sind die Momente und aus diesen die Stabkräfte berechnet. Da sämtliche Kräfte vertikal sind, sind die Momente für zwei übereinanderliegende Punkte einander gleich; z. B. M_1 und $M_{\bar{1}}$ der Punkte *1* und $\bar{1}$ usw. Die Abstände r der Stäbe von ihren Bezugspunkten werden geometrisch ausgerechnet oder aus der Figur abgegriffen. Im übrigen dürfte die Tabelle verständlich sein.

Tabelle I: Gurtstäbe.

Stab	Zugehöriger		Moment für diesen Bezugspunkt (mkg)	Lot vom Bezugspunkt auf den Stab (m)	Spannkraft $\left(O = -\frac{M}{r};\ U = +\frac{M}{r}\right)$ (kg)
	Schnitt	Bezugspunkt			
O_1	α_1—α_1	*1*	$M_1 = (7200 - 1200) \cdot 3{,}0 = 18000$	$r_{o,1} = 1{,}27$	$-\frac{18000}{1{,}27} = -14200$
O_2	α_2—α_2	*2*	$M_2 = (7200 - 1200)\, 6{,}0 - 2400 \cdot 3{,}0 = 28800$	$r_{o,2} = 1{,}76$	$-\frac{28800}{1{,}76} = -16400$
O_3	α_3—α_3	*3*	$M_3 = (7200 - 1200)\, 9{,}0 - 2400 \cdot 6{,}0 - 2400 \cdot 3{,}0 = 32400$	$r_{o,3} = 2{,}76$	$-\frac{32400}{2{,}76} = -11700$
U_1	α_1—α_1	$\bar{0}$	$M_{\bar{0}} = 0$	$r_{u,1} = 1{,}31$	0
U_2	α_2—α_2	$\bar{1}$	$M_{\bar{1}} = 18000$	$r_{u,2} = 1{,}35$	$+\frac{18000}{1{,}35} = +13300$
U_3	α_3—α_3	$\bar{2}$	$M_{\bar{2}} = 28800$	$r_{u,3} = 1{,}93$	$+\frac{28800}{1{,}93} = +14900$

b) **Füllungsstäbe.** Die Berechnung der Füllungsstäbe ist leider nicht so einfach wie die der Gurtstäbe. Deshalb haben wir ja auch in § 7a zur Berechnung der Diagonalen und Vertikalen andere Methoden entwickelt. Des Prinzips wegen möge aber wenigstens einmal die ursprüngliche *Ritter*sche Berechnungsweise nach Fig. 13 auch für die Stäbe D und V durchgeführt werden (Fig. 26, rechte Seite).

Zum Stab V_1 z. B. gehört der Schnitt β_1—β_1. Denn dieses ist derjenige Schnitt, der durch das Fachwerk so gelegt werden kann, daß er außer V_1 nur noch zwei andere unbekannte Kräfte (Stäbe) trifft. Der Teil **rechts** vom Schnitte möge untersucht werden. Die angreifenden Kräfte sind B, 1200 kg, U_2, V_1 und O_1.

Als Bezugspunkt muß Punkt *4*, der Schnittpunkt von O_1 und U_2, genommen werden, damit letztere Stäbe nicht unnötig in der Momentengleichung auftreten. Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, ist es schon das beste, man schreibt bei den Füllungsstäben zunächst die vollständige Momentengleichung für den betreffenden Bezugspunkt an und findet hieraus den Wert von D bzw. V. In unserem Falle lautet diese Gleichung (V_1 vorläufig als Zug angenommen und die Richtung rechtsherum als positiv eingeführt):

$$V_1 \cdot 7{,}77 + (7200 - 1200) \cdot 4{,}77 = 0,$$

$$V_1 = -\frac{(7200 - 1200)}{7{,}77} \cdot 4{,}77$$

$$= -\frac{28\,600}{7{,}77} = -3700 \text{ kg}.$$

In derselben Weise sind in der folgenden Tabelle sämtliche Füllungsstäbe berechnet. Hinsichtlich D_1, V_0 und V_3 folgt noch eine besondere Erläuterung.

Tabelle II: Füllungsstäbe.

Stab	Zugehöriger		Gleichgewichtsbedingung	Stabkraft (kg)
	Schnitt	Bezugspunkt		
D_1	γ_1—γ_1	$(\bar{1})$	$+D_1 \cdot 1{,}40 - (7200 - 1200)\,3{,}0 = 0$	$D_1 = +\frac{18\,000}{1{,}40} = +12\,850$
D_2	γ_2—γ_2	*4*	$-D_2 \cdot 4{,}96 + (7200 - 1200)\,4{,}77 - 2400 \cdot 7{,}77 = 0$	$D_2 = +\frac{10\,000}{4{,}96} = +\ 2000$
D_3	γ_3—γ_3	*5*	$-D_3 \cdot 4{,}66 - (7200 - 1200)\,0{,}76 - 2400 \cdot 2{,}24 - 2400 \cdot 5{,}24 = 0$	$D_3 = -\frac{22\,500}{4{,}66} = -\ 4850$
V_0	β_0—β_0	(1)	$-V_0 \cdot 3{,}0 - 7200 \cdot 3{,}0 = 0$	$V_0 = -7200$
V_1	β_1—β_1	*4*	$+V_1 \cdot 7{,}77 + (7200 - 1200)\,4{,}77 = 0$	$V_1 = -\frac{28\,600}{7{,}77} = -\ 8700$
V_2	β_2—β_2	*5*	$+V_2 \cdot 5{,}24 - (7200 - 1200)\,0{,}76 - 2400 \cdot 2{,}24 = 0$	$V_2 = +\frac{9900}{5{,}24} = +\ 1900$
V_3	β_3—β_3	$(\bar{3})$	$\left[V_3 = -2400 + 2\frac{M_3}{h_3} \cdot \operatorname{tg} 25^\circ\right]$	$V_3 = -2400 + 9900 = +7500$

Für den Stab D_1 liegt der Bezugspunkt weit draußen, da die beiden anderen von dem betreffenden Schnitte getroffenen Stäbe beinahe parallel sind. Da aber der Stab U_1 die Spannkraft Null hat, wie vorhin gefunden, brauchen wir uns um ihn nicht weiter zu kümmern. Wir nehmen vielmehr den Bezugspunkt beliebig auf Stab O_1 an, z. B. den Punkt $\bar{1}$ (Fig. 26, rechts), erreichen hierdurch, daß O_1 aus der Momentengleichung herausfällt und finden die gesuchte Gleichung für D_1. (Das Lot von $\bar{1}$ auf D_1 ist gleich 1,40 m.)

Beim Stabe V_0 besteht der Fachwerkteil rechts vom Schnitte nur aus einem Knotenpunkte (Punkt *0*). Angreifende Kräfte sind B, V_0 und U_1. Als Bezugspunkt ist Punkt *1* genommen.

Die Vertikale V_3 ist eine Zwischenvertikale, da sie mit den anschließenden Diagonalen nicht in fortlaufendem Linienzuge steht. Der zu V_3 gehörige *Ritter*sche Schnitt geht um den Punkt $\bar{3}$ herum; denn jeder andere Schnitt würde mehr als drei Stäbe treffen. Da die drei getroffenen Stäbe V_3, O_3, O_3 sämtlich in einem Punkt zusammenlaufen, kann man keine derartige Momentengleichung aufstellen, in der nur V_3 auftritt und die beiden O_3 verschwinden. (Für Punkt $\bar{3}$ als Bezugspunkt würde jede der drei Kräfte das Moment Null abgeben.) Für diese Stäbe versagt also die *Ritter*sche Methode. Dafür ist der Stab V_3 direkt aus dem Gleichgewicht des Punktes $\bar{3}$ zu bestimmen. Die betreffende Formel ist in Fig. 22 angegeben und lautet in Anwendung auf unseren Fall:

$$V_3 = -2400 + \frac{M_3}{3{,}05}(\mathrm{tg}\,25^\circ + \mathrm{tg}\,25^\circ)$$

$$= -2400 + 2 \cdot \frac{32400}{3{,}05}\,\mathrm{tg}\,25^\circ .$$

Hiernach ist V_3 in der vorhergegangenen Tabelle ausgerechnet. Man merke sich diese Berechnung von V_3, da der entsprechende Fall bei der mittelsten Vertikale von Fachwerken häufig vorkommt.

Schlußbetrachtung. Bei den Gurtstäben war die *Ritter*sche Methode sehr brauchbar, da man nur die bekannten Biegungsmomente für die einzelnen Knotenpunkte zu bestimmen und durch den Abstand r des betreffenden Stabes von seinem gegenüberliegenden Knotenpunkt zu dividieren hat. Bei den Füllungsstäben dagegen muß man zunächst genau aufpassen, in welche Teile das Fachwerk durch den betreffenden Schnitt zerlegt wird, welche Kräfte an diesen Teilen angreifen; dann muß man den — häufig sehr ungünstig gelegenen — Bezugspunkt einzeichnen und nun die Momentengleichung vollständig hinschreiben. Hierdurch wird die Ermittelung der Füllungsstäbe zeitraubend und anstrengend. Deshalb soll im nächsten Beispiel der eigentliche praktische Rechnungsgang auf Grund der abgeänderten *Ritter*schen Methode vorgeführt werden.

Zweite Aufgabe.

Der in der vorliegenden Aufgabe behandelte Fachwerkträger ist nach der abgeänderten Ritterschen Methode zu berechnen!

a) Momente und Gurtstäbe. Die Berechnung ist an Hand von Fig. 27 in den beiden folgenden Tabellen durchgeführt. Zunächst müssen die Momente M der einzelnen Knotenpunkte ermittelt werden. Hierbei ist nach der in Band I, § 57 angegebenen Formel jedes folgende Moment aus dem vorhergehenden (mittels der Querkräfte) entwickelt: Zuerst $M_0 = 0$, dann $M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda_{0-1}$ usw. Deshalb sind in der folgenden Tabelle zunächst die Querkräfte für die einzelnen Felder angeschrieben (wobei man zweckmäßig mit $Q_{2-3} = \frac{1}{2}\,2400$ anfängt und die anderen hinaufaddiert) und hieraus die Momente entwickelt. Aus den Momenten sind dann die Quo-

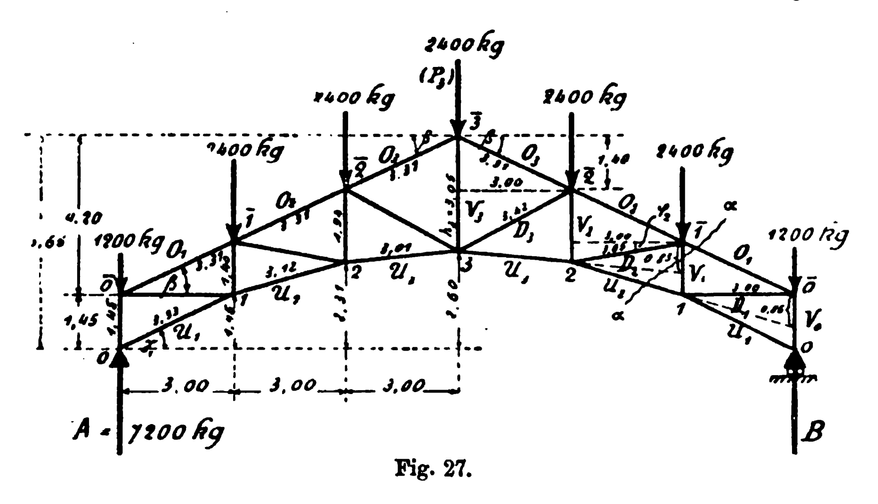


Fig. 27.

tienten: Moment M durch Trägerhöhe h, gebildet und hieraus nach den Formeln Fig. 17 die Ober- und Untergurtstäbe bestimmt:

$$\text{(Ia)} \quad \begin{cases} O = -\left(\frac{M}{h}\right) : \cos\beta = -\frac{M}{h} \cdot \frac{1}{\cos\beta}, \\ U = +\left(\frac{M}{h}\right) : \cos\gamma = +\frac{M}{h} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}. \end{cases}$$

Bei der Multiplikation mit $\frac{1}{\cos\beta}$ bzw. $\frac{1}{\cos\gamma}$ beachte man, daß z. B. für U_1

$$\cos\gamma_1 = \frac{3{,}00}{3{,}33}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos\gamma_1} = \frac{3{,}33}{3{,}00}$$

ist. Deshalb ist es gut, in die Systemskizze alle Längen einzuschreiben. Man hat dann auf diese Weise alle erforderlichen Hilfswerte h, $\cos\beta$ usw. übersichtlich vor Augen. Die Spannkräfte schreibt man dann zweckmäßig neben die Momente hin, aus denen sie ausgerechnet werden. Nach diesen Erläuterungen

wird die folgende Tabelle verständlich sein. [Da $M_1 = M_{\bar{1}}$, $M_2 = M_{\bar{2}}$ usw. ist, ist immer nur das eine von je zwei solcher gleichen Momente angeschrieben.]

Tabelle I: Momente und Gurtstäbe.

Querkräfte (kg)	Feldweiten (m)	Momente M (mkg)	Trägerhöhen h (m)	Quotienten $\frac{M}{h}$ (kg)	Obergurt $\left[O = -\frac{M}{h}\frac{1}{\cos\beta}\right]$ (kg)	Untergurt $\left[U = +\frac{M}{h}\frac{1}{\cos\gamma}\right]$ (kg)
$A = 7200$						
(1200)		$M_0 = 0$	$h_0 = 1{,}45$	$\frac{M_0}{h_0} = 0$		$U_1 = 0$
$Q_{0-1} = 6000$	3,00	(18000)				
(2400)		$M_1 = +18000$	$h_1 = 1{,}40$	$\frac{M_1}{h_1} = +12850$	$O_1 = -12850 \cdot \frac{3{,}31}{3{,}00} = -14200$	$U_2 = +12850 \cdot \frac{3{,}12}{3{,}00} = +13300$
$Q_{1-2} = 3600$	3,00	(10800)				
(2400)		$M_2 = +28800$	$h_2 = 1{,}94$	$\frac{M_2}{h_2} = +14850$	$O_2 = -14850 \cdot \frac{3{,}31}{3{,}00} = -16400$	$U_3 = +14850 \cdot \frac{3{,}01}{3{,}00} = +14900$
$Q_{2-3} = 1200$	3,00	(3600)				
		$M_3 = +32400$	$h_3 = 3{,}05$	$\frac{M_3}{h_3} = +10600$	$O_3 = -10600 \cdot \frac{3{,}31}{3{,}00} = -11700$	

b) Diagonalen und Vertikalen. Die Diagonalen sind nach der Formel Fig. 19 berechnet:

$$\text{(IV)} \qquad D = +\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right).$$

Der Neigungswinkel φ der betreffenden Diagonale wird aus der Zeichnung abgelesen. So ist z. B. für D_2 (Fig. 27, rechte Seite):

$$\cos\varphi_2 = \frac{3{,}00}{3{,}05}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\cos\varphi_2} = \frac{3{,}05}{3{,}00}.$$

[Für D_1 ist $\varphi = 0°$, $\cos\varphi = 1{,}00$.] Die Quotienten $M:h$ sind bereits in der vorigen Tabelle berechnet. Man beachte, daß in der Klammer zunächst das Moment am Fußpunkte und dann das Moment am Kopfende der Diagonalen steht („von Fuß zu Kopf").

Die Vertikalen sind an Hand von Fig. 27, rechte Seite, berechnet. Es ist deshalb von Fig. 20, Formel (b) zu verwenden: Belastung am Obergurt, V zwischen rechtssteigenden Diagonalen. Diese Formel lautet:

$$V = \frac{1}{\lambda_{m-r}}\left(M_r - \frac{M_m}{h_m} \cdot h_r'\right).$$

Hierin bedeutet m den Knotenpunkt an der Stelle der Vertikale, r den Knotenpunkt des Obergurtes rechts von der Vertikale. Ferner ist λ_{m-r} die Horizontalentfernung (Feldweite) zwischen m und r. M_r ist das Biegungsmoment der Stelle r. M_m und h_m

sind Moment und vertikale Fachwerkhöhe an der Stelle der Vertikale. Und h'_r ist ein Hilfswert, der dadurch erhalten wird, daß man durch die Vertikale den Schnitt legt und den vom Schnitte getroffenen Untergurtstab U nach der Seite von r verlängert. Dann ist h'_r das Stück, das diese Verlängerung auf der durch den Punkt r gehenden Vertikalen abschneidet. (Die Verwendung der Formel für Lasten am Untergurt s. nächste Aufgabe.)

In der folgenden Tabelle sind nach diesen Formeln die Werte D und V berechnet. Die Hilfswerte M und $M:h$ sind noch einmal aus der vorhergehenden Tabelle abgeschrieben. Die geometrischen Angaben $\cos\varphi$, λ, h' sind aus der Zeichnung zu entnehmen. Die Spannkräfte D und V sind immer zwischen die Momente geschrieben, die zur Berechnung des betreffenden Stabes gehören. Die (Zwischen-)Vertikale V_3 macht eine Ausnahme, da für sie kein *Ritter*scher Schnitt paßt. Sie wird deshalb, wie früher, aus dem Gleichgewicht des Knotens $\bar{3}$ bestimmt:

$$V_3 = -P_3 + 2\frac{M_3}{h_3}\cdot \operatorname{tg}\beta\,.$$

Hiernach ist V_3 am bequemsten zu berechnen. (Man merke sich diese Berechnung für ähnliche Fälle.) Auch die Vertikale V_0 ist direkt aus dem Gleichgewicht eines Knotenpunktes, nämlich des Punktes 0, ermittelt.

Tabelle II: Diagonalen und Vertikalen.

Moment M (mkg)	Quotienten $\frac{M}{h}$ (kg)	Diagonalen (kg) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (kg) $V_m = \frac{1}{\lambda_{m-r}}\left(M_r - \frac{M_m}{h_m}\cdot h_r'\right)$
$M_0 =$ 0	$\frac{M_0}{h_0} =$ 0		$V_0 = (-B) =$ −7200
		$D_1 = 1{,}00(12850 - 0) =$ +12850	$V_1 = \frac{1}{3{,}00}(0 - 12850\cdot 0{,}86) =$ −8700
$M_1 = +18000$	$\frac{M_1}{h_1} = +12850$		
		$D_2 = \frac{3{,}05}{3{,}00}(14850 - 12850) =$ + 2000	$V_2 = \frac{1}{3{,}00}(18000 - 14850\cdot 0{,}83) =$ +1900
$M_2 = +28800$	$\frac{M_2}{h_2} = +14850$		
		$D_3 = \frac{3{,}42}{3{,}00}(10600 - 14850) =$ − 4850	
$M_3 = +32400$	$\frac{M_3}{h_3} = +10600$		[$V_3 = -2400 + 2\cdot 10600\,\frac{4{,}20}{9{,}00} =$ +7500]

Somit sind durch Tabelle I und II sämtliche Stabkräfte berechnet.

Dritte Aufgabe.

Der in Fig. 27 gezeichnete Fachwerkträger ist für den Fall zu berechnen, daß die Lasten am Untergurt angreifen! (Die Figur zeichne man selber auf!)

Was ändert sich gegenüber der vorigen Aufgabe? Die Momente für die einzelnen Knotenpunkte bleiben dieselben. Denn die Lasten bleiben ja gleich und ihre Abstände von den zugehörigen Knotenpunkten bleiben ebenfalls unverändert, da die Kräfte nur innerhalb ihrer Richtung verschoben sind.

1) Legt man nun z. B. durch einen **Obergurt** einen Schnitt, so hat man dieselben Kräfte seitlich vom Schnitt wie früher; dasselbe Moment für den Bezugspunkt des betreffenden Stabes, ferner natürlich dieselbe Trägerhöhe h und denselben Neigungswinkel β. In der Formel

$$O = -\frac{M}{h}\frac{1}{\cos\beta}$$

hat sich also nichts geändert.

2) Dasselbe läßt sich von dem **Untergurt** sagen.

3) Auch in der Formel für die **Diagonalen**:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$$

bleibt alles beim alten, da dieselben Kräfte, dieselben Momente usw. auftreten.

4) Anders ist es bei den **Vertikalen**. Legen wir wieder die rechte Seite von Fig. 27 der Berechnung zugrunde (V zwischen rechtssteigenden Diagonalen), so müssen wir jetzt, da die Belastung am Untergurt angreift, die Formel (d) von Fig. 20 verwenden:

$$V = \frac{1}{\lambda_{m-l}}\left(-M_l + \frac{M_m}{h_m}\cdot h_l'\right).$$

Denn bei den Vertikalen mußten die beiden Fälle, Lasten am Obergurt und Lasten am Untergurt, getrennt behandelt werden, um keine anderen als die regulären „Biegungsmomente" M in die Formeln hinein zu bekommen. Die Bedeutung der Glieder ist folgende: m und l sind die Knotenpunkte des Untergurtes an der Vertikalen und links davon. λ_{m-l} die Feldweite zwischen m und l. M_l, M_m und h_m Momente und Fachwerkhöhe bei l und m. Schließlich h_l' ist das Stück auf der Vertikalen durch l, daß der vom Schnitte getroffene Obergurtstab bei seiner Verlängerung nach links abtrennt. Im vorliegenden Falle sind die Strecken h gleich den Trägerhöhen an denselben Stellen, da der Obergurt

geradlinig verläuft (allerdings nicht rechtwinklig zu den Vertikalen). Somit ergeben sich mit Benutzung der bereits früher aufgestellten Werte von M und $\frac{M}{h}$ folgende Spannkräfte (V_0 und V_3 wieder aus dem Gleichgewicht der Knoten 0 und $\bar{3}$ bestimmt):

$$V_0 = -(7200 - 1200) = -6000 \text{ kg},$$

$$V_1 = \frac{1}{3{,}00}(-28800 + 12850 \cdot 1{,}94) = -1300 \text{ kg},$$

$$V_2 = \frac{1}{3{,}00}(-32400 + 14850 \cdot 3{,}05) = +4300 \text{ kg},$$

$$V_3 = +2 \cdot \frac{M_3}{h_3} \operatorname{tg}\beta = +2 \cdot 10600 \frac{4{,}20}{9{,}00} = +9900 \text{ kg}.$$

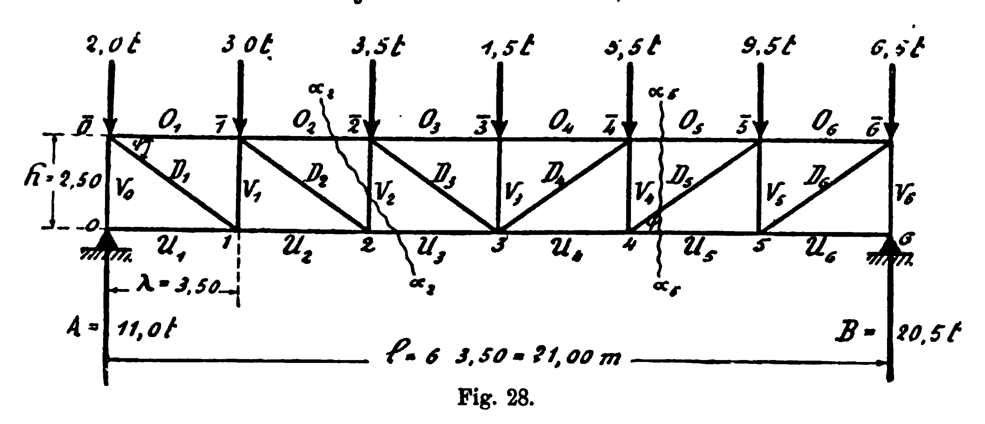


Fig. 28.

Vergleicht man diese Werte mit denen der zweiten Aufgabe, so erkennt man, daß sie sich um den Betrag der betreffenden Knotenpunktslast unterscheiden. Dieses muß ja auch so sein, wenn man das Gleichgewicht der oberen Knotenpunkte betrachtet und hieraus die Vertikalen abgeleitet denkt.

Wiederholung: Für die Berechnung der Gurtstäbe und Diagonalen ist es gleichgültig, ob die (vertikale) Belastung am Ober- oder am Untergurt angreift. Dagegen ändern sich die Vertikalen, und zwar sind die Spannkräfte bei Belastung am Obergurt um den Betrag $(-P)$ größer als bei Belastung am Untergurt, wobei P die betreffende Knotenpunktslast ist. (Belastung am Obergurt erzeugt die größten Druckkräfte in der Vertikalen.)

Vierte Aufgabe.

Der in Fig. 28 gezeichnete Parallelträger ist zu berechnen!

Der Träger ist symmetrisch, die Belastung dagegen unsymmetrisch. Deshalb ist es nötig, sämtliche Stäbe des Fach-

werkes zu untersuchen. Zunächst bestimmen wir die noch fehlenden äußeren Kräfte A und B:

$$A = \frac{1}{6\lambda}(2{,}0 \cdot 6\lambda + 3{,}0 \cdot 5\lambda + 3{,}5 \cdot 4\lambda + 1{,}5 \cdot 3\lambda + 5{,}5 \cdot 2\lambda + 9{,}5 \cdot 1\lambda + 6{,}5 \cdot 0)$$

$$= \frac{1}{6\lambda}(2{,}0 \cdot 6 + 3{,}0 \cdot 5 + 3{,}5 \cdot 4 + 1{,}5 \cdot 3 + 5{,}5 \cdot 2 + 9{,}5 \cdot 1)\lambda$$

$$= \frac{1}{6}(2{,}0 \cdot 6 + 3{,}0 \cdot 5 + 3{,}5 \cdot 4 + 1{,}5 \cdot 3 + 5{,}5 \cdot 2 + 9{,}5 \cdot 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 66 = 11{,}0 \text{ t},$$

$$B = \frac{1}{6}(2{,}0 \cdot 0 + 3{,}0 \cdot 1 + 3{,}5 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 3 + 5{,}5 \cdot 4 + 9{,}5 \cdot 5 + 6{,}5 \cdot 6)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 123 = 20{,}5 \text{ t}.$$

a) **Gurtstäbe.** Nun berechnen wir die Gurtkräfte:

$$O = -\frac{M}{r} = -\frac{M}{h},$$

$$U = -\frac{M}{r} = +\frac{M}{h}.$$

Da es sich jetzt um einen Parallelträger handelt, sind die Lote von den Bezugspunkten auf die betreffenden Stäbe sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Trägerhöhe h.

b) **Füllungsstäbe.** Für die Diagonalen und Vertikalen hatten wir beim Parallelträger die Formeln (Fig. 18):

$$D = \pm\frac{1}{\sin\varphi}Q \begin{cases} + & \text{bei linkssteigender Diagonale,} \\ - & \text{„ rechtssteigender „} \end{cases}$$

$$V = \mp Q \begin{cases} -, & \text{wenn } V \text{ zwischen linkssteigenden Diagonalen,} \\ +, & \text{„ „ „ rechtssteigenden „} \end{cases}$$

Um hierin den richtigen Wert Q einzusetzen, denke man sich stets für den betreffenden Stab den Schnitt gelegt. Dann ist Q die Kraftsumme von der ersten Kraft (am Anfange des Fachwerkes) bis zu dem betreffenden Schnitte.

c) **Tabelle.** In der folgenden Tabelle sind zunächst die Kraftsummen aufgestellt und hieraus die Momente entwickelt (nach Band I, § 57). Da die Momente für je zwei vertikal übereinanderliegende Punkte einander gleich sind, genügt es natürlich, nur immer eins von beiden anzuschreiben. Neben jedem Moment ist dann der Gurtstab eingetragen, der aus dem betreffenden M ent-

wickelt wird. Die Diagonalen und Vertikalen dagegen stehen in der Höhe der Querkräfte, aus denen sie berechnet werden. (In Gedanken lege man stets den zugehörigen Schnitt, um zu sehen, die Querkraft welchen Feldes maßgebend ist.) Bei V_0, V_3 und V_6 trennt der betreffende Schnitt, wenn er höchstens drei Stäbe treffen soll, je einen Knotenpunkt ab. Deshalb berechnet man diese Stäbe am besten aus dem Gleichgewicht der betreffenden Knotenpunkte; natürlich da, wo am wenigsten Kräfte angreifen.

Kraftsummen Q (t)	Feldweiten (m)	Momente M (mt)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D = \pm Q \cdot \frac{1}{\sin\varphi}$	Vertikalen (t) $V = \mp Q$
$A = 11{,}0$					$\left[\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{4{,}30}{2{,}50} = 1{,}72\right]$	$V_0 = -11{,}0$
(2,0)		$M_0 = 0{,}00$		$U_1 = 0$		
$Q_{0-1} = +9{,}0$	3,50	(+31,50)			$D_1 = +9{,}0 \cdot 1{,}72 = +15{,}5$	$V_1 = -(+9{,}0) = -9{,}0$
(3,0)		$M_1 = +31{,}50$	$O_1 = -\frac{31{,}50}{2{,}50} = -12{,}6$	$U_2 = +\frac{31{,}50}{2{,}50} = +12{,}6$		
$Q_{1-2} = +6{,}0$	3,50	(+21,00)			$D_2 = +6{,}0 \cdot 1{,}72 = +10{,}3$	$V_2 = -(+6{,}0) = -6{,}0$
(3,5)		$M_2 = +52{,}50$	$O_2 = -\frac{52{,}50}{2{,}50} = -21{,}0$	$U_3 = +\frac{52{,}50}{2{,}50} = +21{,}0$		
$Q_{2-3} = +2{,}5$	3,50	(+8,75)			$D_3 = +2{,}5 \cdot 1{,}72 = +4{,}3$	
(1,5)		$M_3 = +61{,}25$	$O_3, O_4 = -\frac{61{,}25}{2{,}50} = -24{,}5$			$V_3 = -1{,}5$
$Q_{3-4} = +1{,}0$	3,50	(+3,50)			$D_4 = -1{,}0 \cdot 1{,}72 = -1{,}7$	
(5,5)		$M_4 = +64{,}75$	$O_5 = -\frac{64{,}75}{2{,}50} = -25{,}9$	$U_4 = +\frac{64{,}75}{2{,}50} = +25{,}9$		
$Q_{4-5} = -4{,}5$	3,50	(−15,75)			$D_5 = -(-4{,}5) \cdot 1{,}72 = +7{,}7$	$V_4 = +(-4{,}5) = -4{,}5$
(9,5)		$M_5 = +49{,}00$	$O_6 = -\frac{49{,}00}{2{,}50} = -19{,}6$	$U_5 = +\frac{49{,}00}{2{,}50} = +19{,}6$		
$Q_{5-6} = -14{,}0$	3,50	(−49,00)			$D_6 = -(-14{,}0) \cdot 1{,}72 = +24{,}1$	$V_5 = +(-14{,}0) = -14{,}0$
(6,5)		$M_6 = 0{,}00$		$U_6 = 0$		
$B = 20{,}5$						$V_6 = -20{,}5$

Zusatz: Auf die Berechnung der Diagonalen und Vertikalen möge nochmals genauer eingegangen werden, um das statische Gefühl zu schulen. Zum Beispiel die Vertikale V_2. Zugehöriger Schnitt $\alpha_2 - \alpha_2$. An äußeren Kräften links vom Schnitte wirkt die Kraftsumme des Feldes $\bar{1}-\bar{2}$, also $Q_{1-2} = +6{,}0$ t. Sie wirkt nach oben, wie das positive Vorzeichen angibt. Da nun die beiden anderen vom Schnitte getroffenen Kräfte O_2 und U_3 in vertikaler Richtung überhaupt nicht wirken, bleibt der Vertikale V_2 nichts anderes übrig, als die gesamte Kraftsumme allein aufzunehmen.

Also muß V_2 gleich 6,0 t sein. Und ihre Richtung ist dadurch bestimmt, daß sie, um Q_{1-2} aufzuheben, nach unten wirken muß, da Q_{1-2} selber nach oben wirkt; d. h. V_2 muß auf den betrachteten Fachwerkteil drückend wirken. Hiermit ist die Beanspruchung von V_2 klargestellt. Genau entsprechend ist es bei den Diagonalen; z. B. bei D_5. Schnitt α_5—α_5. Zugehörige Kraftsumme $Q_{4-5} = -4{,}5$ t; minus, das bedeutet links nach unten, rechts nach oben. Bei Betrachtung des linken Teiles wirkt also eine Kraft nach unten. Daraus folgt, daß die Diagonale selbst mit ihrer Vertikalkomponente nach oben wirken muß. Sie wirkt also ziehend auf den linken Teil, und zwar mit einer solchen Kraft, daß $D_5 \cdot \sin\varphi = 4{,}5$ t ist. Alles dieses gilt natürlich nur, wenn die Gurtstäbe selbst in vertikaler Richtung überhaupt nicht wirken, d. h. wenn sie horizontal verlaufen (Parallelträger).

Derartige einfache Überlegungen, ohne Mathematik, nur auf Grund des — natürlich geschulten — statischen Gefühles sind mehr wert als alle Formeln.

Fünfte Aufgabe.

Wie ändern sich bei der vorigen Aufgabe die Spannkräfte, falls die Lasten am Untergurt angreifen?

Die Figur zeichne man selber auf. Dann ergibt sich folgendes: Die Ober- und Untergurtstäbe bleiben unverändert. Denn die zu diesen Stäben gehörigen Schnitte trennen bei belastetem Untergurt dieselben Kräfte ab wie bei belastetem Obergurt. Die Momente, aus denen O und U berechnet werden, sind also in beiden Belastungsfällen gleich. Auch die Diagonalen bleiben unverändert, da die zu den Diagonalen gehörigen Schnitte dieselben Lastsummen Q abteilen wie vorhin. Bei den Vertikalen ist es aber anders! Der zu einer Vertikale gehörige Schnitt geht schräg. Infolgedessen trennt er, wenn die Lasten am Obergurt angreifen, eine andere Kraftsumme ab, als wenn die Lasten unten angreifen. Für den Schnitt α_2—α_2 z. B. ist im ersten Falle die Kraftsumme $Q = A - 2{,}0 - 3{,}0$ maßgebend, im zweiten Falle dagegen die Kraftsumme $Q = A - 2{,}0 - 3{,}0 - 3{,}5$. (Man zeichne die Figur auf!) Das heißt, im ersten Falle ist die Vertikale V_2 gleich der Kraftsumme des Feldes *1—2*; im zweiten Falle ist V_2 gleich der Kraftsumme von Feld *2—3*. Entsprechend ergeben sich für sämtliche Vertikalen bei Belastung am Untergurt die Kräfte:

$V_0 = -\ \ 9{,}0$ t,
$V_1 = -\ \ 6{,}0$ „
$V_2 = -\ \ 2{,}5$ „
$V_3 = \ \ \ \ 0$ „ (aus Gleichgewicht von Knoten $\bar{3}$)
$V_4 = +\ \ 1{,}0$ „
$V_5 = -\ \ 4{,}5$ „
$V_6 = -14{,}0$ „

Wiederholung: Die Gurtstäbe und Diagonalen sind unabhängig davon, ob die Belastung oben oder unten angreift. Die Vertikalen dagegen unterscheiden sich je um die betreffende Knotenpunktslast (Belastung am Obergurt erzeugt also die größten Druckkräfte in den Vertikalen).

Sechste Aufgabe.

Der in Fig. 29 gezeichnete Fachwerkträger mit einer geraden und einer gekrümmten Gurtung ist zu berechnen!

Die Belastung sei gleichmäßig verteilt im Betrage $g = 0{,}50$ t/m.

a) Systemfigur. Der Träger hat einen geraden Obergurt und einen nach einer Parabel gekrümmten Untergurt. In der folgenden Tabelle ist zunächst die Trägerfigur bestimmt. Die Parabelordinaten ergeben sich natürlich aus der Parabelgleichung:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) .$$

Hat nun ein Knotenpunkt des Fachwerkes die Nummer m, so ist seine Entfernung vom linken Auflager

$$x = m \cdot \lambda$$

(z. B. für Punkt *3* ist $x = 3 \cdot \lambda$; usw.). Und seine Entfernung vom rechten Auflager ist

$$l - x = 10\lambda - m\lambda = (10 - m)\lambda .$$

Für einen Punkt mit der Nummer m ergibt sich also die Parabelhöhe

$$y = \frac{4f}{(10\lambda)^2} \cdot m\lambda \cdot (10 - m)\lambda = \frac{4f}{100} \cdot m \cdot (10 - m)$$

$$= \frac{4 \cdot 1{,}00}{100} \cdot m \cdot (10 - m) = 0{,}04\, m(10 - m) .$$

Nach dieser Formel lassen sich die Parabelordinaten y für jede Stelle m sehr schnell berechnen. Zu den Längen y die Endhöhe des Trägers von 0,50 m hinzugezählt, ergibt dann die Trägerhöhen h, wodurch die Systemfigur festgelegt ist (s. untenstehende Tabelle).

Nun wurden die Neigungswinkel γ der Untergurtstäbe bestimmt und hierzu gleich die weiterhin gebrauchten Werte cos und sin hinzugeschrieben. Z. B.

$$tg\gamma_1 = \frac{0{,}36}{1{,}50} = 0{,}240$$

wurde berechnet und hieraus

$$\cos\gamma_1 = 0{,}972\,, \quad \sin\gamma_1 = 0{,}233$$

gefunden. Entsprechend $tg\gamma_2 = (0{,}64 - 0{,}36) : 1{,}50 = 0{,}1867$, $\cos\gamma_2 = 0{,}983$, $\sin\gamma_2 = 0{,}184$; usw. Dies geht sehr schnell mittels solcher Tabellen, in denen sin, cos und tg der Winkel direkt, ohne Logarithmen, nebeneinander angegeben sind. Hat man eine solche Tabelle nicht zur Hand, so rechne man die Länge der

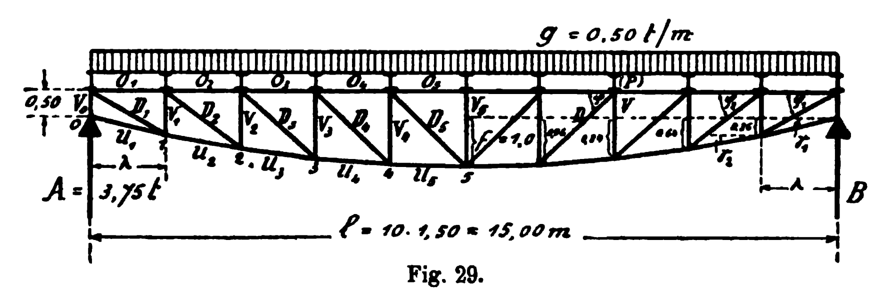


Fig. 29.

Stäbe aus und schreibe sie in die Systemfigur hinein, so, wie es bei der zweiten Aufgabe dieses Paragraphen gemacht wurde (Fig. 27).

Tabelle I: Hilfswerte.

Knotenpunkt	Parabelordinaten $y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$ $= 0{,}04\,m(10 - m)$	Trägerhöhen $h = y + 0{,}50$	Neigungswinkel			
			Untergurt		Diagonalen	
0	0,00	$h_0 = 0{,}50$				
1	0,04 · 1 · 9 = 0,36	$h_1 = 0{,}86$	$\cos\gamma_1 = 0{,}972$	$\sin\gamma_1 = 0{,}233$	$\cos\varphi_1 = 0{,}868$	$\sin\varphi_1 = 0{,}497$
2	0,04 · 2 · 8 = 0,64	$h_2 = 1{,}14$	$\cos\gamma_2 = 0{,}983$	$\sin\gamma_2 = 0{,}184$	$\cos\varphi_2 = 0{,}796$	$\sin\varphi_2 = 0{,}605$
3	0,04 · 3 · 7 = 0,84	$h_3 = 1{,}34$	$\cos\gamma_3 = 0{,}991$	$\sin\gamma_3 = 0{,}132$	$\cos\varphi_3 = 0{,}743$	$\sin\varphi_3 = 0{,}669$
4	0,04 · 4 · 6 = 0,96	$h_4 = 1{,}46$	$\cos\gamma_4 = 0{,}997$	$\sin\gamma_4 = 0{,}080$	$\cos\varphi_4 = 0{,}717$	$\sin\varphi_4 = 0{,}698$
5	0,04 · 5 · 5 = 1,00	$h_5 = 1{,}50$	$\cos\gamma_5 = 1{,}000$	$\sin\gamma_5 = 0{,}027$	$\cos\varphi_5 = 0{,}707$	$\sin\varphi_5 = 0{,}707$

b) Momente und Spannkräfte. Nun die Berechnung der Momente und Spannkräfte. Die Belastung besteht aus einer indirekt wirkenden, gleichmäßig verteilten Last von $g = 0{,}50$ t/m. Für diesen Fall haben wir aber zur Berechnung der Momente manche nützliche Regel abgeleitet. Zunächst: Da es sich nur um die

Momente an den Belastungspunkten handelt, dürfen wir von der **indirekten** Einwirkung der Lasten absehen und können so rechnen, als ob die Belastung *direkt* wirkte (s. Band I, § 64, II). Hierdurch sparen wir das Aufstellen der einzelnen Knotenpunktslasten. Ferner: Da die Belastung **gleichmäßig** verteilt ist, können wir für jeden Knotenpunkt das Moment durch eine einfache Formel sofort hinschreiben; nämlich (s. Band I, § 59, Formel II):

$$M = \frac{g}{2} x(l - x) .$$

Hierdurch sparen wir das Ausrechnen der einzelnen Summenausdrücke. (Man sieht an diesem Beispiele, wie vorteilhaft die Einführung der — bereits nach allen Richtungen hin untersuchten — Biegungsmomente M für die Fachwerkberechnung ist.) Da im vorliegenden Falle die Feldweiten einander gleich sind, können wir in der obigen Formel die Abstände x und $l - x$ noch durch die Feldweite λ ausdrücken: Hat ein Punkt die Nummer m, so ist seine Entfernung vom linken Auflager $x = m\lambda$ und vom rechten Auflager $x' = (10 - m)\lambda$. Demnach ist sein Moment:

$$M = \frac{g}{2} \cdot m\lambda \cdot (10 - m)\lambda = \frac{g}{2} \lambda^2 \cdot m(10 - m)$$

$$= \frac{0,5}{2} \cdot 1,50^2 \cdot m(10 - m)$$

$$= 0.5625 \cdot m(10 - m) .$$

Im übrigen geschieht die Berechnung wie bei der zweiten Aufgabe dieses Paragraphen (Träger mit gekrümmter Gurtung). Nur die Vertikalen lassen sich etwas einfacher bestimmen. Da der Träger **einen** geradlinigen Gurt hat, der außerdem rechtwinklig zu den Vertikalen verläuft, so verwenden wir die Formel Fig. 21b:

$$V = -D \sin\varphi - P .$$

Hierin ist P die Knotenpunktslast (Lasten am Obergurt). Im vorliegenden Falle ist

$$P = 1,50 \cdot 0,50 = 0,75 \text{ t.}$$

Also ist an jedem Knotenpunkt die betreffende Vertikale

$$V = -(D \cdot \sin\varphi + 0,75) .$$

Bei der ersten und der letzten Vertikale ist die Knotenpunktslast natürlich nur gleich 0,375 t. Die mittelste Vertikale ergibt sich direkt gleich $(-P)$. In dieser Weise sind die Vertikalen ermittelt.

Tabelle II: Momente und Stabkräfte.

Knotenpunkt	Moment (mt) $M = \frac{0,5}{2} x(l-x)$ $= 0,5625 \cdot m(10-m)$	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h} \frac{1}{\cos\gamma}$	$\left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_n}{h_n}\right)$	Diagonalen (t) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t) $V = -(D \sin\varphi + 0,8)$ $V_0 = -(D_1 \sin\varphi_1 + 0,4)$
0	0,0	0,0		$U_1 =$ 0,0			
					+5,9	$D_1 = +6,8$	$V_0 = -(3,4+0,4) = -3,8$
1	$0,5625 \cdot 1 \cdot 9 = +5,1$	+5,9	$O_1 = -5,9$	$U_2 = +6,0$			
					+2,0	$D_2 = +2,5$	$V_1 = -(1,5+0,8) = -2,3$
2	$0,5625 \cdot 2 \cdot 8 = +9,0$	+7,9	$O_2 = -7,9$	$U_3 = +8,0$			
					+0,9	$D_3 = +1,2$	$V_2 = -(0,8+0,8) = -1,6$
3	$0,5625 \cdot 3 \cdot 7 = +11,8$	+8,8	$O_3 = -8,8$	$U_4 = +8,9$			
					+0,5	$D_4 = +0,7$	$V_3 = -(0,5+0,8) = -1,3$
4	$0,5625 \cdot 4 \cdot 6 = +13,5$	+9,3	$O_4 = -9,3$	$U_5 = +9,3$			
					+0,1	$D_5 = +0,1$	$V_4 = -(0,1+0,8) = -0,9$
5	$0,5625 \cdot 5 \cdot 5 = +14,1$	+9,4	$O_5 = -9,4$				$V_5 = -0,8$

Eine *Rechenkontrolle* kann man sich dadurch schaffen, daß man in einem Felde einen vertikalen Schnitt legt, der durch Obergurt, Diagonale und Untergurt geht. Ist dann Q die Querkraft des betreffenden Feldes, so muß die Beziehung bestehen:

$$D \cdot \sin\varphi + U \cdot \sin\gamma = Q .$$

Hiernach kann man D und U kontrollieren. Entsprechend nach Formel (Va) in § 7b die Vertikalen V. Die Kraftsumme Q berechnet sich bei indirekter, gleichmäßig verteilter Last sehr einfach nach der Formel $Q = g \cdot x''$, worin x'' der Abstand von Mitte des betreffenden Feldes bis Mitte Spannweite des Trägers ist (siehe Band I, § 64, I).

Siebente Aufgabe.

Wie ändern sich die bisher benutzten Formeln der Spannkräfte im Falle schräger Belastung?

1) Gurtstäbe.

Um den Stab O in Fig. 30 zu berechnen, legen wir den Schnitt α—α und nehmen Punkt m als Bezugspunkt für die Momente. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$O \cdot r_o + M_m = 0 ,$$

worin M_m die Summe der statischen Momente aller Kräfte bedeutet, die durch den Schnitt α—α abgetrennt werden. Rechtsherum zeigende Kräfte sind am linken Teile positiv genommen. Statt der Länge r kann man auch die Trägerhöhe h_m einführen,

indem man r_o durch $h_m \cdot \cos\beta$ ersetzt, so daß die Formeln zur Verfügung stehen:

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{M_m}{r_o}, \quad \text{oder}$$

$$\text{(Ia)} \qquad O = -\left(\frac{M_m}{h_m}\right) : \cos\beta .$$

Also dieselben Formeln wie bei vertikaler Belastung. Nur der Wert M_m ist jetzt schwieriger auszurechnen, indem jede schräge Last mit ihrem Abstande vom Punkte m multipliziert werden muß und dann die Summe dieser einzelnen Produkte zu bilden ist. (Die regulären „Biegungsmomente" beziehen sich ja immer nur auf vertikale Belastung.)

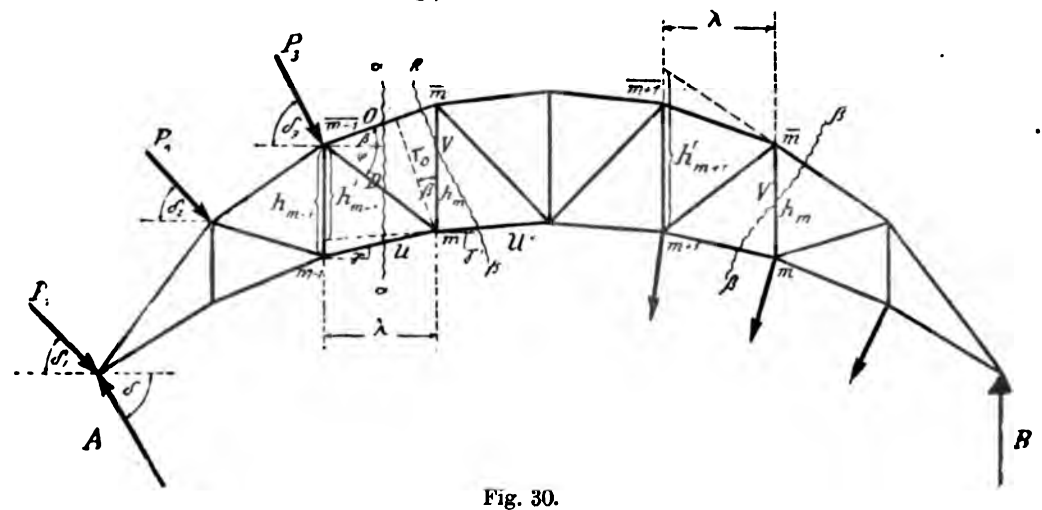


Fig. 30.

Genau entsprechend ergibt sich zur Berechnung von U (Bezugspunkt $\overline{m-1}$):

$$\text{(I)} \qquad U = +\frac{M_{\overline{m-1}}}{r_u}, \quad \text{oder}$$

$$\text{(Ia)} \qquad U = +\left(\frac{M_{\overline{m-1}}}{h_{m-1}}\right) : \cos\gamma .$$

Auf eins muß man aber bei schräger Belastung achten: Jetzt sind für zwei übereinander liegende Knotenpunkte, z. B. $m-1$ und $\overline{m-1}$ die Momente verschieden. Denn die äußeren Kräfte geben, da sie auch Horizontalkomponenten enthalten, für zwei in ungleicher Höhe befindliche Punkte ungleiche Momente. Deshalb achte man darauf, daß für O das Moment am unteren Knotenpunkte m, für U aber am oberen Knotenpunkte $\overline{m-1}$ zu nehmen ist.

2) Diagonalen.

a. Bei vertikaler Belastung hatten wir die Diagonalen aus der Bedingung ermittelt, daß die Summe aller Horizontalprojektionen gleich Null sein muß. Dieselbe Gleichung können wir auch jetzt anwenden. Nur ist zu beachten, daß bei schräger Belastung auch die äußeren Kräfte Horizontalprojektionen abgeben. Die Summe der Horizontalprojektionen der äußeren Kräfte seitlich vom Schnitt α—α wollen wir mit $\sum_\alpha H$ bezeichnen. Nehmen wir die Richtung von links nach rechts positiv, so wäre also für die Diagonale D von Fig. 30 (Schnitt α—α):

$$\sum_\alpha H = -A \cdot \cos\delta + P_1 \cdot \cos\delta_1 + P_2 \cdot \cos\delta_2 + P_3 \cdot \cos\delta_3 \,.$$

Dann lautet die Horizontal-Gleichgewichtsbedingung für den Schnitt α—α:

$$O \cdot \cos\beta + D \cdot \cos\varphi + U \cdot \cos\gamma + \sum_\alpha H = 0 \,,$$

$$D \cos\varphi = -O \cdot \cos\beta - U \cdot \cos\gamma - \sum_\alpha H \,.$$

Setzen wir nun für $O \cdot \cos\beta$ und $U \cdot \cos\gamma$ die bereits gefundenen Werte ein, nämlich:

$$\text{(Ia)} \qquad \left\{ \begin{aligned} O \cdot \cos\beta &= -\frac{M_m}{h_m} \,, \\ U \cdot \cos\gamma &= +\frac{M_{\overline{m-1}}}{h_{m-1}} \,, \end{aligned} \right.$$

so entsteht für D die Formel:

$$D \cos\varphi = -\left(-\frac{M_m}{h_m}\right) - \frac{M_{\overline{m-1}}}{h_{m-1}} - \sum_\alpha H \,,$$

$$\text{(II)} \qquad D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{\overline{m-1}}}{h_{m-1}} - \sum_\alpha H\right] .$$

Also eine entsprechende Formel wie bei vertikaler Belastung: In der Klammer steht zunächst das Moment und die Trägerhöhe an dem Knotenpunkte, der dem von dem Schnitt α—α getroffenen *Obergurt*stab gegenüberliegt. Dann kommen die gleichen Größen des dem *Untergurt*stabe gegenüberliegenden Knotenpunktes. Schließlich tritt noch die Summe der Horizontalprojektionen der äußeren Kräfte hinzu. Beim Aufstellen der $\sum_\alpha H$ werden am linken Teile die nach rechts und am rechten Teile die nach links zeigenden Kräfte positiv genommen.

b. Wenn das Fachwerk Vertikalen hat, wie Fig. 30, kann man die Diagonale D auch recht gut aus dem Gleichgewicht eines

ihrer Endknotenpunkte finden. Und zwar wird man zweckmäßig denjenigen Knotenpunkt betrachten, an dem keine äußeren Kräfte (Lasten) sind. In Fig. 30 findet man aus dem Gleichgewicht des Knotens m:

$$D \cdot \cos\varphi = U' \cdot \cos\gamma' - U \cdot \cos\gamma .$$

Setzt man für U' und U die Werte ein, so wird

$$\text{(IIa)} \qquad D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_{\bar{m}}}{h_m} - \frac{M_{\overline{m-1}}}{h_{m-1}}\right).$$

Bei Fachwerk mit Vertikalen ist diese Formel zweckmäßig; bei Fachwerk ohne Vertikalen Formel (II).

3) Vertikalen.

Die Berechnung der Vertikalen geschieht in derselben Weise wie bei vertikaler Belastung (s. Fig. 20): Um die Vertikale V in Fig. 30, linke Seite, zu finden, verlängere man den vom Schnitte β—β getroffenen Untergurtstab nach links und bestimme die Hilfshöhe h'_{m-1}. Dann ist

$$\text{(IIIa)} \qquad V = \frac{1}{\lambda}\left(M_{\overline{m-1}} - \frac{M_{\bar{m}}}{h_m} \cdot h'_{m-1}\right).$$

Wirkt die Last unten (Fig. 30, rechte Seite), so verlängere man den vom Schnitte getroffenen Obergurtstab und findet:

$$\text{(IIIb)} \qquad V = \frac{1}{\lambda}\left(-M_{m+1} + \frac{M_m}{h_m} \cdot h'_{m+1}\right).$$

In diesen Formeln muß natürlich sorgfältig darauf geachtet werden, daß M_m (für den unteren Knotenpunkt) ein anderer Wert ist als $M_{\bar{m}}$ (für den oberen Knotenpunkt).

Die rechnerische Ermittlung der Spannkräfte bei schräger Belastung ist etwas umständlich, namentlich, da die Berechnung der Momente ziemlich viel Arbeit macht. Bei schräger Belastung wird man deshalb häufig die graphischen Methoden vorziehen. Doch muß man schon der Kontrolle wegen auch die analytische Methode kennen. Für besondere Fälle (Bogenträger) läßt sich übrigens die Untersuchung noch vereinfachen, wie an der betreffenden Stelle gezeigt werden wird.

§ 9.

IV. Methode: Zeichnerisch, durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf zusammenhängende Fachwerkteile. (Culmann.)

Bei dieser Methode gehen wir ebenso vor wie im vorigen Paragraphen. Wir legen einen Schnitt α—α durch die Stäbe, die berechnet werden sollen, und betrachten dann das Gleichgewicht

eines der beiden Teile, in die das Fachwerk durch diesen Schnitt zerlegt ist. Der Unterschied gegen die frühere Methode besteht nur darin, daß die Gleichgewichtsbetrachtung jetzt nicht in rechnerischer, sondern in zeichnerischer Weise durchgeführt wird.

I. Mechanische Grundlagen.

Zunächst wollen wir einen einfachen Satz aufstellen, der immer dann gilt, wenn eine Gruppe von zwei bzw. vier Kräften auf einen Körper einwirkt und diesen im Ruhezustande hält.

1. Gleichgewichtsbedingungen bei zwei Kräften.

Wirken auf einen Körper nur *zwei* Kräfte (Fig. 31b), und zeigt es sich, daß der Körper unter der Einwirkung dieser Kräfte in der Ruhelage bleibt, so gilt augenscheinlich folgende Aussage: Die beiden Kräfte sind gleich groß, haben entgegengesetzte Richtung und liegen in ein und derselben Geraden. Diese drei Eigenschaften müssen also die Kräfte haben, falls der Körper im Ruhezustande bleiben soll. Namentlich die zuletzt angeführte Bedingung (daß sie in derselben Geraden liegen müssen) wollen wir uns für das Folgende merken.

2. Gleichgewichtsbedingungen bei vier Kräften.

Haben wir nun an einem Körper *vier* Kräfte, so können wir diesen Fall auf den vorigen zurückführen (Fig. 31c). Wir ersetzen P_1 und P_2 durch ihre Ersatzkraft R_{1-2}, und P_3 und P_4 durch ihre Ersatzkraft R_{3-4}. Dann haben wir statt der vier Kräfte nur die beiden Kräfte R_{1-2} und R_{3-4}.

Hinsichtlich dieser beiden Ersatzkräfte läßt sich nun folgende Aussage machen: Da die ursprünglichen vier Kräfte im Gleichgewicht waren, müssen auch ihre beiden Ersatzkräfte ein Gleichgewichtssystem bilden. Sie müssen also dieselbe Eigenschaft haben, die wir aus Fig. 31b abgelesen haben: gleich groß sein, entgegengesetzte Pfeilrichtung haben und in ein und derselben Geraden liegen.

Diese letztere Eigenschaft ist für das Folgende besonders wichtig. Wir können sie auch so ausdrücken: Die beiden Ersatzkräfte müssen in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte *1*, *2* und *3*, *4* liegen, in denen sich die Kräfte P_1, P_2 und P_3, P_4 geschnitten haben (Fig. 31c). Denn hätte z. B. die Ersatzkraft R_{1-2} eine von dieser Verbindungslinie abweichende Richtung, so könnte sie nicht mehr mit R_{3-4} in einer Geraden liegen. Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Halten sich an einem Körper vier Kräfte das Gleichgewicht, und bringen wir je zwei dieser Kräfte miteinander zum Schnitt, so liegt sowohl die Ersatzkraft der ersten beiden Kräfte als auch die Ersatzkraft der letzten beiden Kräfte in der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte.

Dieses ist also eine besondere Eigenschaft einer derartigen, aus vier Kräften bestehenden Gleichgewichtsgruppe. Sie wurde zuerst von Culmann (Zürich) hervorgehoben und zur Berechnung der Stabkräfte eines Fachwerkes benutzt.

II. Anwendung zur Stabkraftbestimmung.

Betrachten wir jetzt den Fachwerkteil *0—1—2* in Fig. 31a. Auf ihn wirken die *vier* im Gleichgewicht befindlichen Kräfte A, U, D und O. Wir haben also gerade den vorhin betrachteten Fall: Körper, der durch vier Kräfte im Ruhezustand gehalten wird, und können also den vorhin aufgestellten mechanischen Satz verwenden.

Von den vier Kräften ist der Auflagerdruck A gegeben; die Stabkräfte U, D und O sollen gefunden werden. Zunächst bringen wir je zwei der Kräfte zum Schnitt; z. B. A und U (Schnittpunkt *3* in Fig. 31a) und D und O (Schnittpunkt *1*). Betrachten wir nun die beiden Kräfte A und U. Von ihnen kennen wir 1) *Größe* und *Richtung* von A, 2) *Richtung* von U. Ferner wissen wir aber jetzt aus unserem mechanischen Satze noch, daß 3) die Resultierende von A und U in Fig. 31a in der Verbindungslinie L der Schnittpunkte *3* und *1* liegen muß.

Diese letztere Eigenschaft der beiden Kräfte A und U ermöglicht es, die noch fehlende *Größe* von U zu finden: Wir zeichnen (Fig. 31d) $A = \overline{ab}$, ziehen durch den einen Endpunkt von A die Parallele zu der Linie L von Fig. 31a und durch den anderen die Parallele zu U. Dann ist die Stabkraft U dargestellt durch die Strecke $c—a$. Denn die Richtung von $\overline{ca}$ ist parallel dem Stabe U, und die Größe der Kraft $\overline{ca}$ ist so, daß die beiden Kräfte $\overline{ca}$ und $\overline{ab}$ eine Ersatzkraft, $\overline{cb}$, ergeben, die parallel ist der Verbindungslinie L der Schnittpunkte *3* und *1*. Zeichnet man also diese Ersatzkraft in Fig. 31a ein, so liegt sie auf der Geraden L, erfüllt somit die vorhin abgeleitete Bedingung. Hiermit haben wir aus der Eigenschaft, daß A und U eine Ersatzkraft ergeben müssen, die in die Hilfslinie L fällt, die bisher unbekannte Stabkraft U ermittelt.

Nun gehen wir zu den beiden anderen unbekannten Kräften

O und D. Diese lassen sich aus der Bedingung bestimmen, daß ihre Ersatzkraft gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung der Ersatzkraft von A und U haben muß. Die Ersatzkraft von O und D ist in Fig. 31d also durch die Länge bc gegeben. Die Richtung ist so, wie der geschlossene Pfeil angibt. [Man beachte, daß die Ersatzkraft mehrerer Kräfte von dem Anfangspunkt des Kräftepolygons nach dem Endpunkte desselben zeigt. Die Ersatzkraft von U und A geht also von c nach b; folglich ist die Ersatzkraft von O und D dargestellt durch die Strecke von b nach c.] Um nun aus ihrer Ersatzkraft bc die Größen der beiden Kräfte O und D selber zu finden, ziehen wir durch Anfangs- und Endpunkt von $\overline{bc}$ Parallelen

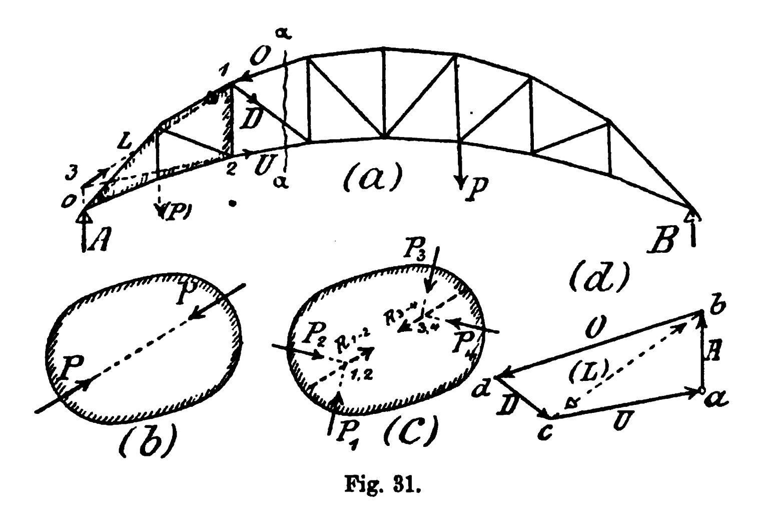


Fig. 31.

zu O und D. Dann entsteht ein Kräftedreieck mit den Größen O und D. Die Pfeile zeichnet man übrigens am besten zum Schlusse ein, indem man von $A = \overline{ab}$ anfängt, und dann weiter nach d, c und zurück nach a gelangt. Das Viereck $a—b—d—c$ nennen wir „*Culmann*sches *Viereck*".

III. Wiederholung.

Somit haben wir die von dem Schnitte $\alpha-\alpha$ in Fig. 31a getroffenen Spannkräfte O, D und U ermittelt. Als Mittel hierzu benutzten wir die im ersten Absatz aufgestellte spezielle Gleichgewichtsbedingung für vier Kräfte: Die beiden Resultierenden je zweier dieser Kräfte müssen gleich groß, entgegengesetzt gerichtet sein und in der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte liegen. Die praktische Anwendung war folgende: Von den vier Kräften A, U, D und O bringen wir je zwei zum Schnitt und ziehen

die Verbindungslinie L der Schnittpunkte. Dann zerlegen wir die bekannte Kraft A nach den Richtungen U und L und finden hierdurch zunächst U. Schließlich zerlegen wir noch L nach den Richtungen O und D und finden hierdurch auch die beiden letzteren Spannkräfte (Fig. 31 d).

Diese Methode ist recht praktisch, solange man es nur mit einer äußeren Kraft, A, zu tun hat. Treten noch andere Kräfte hinzu, z. B. (P), so muß man erst A und (P) zu einer Ersatzkraft vereinen, so daß man im ganzen (einschließlich der Stabkräfte) immer nur *vier* Kräfte hat. In solchen Fällen kommt man nach *Cremona* oder *Ritter* schneller zum Ziel. (Beispiel für die Anwendung des *Culmann*schen Verfahrens s. letzte Aufgabe von § 22.)

§ 10.

Allgemeine Wiederholung des 1. Vortrages.

In diesem Vortrage haben wir verschiedene Methoden zur Berechnung von Stabkräften entwickelt. Das Fundament aller dieser Verfahren waren die Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik. Diese sind — was nochmals hervorgehoben sei — streng mathematisch richtig, so daß die Fachwerktheorie auf guter, solider Grundlage steht.

Im einzelnen sind wir bei den verschiedenen Methoden folgendermaßen vorgegangen:

I. Wir betrachten das Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte.

Die hierfür gültigen Bedingungen verwenden wir

1. in analytischer Form [$R_x = 0$, $R_y = 0$],
2. in graphischer Form [an jedem Punkte geschlossenes Kräftepolygon. *Cremona*].

II. Wir betrachten das Gleichgewicht zusammenhängender Fachwerkteile.

Die hierfür gültigen Bedingungen verwenden wir

1. in analytischer Form [*Ritter* u. a.],
2. in graphischer Form [*Culmann*sches Viereck].

Es sei aber daran erinnert, daß wir bisher unsere Untersuchungen nur auf das einfachste, allerdings auch wichtigste Fachwerk ausgedehnt haben, nämlich das **Dreieckfachwerk** (s. § 1, III). Der folgende Vortrag wird nun eine allgemeine, mehr umfassende Betrachtung von Fachwerkkonstruktionen bringen. Hier wird namentlich gezeigt werden, daß die Methoden, die wir bisher nur auf die einfachen Dreieckfachwerke angewendet haben, auch in

den schwierigsten Fällen, bei ganz unregelmäßigen Fachwerken, zum Ziele führen. Allerdings sind hierzu noch verschiedene Hilfsbetrachtungen notwendig.

---

2. Vortrag:

Berechnungsmethoden für nicht-einfache Fachwerke. Allgemeine Untersuchungen über Fachwerksysteme.

Im 1. Vortrage haben wir die wichtigsten Methoden zur Berechnung von Fachwerken besprochen und auch eine ganze Reihe von Beispielen mit Hilfe dieser Methoden behandelt. Nun wollen wir die Frage aufwerfen: Genügen diese bisher durchgenommenen Methoden, um jedes Fachwerk zu berechnen, oder gibt es auch Fachwerke, die sich nach den bisher gezeigten Verfahren noch nicht berechnen lassen? Die Beantwortung dieser Frage erfordert eine allgemeine Untersuchung der Fachwerkkonstruktionen überhaupt.

§ 11.

Einteilung der Fachwerke in statisch bestimmte, labile und statisch unbestimmte Konstruktionen.

I. Mathematische Wiederholung.

Für das Folgende brauchen wir zunächst eine kurze Darlegung aus der Mathematik. Und zwar soll untersucht werden, was es zu bedeuten hat, wenn bei einer Gruppe von Gleichungen 1) die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist, 2) wenn sie größer und 3) wenn sie kleiner ist.

1. Anzahl der Gleichungen gleich Anzahl der Unbekannten.

Bei irgendeiner physikalischen Untersuchung möge eine Anzahl von Unbekannten x, y usw. auftreten, zu deren Bestimmung eine Anzahl von Gleichungen vorhanden ist. (Z. B. Stab- und Auflagerkräfte, zu deren Bestimmung Gleichgewichtsbedingungen verwendet werden.) Als Beispiel diene die Gruppe von Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 18\,, \\ 2x + 4y + 1z = 13\,, \\ 1x + 3y + 4z = 19\,. \end{cases}$$

Wie nun die Mathematik zeigt, lassen sich aus diesen drei Gleichungen die drei Unbekannten ermitteln; d. h. die drei Gleichungen ergeben für die drei Unbekannten x, y, z bestimmte Werte. Und

umgekehrt, setzt man für die drei Unbekannten die betreffenden Werte ein, so sind die Gleichungen erfüllt. Allgemein lautet die Regel: Stehen zur Berechnung von n Unbekannten n Gleichungen zur Verfügung, so ergibt sich durch Auflösung der Gleichungen für jede Unbekannte stets ein bestimmter Wert.

Sind insbesondere, wie im obigen Beispiele, die Gleichungen vom *ersten* Grade, d. h. kommen die Unbekannten nur in der ersten Potenz vor, so ergibt sich für jede Unbekannte nur *ein* bestimmter Wert, der die Gleichungen befriedigt. (Eine Gleichung *zweiten* Grades liefert für die Unbekannte *zwei* Werte, von denen jeder die Gleichung befriedigt.) Die physikalische Bedeutung dieser Aussage ist, daß die zunächst unbekannten Größen x, y usw. am Schlusse der Rechnung vollständig eindeutig bestimmt vorliegen.

2. Mehr Gleichungen als Unbekannte.

Nun wollen wir aber die folgende Gruppe von Gleichungen betrachten:

$$\left\{\begin{aligned} 5x + 2y &= 9\,, \\ 2x + 4y &= 10\,, \\ 1x + 3y &= 20\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Hier könnten wir zunächst z. B. die ersten beiden Gleichungen auflösen. Es würde sich ergeben $x = 1$, $y = 2$. Setzen wir nun aber diese Werte von x und y in die dritte Gleichung ein, so zeigt sich, daß sie nicht befriedigt wird. Denn $1x + 3y$ ergibt 7 und nicht 20. Es müßte direkt ein Zufall sein, daß bei der obigen Gruppe auch die dritte Gleichung erfüllt wird. Im allgemeinen ist es vielmehr so: Ist die Anzahl der Gleichungen *größer* als die Anzahl der Unbekannten, so verlangen die ersteren mehr, als die Unbekannten erfüllen können. Die physikalische Bedeutung dieses Widerspruches ist die, daß die Aufgabe sich überhaupt nicht lösen läßt, sondern daß bei der Ableitung der Gleichungen eine falsche Voraussetzung unterlaufen ist.

3. Mehr Unbekannte als Gleichungen.

Als dritten Fall wollen wir folgende Gruppe betrachten:

$$\left\{\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 18\,, \\ 2x + 4y + 1z &= 13\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Also zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Hier zeigt die Mathematik, daß die Gleichungen nicht ausreichen, um die Unbekannten vollständig zu bestimmen. Aus den obigen Gleichungen

kann man noch gar nicht wissen, welchen Wert die Unbekannten x, y und z eigentlich haben werden. Es müßte vielmehr zu ihrer Bestimmung noch eine weitere Gleichung aufgesucht werden. Physikalisch gesprochen: Ist die Anzahl der Gleichungen *kleiner* als die Anzahl der Unbekannten, so läßt sich die betreffende Aufgabe mit Hilfe dieser Gleichungen allein noch nicht lösen. Es muß vielmehr versucht werden, auf irgendeine Weise noch weitere Gleichungen zu erhalten.

Zusammenstellung: Zusammenfassend haben wir also folgendes gesehen: Sind m Gleichungen ersten Grades vorhanden und ist die Anzahl der Unbekannten gleich n, so sind folgende Fälle möglich:

$$1) \quad m = n .$$

Problem vollständig lösbar. Für jede Unbekannte ergibt sich ein bestimmter Wert.

$$2) \quad m > n .$$

Problem nicht erfüllbar. Gleichungen verlangen Unmögliches.

$$3) \quad m < n .$$

Problem lösbar, jedoch reichen die angeschriebenen Gleichungen noch nicht zur Bestimmung der Unbekannten aus.

II. Anwendung auf Fachwerke.

Nun betrachten wir eine Fachwerkkonstruktion. Sie sei nach dem einfachsten, in § 3 und 4 gezeigten Verfahren berechnet; d. h. indem für jeden Knotenpunkt die beiden Gleichgewichtsbedingungen $R_x = 0$ und $R_y = 0$ verwendet sind. Insgesamt habe das Fachwerk k Knotenpunkte:

k = Anzahl der Knotenpunkte.

Denken wir uns nun für jeden der k Punkte diese zwei Bedingungen angeschrieben und sämtliche so entstandenen Gleichungen untereinander gesetzt, so haben wir insgesamt eine Gruppe von $2 \cdot k$ Gleichungen:

$2k$ = Anzahl der Gleichungen.

Und zwar sind diese Gleichungen sämtlich vom ersten Grade (vgl. die Beispiele von § 4). Diese $2k$ Gleichungen stellen also die Bedingung dar, daß jeder Knotenpunkt des Fachwerkes sich im Ruhezustand befindet.

Unbekannt in diesen $2k$ Gleichungen sind die Spannkräfte und Auflagerkräfte. Es sei

u = Anzahl der Stab- und Auflagerunbekannten.

Vergleichen wir nun die Zahl u der Unbekannten mit der Zahl $2k$

der zu erfüllenden Gleichungen, so lassen sich unter Anwendung des Absatzes I dieses Paragraphen folgende Schlüsse ziehen.

$$1)\quad u = 2k,$$

d. h. *es sei die Anzahl der Unbekannten gerade gleich der Anzahl der Gleichungen.* In diesem Falle lassen sich die sämtlichen Unbekannten berechnen. Für jede Unbekannte ergibt sich durch Auflösung der Gleichungen ein bestimmter Wert. Setzt man diese Werte in die Gleichungen ein, so werden sämtliche Gleichungen erfüllt. Physikalisch gesprochen hat dieser Fall also folgende Bedeutung: Sämtliche Stab- und Auflagerkräfte lassen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Und diese so ermittelten Stab- und Auflagerkräfte haben dann aber auch tatsächlich die Eigenschaft, daß sie jeden Punkt des Fachwerkes im Ruhezustand halten.

Augenscheinlich ist diese Gruppe von Fachwerken die wichtigste. Sie lassen sich auf jeden Fall berechnen, da ja ihre Berechnung nichts weiter ist, als die mathematische Aufgabe, eine Anzahl von Gleichungen ersten Grades zu lösen. Sie sind aber auch auf jeden Fall standsicher, denn durch die Erfüllung der $2k$ Bedingungen ist ja mathematisch nachgewiesen, daß jeder Punkt und somit auch die ganze Konstruktion dauernd in der Ruhelage ist. (Natürlich müssen die Abmessungen den berechneten Kräften entsprechend gewählt werden.) Man nennt solche Fachwerke

statisch bestimmt.

(Da sie mit den Regeln der einfachen Statik zu bestimmen sind.) Der I. und II. Band des vorliegenden Buches beschäftigt sich fast ausschließlich mit diesen „statisch bestimmten“ Konstruktionen.

$$2)\quad u < 2k,$$

d. h. *es sei die Anzahl der Unbekannten kleiner als die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen.*

Dieser Fall bedeutet, daß sich die vorgeschriebenen $2k$ Gleichgewichtsbedingungen mit den zur Verfügung stehenden Unbekannten überhaupt nicht erfüllen lassen. Oder, im physikalischen Sinne gesprochen, die vorhandenen Stab- und Auflagerkräfte reichen nicht aus, um den Ruhezustand des Fachwerkes zu ermöglichen. Es müßten noch neue Kräfte (Stäbe bzw. Auflager) hinzugefügt werden, um die Voraussetzung der ganzen Rechnung, nämlich den Zustand des Gleichgewichtes, überhaupt erst möglich zu machen

Dann erst könnte die eigentliche Berechnung der Konstruktion erfolgen.

Für die Praxis sind derartige Konstruktionen, die nicht genügend Stäbe bzw. Auflager haben, natürlich unbrauchbar. Sobald sie Last bekommen, bleiben die einzelnen Knotenpunkte gar nicht im Ruhezustand, sondern klappen einfach zusammen. Ein solches Fachwerk gehört also nicht mehr in das Gebiet der Statik, sondern der Dynamik (Lehre von der Bewegung) bzw. zum § 330 des Strafgesetzbuches (Verstoß gegen die anerkannten Regeln der Baukunst). Man nennt derartige nicht standsichere Konstruktionen

labil.

(Da sie unbeständig, nicht im Ruhezustand, sind.)

3) $u > 2k$,

d. h. *es sei die Anzahl der Unbekannten größer, als die doppelte Anzahl der Knotenpunkte ist.*

In diesem Fall reichen die Gleichungen nicht zur Berechnung der Unbekannten aus. Im physikalischen Sinne: Das Fachwerk hat so viel Stab- und Auflagerkräfte, daß die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht genügend Beziehungen liefern, um diese Kräfte berechnen zu können. Die bisherigen, in § 3 bis § 9 entwickelten Methoden, die ja sämtlich nichts anderes als die Gleichgewichtsbedingungen in verschiedenen Formen darstellen, reichen also in diesem Fall nicht zur Berechnung aus.

Hinsichtlich der Standsicherheit sind derartige Konstruktionen aber natürlich recht günstig, da sie ja mehr Stab- und Auflagerkräfte haben, als zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen nötig sind. Nur die Berechnung ist erschwert. Man muß außer den Gleichgewichtsbedingungen noch die Betrachtung der Formänderungen oder aber gewisse Annahmen zu Hilfe nehmen. Infolge dieser abweichenden Berechnungsmethode nehmen sie in der Theorie der Tragwerke eine gewisse besondere („vornehme") Stellung ein. In § 34, 87, 88 des I. Bandes und auch später sind derartige Konstruktionen gelegentlich bereits untersucht. Die eingehende Theorie bringt der III. Band des vorliegenden Buches. Man nennt sie

statisch unbestimmt.

(Da zu ihrer Bestimmung die einfache Statik nicht mehr ausreicht.)

III. Bemerkungen hinsichtlich der Unbekannten.

Hinsichtlich der „Unbekannten", um deren Anzahl es sich handelt, noch eine kurze Bemerkung. Es sind dieses also die Stab- und Auflagerkräfte. Man kann auch so sagen: Es sind diejenigen Kräfte, die in dem Fachwerk und dessen Lagerung geweckt werden, sobald die Lasten zu wirken beginnen. Die Bezeichnung „Unbekannte" bezieht sich also mehr auf die mathematische Seite, während der Name „widerstehende Kraft" mehr die statische Seite treffen würde. Beide Ausdrücke bezeichnen dasselbe; denn die widerstehenden Kräfte (die in den Stäben und an den Auflagern den Lasten Widerstand leisten) sind ja eben diejenigen Kräfte, die in den Gleichgewichtsbedingungen als Unbekannte auftreten.

In der Sprache der Mathematik würde man die Lasten als die „unabhängigen Variablen" und die widerstehenden Kräfte als die „abhängigen Variablen" bezeichnen. Denn an und für sich können sowohl die ersteren wie die letzteren in allen möglichen Grenzen variieren. Aber, die Lasten können ganz beliebig variieren, die widerstehenden Kräfte dagegen nicht. Denn letztere sind ja in bestimmter Weise von den Lasten abhängig; sie sind eine „Funktion" der Lasten.

Also: Unbekannte, abhängige Variable, widerstehende Kraft ist dasselbe. Die Hauptsache ist, daß man sich bei einer solchen mathematischen Untersuchung stets klarmacht, welche physikalische Bedeutung die einzelnen Glieder der Gleichungen haben.

Bei der Aufzählung dieser unbekannten Größen (widerstehenden Kräfte) ist folgendes zu beachten: Jeder Stab liefert bekanntlich eine Unbekannte, nämlich die Größe seiner Kraft. Jedes bewegliche Lager liefert ebenfalls eine Unbekannte (Größe der Auflagerkraft). Jedes feste Lager liefert aber zwei Unbekannte, nämlich Größe und Richtung der Auflagerkraft. Ein festes Lager ist also in den Gleichgewichtsbedingungen genau so viel wert wie zwei Stäbe oder bewegliche Lager. In der Tat hält ja auch ein festes Auflager einen Knotenpunkt vollständig unbeweglich fest, während ein Stab oder ein bewegliches Lager einen Punkt noch nicht vollständig festlegt. (Zum vollständigen Festhalten wären zwei Stäbe nötig. Vgl. auch I. Band, § 14, „Auflagerstäbe".)

Ist also bei irgendeiner zusammengesetzten Fachwerkkonstruktion (z. B. *Gerber*scher Fachwerkträger, Dreigelenkbogen) die

Anzahl der Stäbe $= s$,
„ „ beweglichen Lager $= b$,
„ „ festen Lager $= f$,

so ergibt sich hieraus die Anzahl der Unbekannten (widerstehenden Kräfte):

$$\boxed{\textbf{Unbekannte } u = s + b + 2f.}$$

Hiermit ist auch über die „Unbekannten" das Erforderliche gesagt.

IV. Zusammenfassung.

Bei irgendeiner Fachwerkkonstruktion sei:

Anzahl der Knotenpunkte $= k$. [Also $2k$ = Anzahl d. Gleichgewichtsbeding.]
„ „ Stäbe $= s$,
„ „ bewegl. Lager $= b$,
„ „ festen Lager $= f$.
[Also $u = s + b + 2f$ = Anzahl der Unbekannten.]

Dann sind drei Fälle möglich:

1) $u = 2k$ [statisch bestimmtes, standsicheres Fachwerk].
2) $u < 2k$ [labiles Fachwerk. Unbrauchbar].
3) $u > 2k$ [statisch unbestimmtes Fachwerk. Standsicher, aber schwer zu berechnen].

Am weitaus wichtigsten ist der erste Fall: statisch bestimmte Konstruktion. Deshalb nochmals: **Damit ein Fachwerk statisch bestimmt sei, muß die Bedingung erfüllt sein:**

$$\text{(I)} \qquad \boxed{s + b + 2f = 2k.}$$

In Worten:

Stäbe + bewegliche Lager + 2 × feste Lager = 2 × Knotenpunkte.

Wenn also auch ein Fachwerk mehrfach gelagert ist, wenn es Zwischengelenke hat, unregelmäßig aufgebaut ist oder dergleichen, wir können jetzt immer entscheiden, ob es statisch bestimmt, labil oder statisch unbestimmt ist.

Es gibt allerdings noch *Ausnahmefälle*. Derentwegen sei auf § 16 verwiesen!

V. Spezialfall: Der Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

Die vorige Untersuchung gilt für jede noch so komplizierte Fachwerkkonstruktion. Nun wollen wir das Kennzeichen der statischen Bestimmtheit für den Fall spezialisieren, daß das betreffende Fachwerk so gelagert ist, daß an den Auflagern nur *drei* Unbekannte auftreten. Diese Lagerung ist ja die verbreitetste von allen. Meistens in der Form, daß ein festes (zwei Unbekannte)

und ein bewegliches Lager (eine Unbekannte) angeordnet sind. Es können aber auch drei bewegliche Lager oder, was auf dasselbe hinauskommt, drei Auflagerstäbe genommen werden.

Ist nun wieder s die Anzahl der Stäbe des Fachwerkes, so haben wir bei dieser Lagerung im ganzen s Stab- und 3 Auflager-Unbekannte; also

$$u = s + 3 .$$

Die Bedingung der statischen Bestimmtheit, $u = 2k$, geht also in diesem Falle über in:

$$s + 3 = 2k ;$$

hieraus:

$$s = 2k - 3 .$$

In Worten: *Damit ein Fachwerk mit drei Auflagerunbekannten bei k Knotenpunkten statisch bestimmt sei, muß die Anzahl der Stäbe sein:*

$$\text{(Ia)} \qquad \boxed{s = 2k - 3 .}$$

Das ist die wichtigste Formel aus der Fachwerktheorie.

Eine Lagerung mit drei Auflagerunbekannten nennt man „statisch bestimmte Lagerung“, weil dann die Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist, die an einem Körper erfüllt werden müssen (Band I, § 15, Schluß und § 19). Ein Fachwerk mit statisch bestimmter Lagerung und $(2k - 3)$ Stäben nennen wir einen **einfachen Fachwerkbalken.** Derart sind die meisten Fachwerkkonstruktionen überhaupt.

§ 12.

Beispiele zu § 11.

Erste Aufgabe.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen sind an Hand von Fig. 32 noch einmal im einzelnen durchzuführen!

1) Anschreiben sämtlicher $2k$ Gleichgewichtsbedingungen.

Wir wollen also für jeden der Knotenpunkte *1 . . . 4* die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und aus diesem System von Gleichungen die mathematischen Folgerungen ziehen. Beim Anschreiben der Gleichungen werden die zunächst unbekannten Stabkräfte sämtlich als Zug eingeführt. Die Richtungen nach rechts und nach oben sind als die positiven genommen. Hiernach entsteht folgende Gruppe von Gleichungen:

$$
1\begin{cases} +A\cos\alpha + S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 & = 0 \\ +A\sin\alpha + S_1\sin\alpha_1 + S_2\sin\alpha_2 & = 0 \end{cases}
$$

$$
2\begin{cases} -P\cos\delta - S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3 & = 0 \\ -P\sin\delta - S_2\sin\alpha_2 - S_3\sin\alpha_3 - S_4 & = 0 \end{cases}
$$

$$
3\begin{cases} -S_1\cos\alpha_1 + S_5\cos\alpha_5 & = 0 \\ -S_1\sin\alpha_1 - S_5\sin\alpha_5 + S_4 & = 0 \end{cases}
$$

$$
4\begin{cases} -S_3\cos\alpha_3 - S_5\cos\alpha_5 & = 0 \\ +B + S_3\sin\alpha_3 + S_5\sin\alpha_5 & = 0 \end{cases}
$$

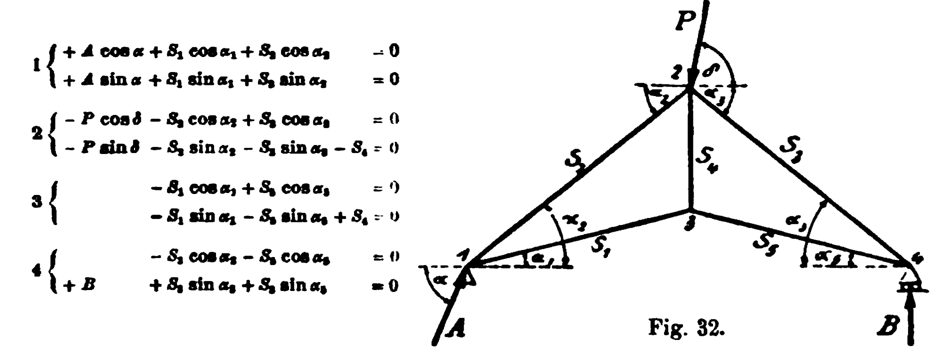


Fig. 32.

Zunächst ist also zu konstatieren, daß wir tatsächlich

$$2 \cdot k = 2 \cdot 4 = 8 \text{ Gleichungen}$$

erhalten.

In diesen acht Gleichungen sind gegeben: Die Last P, deren Neigungswinkel δ und die Neigungswinkel $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ der Stäbe. Unbekannt dagegen sind: Der Auflagerdruck A, dessen Richtungswinkel α, der Auflagerdruck B und die Stabkräfte $S_1 \ldots S_5$. Insgesamt haben wir also tatsächlich bei dem Fachwerke:

$$u = s + b + 2 \cdot f = 5 + 1 + 2 \cdot 1 = 8 \text{ Unbekannte.}$$

In diesem besonderen Falle ist nun

$$u = 2k\,,$$

Anzahl der Unbekannten gleich Anzahl der Gleichungen. Daraus folgt, daß durch einfache, mathematische Auflösung der $2k$ Gleichungen die widerstehenden Kräfte A, B, $S_1 \ldots S_5$ sämtlich nach Größe und Richtung zu bestimmen sind. (Zur Übung führe man die Rechnung tatsächlich durch!) Und umgekehrt, werden die widerstehenden Kräfte angebracht, d. h. wird die Konstruktion so ausgeführt, daß sie die widerstehenden Kräfte aufnehmen kann, so ist das Gleichgewicht jedes einzelnen Knotenpunktes und also auch der gesamten Konstruktion gesichert. Das Fachwerk ist also ein Beispiel einer statisch bestimmten, standsicheren Konstruktion. In der Tat stimmt auch das mathematische Kennzeichen für das Fachwerk mit drei Auflagerunbekannten. Denn es ist die Anzahl der Stäbe

$$s = (2k - 3) = 2 \cdot 4 - 3 = 5\,.$$

2) *Es ist unmöglich, mehr als $2k$ Gleichungen zu schaffen.*

An diesem Beispiel sollte aber noch auf etwas anderes hingewiesen werden. Bei Berechnung eines solchen Fachwerkes fängt man doch im allgemeinen damit an, daß man zunächst die

Auflagerkräfte bestimmt. Das heißt, man betrachtet die Konstruktion als Ganzes und schreibt hierfür die Gleichgewichtsbedingungen an. Auf diese Weise bekommt man noch weitere Gleichungen, die doch auch irgendeine Bedeutung oder Verwendung haben müßten.

Nehmen wir beispielsweise die Gleichung $R_x = 0$, angewendet auf das Gleichgewicht des vorliegenden ganzen Körpers. Sie würde ergeben:

$$+A \cos\alpha - P \cos\delta = 0 .$$

Diese Gleichung ist sicherlich ebenfalls richtig. Wir haben also anscheinend außer den vorigen acht Gleichungen noch eine neunte erhalten, die wir ebenfalls verwenden könnten. (Z. B. zur Berechnung eines neu einzuziehenden Stabes zwischen den Knoten *1* und *4*.) Dieses ist aber ein Irrtum. Denn die Gleichung $A \cos\alpha - P \cos\delta = 0$ ist gar keine neue selbständige Gleichung, sondern sie ist nichts weiter als eine Folgerung der früheren acht Gleichungen. Addiert man nämlich in der obigen Gruppe die 1., 3., 5. und 7. Gleichung, so heben sich, wie man ohne weiteres sieht, alle Glieder mit $S_1 \ldots S_5$ fort und es entsteht tatsächlich die Beziehung

$$+A \cos\alpha - P \cos\delta = 0 .$$

Also sehen wir: Die obige Gleichung ist keine selbständige, ursprüngliche Gleichung, sondern nur eine Folgerung aus den früheren acht Gleichungen.

Dieses muß ja auch so sein. Denn die obigen acht Gleichungen sagen aus, daß jeder einzelne Punkt im Ruhezustand ist. Darin ist natürlich auch bereits die Aussage enthalten, daß das Fachwerk als Ganzes im Ruhezustand sei, und eine Gleichung, die sich auf letzterer Aussage aufbaut, muß notwendigerweise in den anderen acht Gleichungen enthalten sein.

Es muß also daran festgehalten werden, daß sich aus einem Fachwerke von k Knotenpunkten durch keinerlei Kunstgriffe mehr als $2k$ selbständige Gleichungen entwickeln lassen. Man kann natürlich die Berechnung so anfangen, daß man zunächst die Konstruktion als Ganzes betrachtet, hierfür die Gleichgewichtsbedingungen anschreibt und auf diese Weise die Auflagerkräfte direkt bestimmt (wie bei dem Beispiel von § 3). Wenn man dann weiterhin die Gleichungen der einzelnen Knotenpunkte anschreibt, so ergeben sich für die letzten Knotenpunkte keine neuen, selbständigen Gleichungen mehr, sondern nur Rechenkontrollen (nämlich $0 = 0$). Ebensowenig wie sich durch keinerlei Kunstgriff

aus zwei Gleichungen mehr als zwei Unbekannte bestimmen lassen, so lassen sich aus einem Fachwerke mit k Knotenpunkten durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen mehr als $2k$ widerstehende Kräfte ausrechnen. [Vgl. die genau entsprechende Betrachtung bei der Berechnung der Auflagerkräfte aus den drei Gleichgewichtsbedingungen, falls mehr als drei Unbekannte an den Auflagern auftreten; Bd. I, § 18, Schluß.]

Zweite Aufgabe.

Das in Fig. 33a gezeichnete Fachwerk ist hinsichtlich seiner Stabilität und statischen Bestimmtheit zu untersuchen!

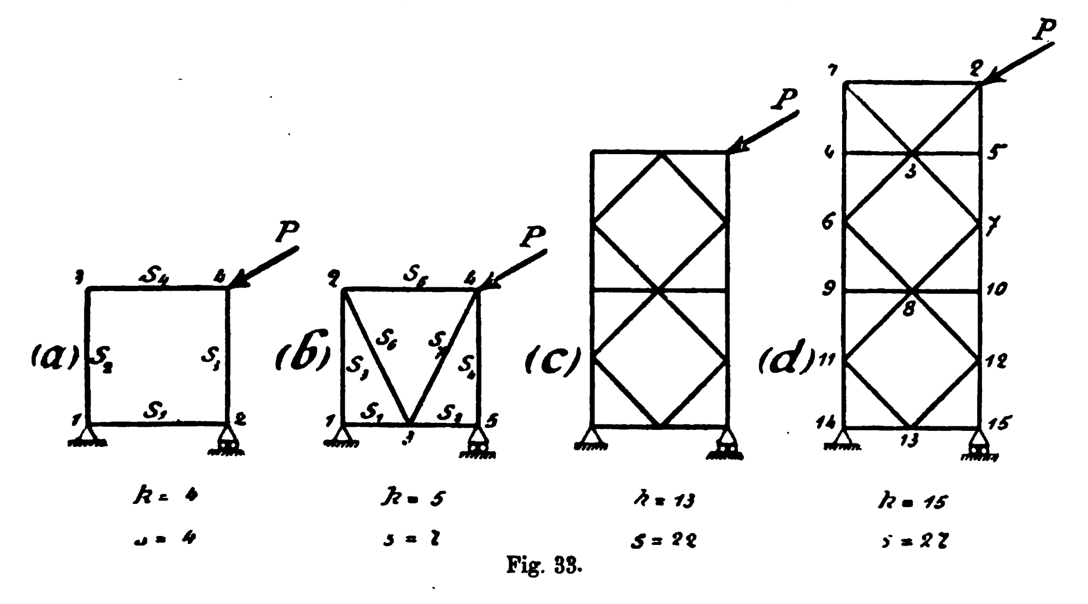


Fig. 33.

Bei Fig. 33a lehrt der Augenschein, daß ein derartiges offenes Viereck durch eine schräge Kraft einfach umgelegt wird. Dieses Fehlen der Stabilität kommt mathematisch durch die Nichterfüllbarkeit der Gleichgewichtsbedingungen zum Ausdruck: Das Fachwerk hat vier Knotenpunkte. Nach Formel (Ia) des vorigen Paragraphen (Absatz V) sind also zur statischen Bestimmtheit nötig

$$s = 2k - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5 \text{ Stäbe.}$$

Vorhanden sind aber nur vier Stäbe; also ist das Fachwerk labil.

Nur wenn P genau vertikal wäre, könnte die Konstruktion Fig. 33a im Ruhezustand sein. Dieses ist also ein Ausnahmefall, bei dem das labile Fachwerk nicht umkippen würde. Doch ist dieser Gleichgewichtszustand unsicher, da er bei der geringsten

Änderung der Lastrichtung sofort aufhört. Unbrauchbar bleibt die Konstruktion Fig. 33a auf jeden Fall.

Soll das Fachwerk standfest gemacht werden, so muß eine Unbekannte mehr hineingebracht werden. Zum Beispiel die Diagonale *1—4* oder *2—3*. Oder auch ein weiteres bewegliches Lager bei *3* oder *4* oder ein Stützstab (Auflagerstab) an dieser Stelle. Alles dieses würde die Konstruktion standfest machen.

Nur wenn man die Unbekannte dadurch hineinbringen wollte, daß man das Lager *2* zu einem festen macht, würde es nichts helfen. Dann würde nämlich ein Ausnahmefall von der bisherigen Theorie entstehen: Fachwerk mit genügenden Unbekannten ($u = 2k$), aber trotzdem nicht standfest. Die Ursache für diesen Ausnahmefall ist die, daß das Lager *2* und der Stab S_1 zusammen schon in Fig. 33a wie ein festes Lager wirken, da sie ja den Punkt *2* unverschieblich festhalten. Deshalb hat eine weitere Festmachung des Lagers *2* gar keinen Sinn. Es ändert nichts gegenüber dem bestehenden Zustand; das Fachwerk bleibt beweglich. Derartige — übrigens selten vorkommende — Ausnahmefälle werden in § 16 noch genauer besprochen werden.

Dritte Aufgabe.

Die Fachwerkgerüste Fig. 33b—d sind hinsichtlich statischer Bestimmtheit und Stabilität zu untersuchen!

Beim Fachwerk Fig. 33b ergibt die Abzählung der Knotenpunkte und Stäbe, daß es ein statisch bestimmtes, standsicheres Bauwerk ist. Es ist nämlich $k = 5$, also erforderlich:

$$s = 2 \cdot 5 - 3 = 7 \text{ Stäbe},$$

und diese Anzahl ist tatsächlich vorhanden.

Dagegen ist Fig. 33c labil, denn es sind erforderlich $2 \cdot 13 - 3 = 23$ Stäbe und vorhanden sind nur $s = 22$ Stäbe.

In Fig. 33d ist gezeigt, wie aus dem labilen Fachwerk Fig. 33c durch Anfügen eines halben Geschosses ein stabiles entsteht. Letzteres (von Professor *Müller-Breslau* in die Praxis eingeführt) ist sogar sehr günstig wegen der geringen Knicklänge der Pfosten.

Vierte Aufgabe.

Ist das in Fig. 34a gezeichnete Fachwerk mit zwei festen Lagern statisch bestimmt?

Die Konstruktion hat $k = 7$ Knotenpunkte. An Unbekannten sind vorhanden: an jedem der beiden festen Lager zwei, insgesamt also 4 Auflagerunbekannte, hierzu 10 Stabunbekannte;

zusammen $u = 14$ Unbekannte. Das Fachwerk erfüllt somit die Bedingung

$$u = 2k;$$

es ist statisch bestimmt.

Der mittelste Knotenpunkt wirkt bei dieser Konstruktion wie ein Gelenk. Zusammen mit den beiden festen Lagern (Kipplagern) hat das Fachwerk also drei Gelenke, nämlich ein „Mittelgelenk" und zwei „Fuß- oder Kämpfergelenke". Man nennt deshalb das System einen „*Dreigelenkbogen*". **Der Dreigelenkbogen ist ein statisch bestimmtes Tragwerk.** Man kann ihn also beispielsweise berechnen durch Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knotenpunkte. Doch werden wir später noch besondere Berechnungsmethoden für dieses System entwickeln.

In Fig. 34b ist ein größerer Dreigelenkbogen als Hallenbinder gezeichnet. Natürlich ebenfalls statisch bestimmt. Würde man

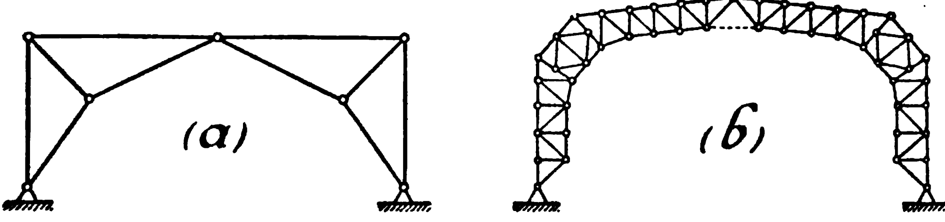


Fig. 34.

noch den punktiert gezeichneten Stab einziehen, so entstände aus dem Dreigelenkbogen der *Zweigelenkbogen* (nur mit Kämpfergelenken). Der hat dann einen Stab mehr als zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen nötig ist; ist also („einfach", d. h. einmal) statisch unbestimmt.

Fünfte Aufgabe.

Bei einer Verladebrücke mußten, um das Verladegut seitlich abkippen zu können, in den beiden mittelsten Feldern die Diagonalen fortgelassen werden. Da am Obergurt Platz war, sollten dafür die beiden Felder durch ein Sprengwerk 1—2—3 überbrückt werden. Genügte diese Verstärkung? (Fig. 35a.)

Nein. Denn die Konstruktion hat $k = 19$ Knotenpunkte. Es sind also zum Gleichgewicht erforderlich $2 \cdot 19 - 3 = 35$ Stäbe. Vorhanden sind aber nur $s = 34$ Stäbe. In dieser Ausführung würde die Konstruktion also zusammenbrechen. [Nur in Ausnahmefällen, bei gewisser symmetrischer Belastung, ist ein vorübergehendes, unsicheres Gleichgewicht möglich.]

Sechste Aufgabe.

Ist der in Fig. 35b gezeichnete Brückenträger statisch bestimmt?

Die Konstruktion ist sogar mehr als einfach stabil; sie ist statisch unbestimmt.

Man nennt dieses System einen „*Zweigelenkbogen mit Zugband*“. Infolge des horizontalen Verbindungsstabes zwischen den beiden Lagern wirkt nämlich das rechte Lager zusammen mit dem Verbindungsstabe wie ein festes Lager. Deshalb stellt die Konstruktion gewissermaßen ein Fachwerk mit zwei festen Lagern (Zweigelenkbogen) dar.

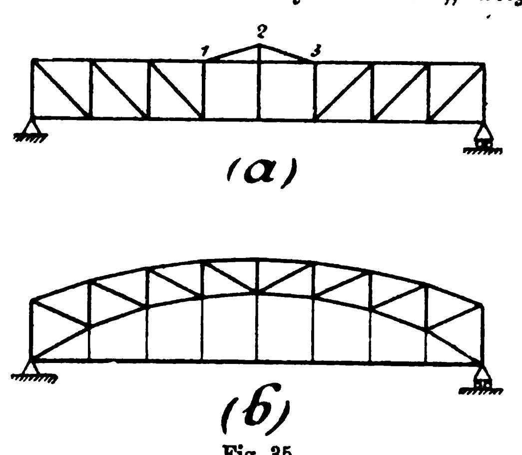


Fig. 35.

Bemerkung: Von jetzt ab werden wir „statisch bestimmt“ häufig abgekürzt „st. best.“ schreiben.

§ 13.

Weitere Betrachtung der statisch bestimmten Fachwerke. Einteilung in einfache und nicht-einfache st. best. Systeme.

Die st. best. Fachwerke sind für uns derartig wichtig, daß es sich lohnt, ihre Eigenschaften noch genauer zu untersuchen. An und für sich ist ja alles durch die kennzeichnende Gleichung $u = 2k$ bestimmt. Wir wollen aber das, was in dieser Gleichung eigentlich darin steckt, noch gemeinverständlicher ausdrücken.

I. Weitere Betrachtung des Kennzeichens $u = 2k$.

Die kennzeichnende Eigenschaft der statisch bestimmten Systeme war bekanntlich die, daß die Anzahl u der zur Verfügung stehenden Unbekannten gerade gleich der Anzahl $2k$ der zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen ist. Mit anderen Worten: Es sind so viel Stab- und Auflagerkräfte vorhanden, daß jeder Knotenpunkt gerade im Ruhezustand gehalten wird. Würde man einen Stab oder eine Auflagerkraft fortnehmen, so würde die Konstruktion zusammenbrechen. Fügt man einen Stab oder eine Auflagerkraft neu hinzu, so ist die Konstruktion überbestimmt.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk stellt also hinsichtlich der Zahl der verwendeten Glieder das ökonomischste Tragwerk dar. *Nichts zu viel, nichts zu wenig*; das ist der Sinn der Gleichung $u = 2k$.

Es ist immer gut, das Resultat einer mathematischen Untersuchung auf diese Weise nach Möglichkeit in die Sprache der gewöhnlichen Praxis zu übertragen. Wenn ich sage: Ein statisch bestimmtes Fachwerk ist eine solche Konstruktion, bei der die Anzahl der stützenden Kräfte genau so groß ist, wie die Anzahl der zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen aller Knotenpunkte, so ist das etwas. Wenn ich aber sage: Ein statisch bestimmtes Fachwerk ist ein solches, das „gerade noch steht", so ist das mehr, so ist das handgreiflicher. Denn dann kann ich in den meisten Fällen durch einen Blick unterscheiden, ob eine Konstruktion statisch bestimmt ist oder nicht. Dann bekomme ich ein gewisses Gefühl für diese Sachen. Ein Gefühl, das sich auf guter wissenschaftlicher Grundlage entwickelt hat, und das in schwierigen Fällen ja stets durch die strenge mathematische Formel kontrolliert und unterstützt werden kann.

So sieht man beispielsweise, daß das Fachwerk Fig. 27 statisch bestimmt ist. Denn es ist einerseits klar, daß die Konstruktion „hält"; andererseits ist aber auch klar, daß sie zusammenbrechen würde, falls ich etwa auf den Gedanken kommen würde, einen Stab, z. B. U_3, zu entfernen. Anders ist es bei Fig. 35b. Hier könnte man das horizontale Zugband fortlassen, und die Konstruktion brauchte trotzdem noch nicht zusammenzubrechen. Also hat das Fachwerk einen Stab mehr, als unbedingt nötig ist; es ist („einfach", d. h. einmal) statisch unbestimmt.

Soviel zur Verständlichmachung des mathematischen Ausdruckes $u = 2k$.

II. Weitere Betrachtungen zur Berechnung.

Eine zweite gute Eigenschaft der st. best. Systeme ist die, daß sie sich auf jeden Fall berechnen lassen. Wir brauchen ja nur die Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knotenpunkte anzuschreiben und haben dann genau so viel Gleichungen wie Unbekannte. In § 3 ist das Fachwerk Fig. 2 nach dieser Seite berechnet; ferner ist in § 12, 1. Aufgabe, ein ganzes derartiges System von $2k$ Gleichungen übersichtlich zusammengestellt. Theoretisch sind wir also mit den st. best. Systemen fertig.

Praktisch hat die Sache aber leider ihre Bedenken. Gerade

diese ursprünglichste Rechenmethode — analytische Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf die einzelnen Knotenpunkte — ist außerordentlich umständlich. Sie ist die schlechteste von allen und bei größeren Konstruktionen kaum durchführbar. Das war ja auch der Grund, weshalb wir noch andere Methoden, nämlich *Cremona*, *Ritter* und *Culmann*, durchgenommen haben.

Wir wollen uns also zur Berechnung der st. best. Fachwerke merken: Theoretisch lassen sich die $u = 2k$ Unbekannten stets ermitteln, nämlich durch Auflösen der $2k$ Gleichungen. Zur praktischen Anwendung ist diese ursprünglichste Methode wenig geeignet; da sind die anderen Methoden viel besser.

III. Weitere Einteilung der st. best. Systeme.

Wir wollen die st. best. Fachwerke einteilen in:

a) Einfache Dreieckfachwerke,
b) Nicht-einfache Fachwerke.

Die „einfachen Dreieckfachwerke" sind solche, die aus lauter aneinandergereihten Dreiecken bestehen. Es darf also kein Mehreck vorkommen. Auch dürfen sich die Dreiecksseiten außerhalb der Knotenpunkte nicht schneiden. Die Dreiecke müssen vielmehr eine fortlaufende Reihe bilden, derart, daß je zwei von ihnen eine Seite gemeinsam haben. Sonst ist das Fachwerk ein „nicht-einfaches". Diese Einteilung hat folgende Berechtigung:

a) Die einfachen Fachwerke

sind unser eigentliches „Fachwerk" par excellence. Sie lassen sich ohne weiteres nach den Methoden *Cremona*, *Ritter* und *Culmann* berechnen. Da sie außerdem am meisten verbreitet sind, war es berechtigt, im 1. Vortrage nur diese einfachen Dreieckfachwerke als Fachwerk schlechthin zu betrachten und sie bei der Entwicklung der verschiedenen Rechenmethoden zugrunde zu legen. Die Fachwerke Fig. 1, 2, 3 usw. sind Beispiele derartiger Systeme.

b) Die nicht-einfachen Fachwerke,

bei denen die Stäbe mitunter ganz unregelmäßig durcheinander laufen, lassen sich meistens nach den Methoden *Cremona* usw. nicht so ohne weiteres berechnen. Hier bleibt uns zunächst nur die ursprünglichste Methode übrig. Da derartige Fachwerke seltener vorkommen, wollen wir auf ein Beispiel genauer eingehen.

In Fig. 36a des folgenden Paragraphen ist ein solches nicht-einfaches Fachwerk gezeichnet. Die Form ist allerdings etwas

ungewöhnlich, gewissermaßen „theoretisch". Da sich aber gerade an diesem sechseckigen Fachwerk die wichtigsten Fortschritte der Fachwerktheorie entwickelt haben, möge es aus historischem Interesse auch hier als Beispiel genommen werden.

In der Mitte der Figur soll kein Knotenpunkt vorhanden sein; d. h. hier gehen die sich kreuzenden Stäbe glatt aneinander vorbei. Die einzelnen Dreiecke sind also nicht aneinandergereiht, sondern überdecken sich. Deshalb ist das Fachwerk kein „einfaches".

Wohl aber ist die Konstruktion statisch bestimmt. Denn es sind

$$k = 6 \text{ Knotenpunkte};$$

an Stäben sind vorhanden

$$s = 9 \text{ Stäbe}.$$

Es ist also die Bedingung erfüllt:

$$s = 2k - 3;$$

d. h. der Fachwerkträger ist statisch bestimmt.

Trotzdem bereitet die Berechnung Schwierigkeiten. An jedem Knotenpunkte laufen nämlich drei Stäbe zusammen. Wenn man nun z. B. einen Kräfteplan entwerfen will, so hat man überhaupt keinen Punkt, an dem man beginnen könnte. Denn ein Kräfteplan kann nur dann gezeichnet werden, wenn man an jedem Knotenpunkte immer nur auf zwei unbekannte Kräfte stößt (vgl. § 5 und 6). Auch die Rittersche Methode führt bei Fig. 36a nicht zum Ziele, da ein Schnitt durch den Träger mehr als zwei unbekannte Stäbe trifft. Ebensowenig kann man hier mit der Culmannschen Methode etwas anfangen. Von unseren vier Methoden zur Bestimmung der Stabkräfte eines Fachwerkes versagen also in diesem Falle gerade die drei hauptsächlichsten (*Cremona*, *Ritter*, *Culmann*).

Die erste, elementarste Methode muß natürlich zum Ziele führen. Wir schreiben für jeden Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingungen $R_x = 0$, $R_y = 0$ an und erhalten dann $2 \cdot 6 = 12$ Gleichungen, in denen 3 Auflagerunbekannte und 9 Stabkräfte, insgesamt 12 Unbekannte, vorkommen. [Statt dessen kann man auch die Auflagerkräfte von vornherein ausrechnen und hat dann an dem letzten Punkte noch Rechenkontrollen.] Wie wir aber aus § 3 und 4 wissen, erfordert diese Methode eine Menge Rechenarbeit. In diesem Falle ist sie noch viel umständlicher als früher, da in einzelnen Gleichungen sogar *drei* unbekannte Stabkräfte auf-

treten. Die Auflösung dieser 12 Gleichungen würde also eine Rechenarbeit bedeuten, für die sich jeder Ingenieur bedanken wird (vgl. die Gruppe der Gleichungen der 1. Aufgabe von § 12).

IV. Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen handelte es sich darum, das Wesen der st. best. Fachwerke noch weiter zu klären.

I. Das eigentliche Kennzeichen der st. best. Konstruktionen läßt sich ohne alle Mathematik durch den Spruch geben: Nichts zuviel, nichts zuwenig.

II. *Berechnen läßt sich ein st. best. Fachwerk auf jeden Fall.* Allerdings ist die ursprünglichste Rechenmethode — gerade die, die mit dem Charakteristikum $u = 2k$ der st. best. Systeme direkt verwachsen ist — für die Praxis meistens zu umständlich. Namentlich dann, wenn in den einzelnen Gleichungen mehr als eine oder zwei Unbekannte vorkommen. Deshalb *Cremona*, *Ritter*, *Culmann*.

III. Nach dem Verlauf der Stäbe unterscheiden wir *einfache* und *nicht-einfache* st. best. Fachwerke. Diese Unterscheidung deckt sich meistens mit der Art der Berechnung. Bei den nicht-einfachen Systemen versagen häufig die Methoden von *Cremona*, *Ritter* und *Culmann*, so daß zunächst nur die ursprünglichste Methode der Gleichungen übrigbleibt.

Bis zum Jahre 1886 konnte man tatsächlich mit diesen nicht-einfachen Fachwerken nichts Rechtes anfangen; wenigstens nicht mit den ganz komplizierten. Seitdem haben aber *Henneberg* und *Müller-Breslau* gezeigt, wie auch die nicht-einfachen Systeme allen Berechnungsmethoden zugänglich gemacht werden können. Das war der Schlüssel zur wirklichen Beherrschung der statisch bestimmten Systeme (§ 14).

§ 14.

Zurückführung nicht-einfacher Fachwerke auf einfachere. (Ersatzstabmethode.)

Als Beispiel diene das Fachwerk Fig. 36a. Wir haben soeben gesehen, daß — soweit wir die Theorie bis jetzt durchgenommen haben — für dieses Fachwerk nur die ursprünglichste Methode (Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knotenpunkte) anwendbar wäre. Jetzt soll aber gezeigt werden, daß durch sog. „Stabvertauschung" dieses nicht-einfache Fachwerk auch unseren Hauptmethoden (*Cremona*, *Ritter*, *Culmann*) zugänglich gemacht werden kann. Dies geschieht folgendermaßen:

1. Aufstellen eines Ersatzfachwerkes.

Diejenigen Stäbe, die die Berechnung erschweren, nehmen wir einfach aus dem Fachwerk fort und setzen dafür — damit die Konstruktion nicht labil werde — ebensoviel andere Stäbe ein. Die ersteren, störenden Stäbe mögen die „*Störungsstäbe Z*" heißen; die zweiten, einzusetzenden Stäbe die „*Ersatzstäbe E*". Auf diese Weise verwandelt man zunächst das schwierige Fachwerk in ein einfacheres.

In Fig. 36a z. B. würde es genügen, den einen Stab Z fortzunehmen und dafür den Ersatzstab E einzusetzen (Fig. 36a und b). Dann hätte man ein Fachwerk, das sich beispielsweise nach *Cremona* berechnen läßt. Denn man kann mit den Knotenpunkten *1* und *2* anfangen und der Reihe nach *3*, *4*, *5* und *6* durchgehen.

Die folgende Methode dreht sich hauptsächlich um diese fortgenommenen Stäbe Z und zeigt, wie diese vor allen anderen Stäben berechnet werden können.

2. Das ursprüngliche Fachwerk als Spezialfall des Ersatzfachwerkes.

Um dieses Ersatzfachwerk in die gleichen Verhältnisse zu bringen wie das wirklich vorhandene Fachwerk Fig. 36a, setzen wir zunächst die äußeren Kräfte A, B und P an. Außerdem denken wir uns aber auch die Kräfte Z eingezeichnet, die der fortgelassene Stab Z auf seine Endknotenpunkte ausüben würde. Dann befindet sich das Ersatzfachwerk Fig. 36b augenscheinlich in derselben Lage wie das ursprüngliche Fachwerk Fig. 36a — denn an Stelle des fortgenommenen Stabes Z sind ja dessen Spannkräfte angebracht —, nur daß Fig. 36b den einen Stab E mehr hat als Fig. 36a. Das ursprüngliche Fachwerk Fig. 36a stellt gewissermaßen einen besonderen Fall von dem Ersatzfachwerk Fig. 36b dar, nämlich den Fall, daß die Spannkraft des Stabes E zu Null wird. Diese Auffassung ist für das Folgende wichtig.

3. Prinzipieller Weg zur Ermittlung der Spannkräfte Z usw.

Nun denken wir uns das Ersatzfachwerk Fig. 36b berechnet. Die äußeren Kräfte P, A und B sind natürlich bekannt. Dagegen sind die Kräfte Z, die ja den Stab Z aus Fig. 36a vertreten, unbekannt. Wir wollen für die Kräfte Z irgendeinen Wert angenommen und dann die Berechnung von Fig. 36b durchgeführt denken. Bei dieser Berechnung würde sich auch für die Spannkraft des Stabes E ein bestimmter Wert ergeben, der natürlich verschieden ist, je nachdem wir die Kräfte Z angenommen haben.

Wenn nun zufällig für E der Wert Null herauskommen würde, was hätte dies zu bedeuten?

Dies würde bedeuten, daß wir in Fig. 36b zufällig den Wert von Z angenommen haben, mit dem der tatsächlich vorhandene Stab Z in Fig. 36a wirksam ist. Denn die beiden Figuren unterscheiden sich ja nur dadurch, daß bei dem ursprünglichen Fachwerk der Stab E fehlt, d. h. daß an dieser Stelle keine Spannkraft E vorhanden ist. Wenn wir also auch in Fig. 36b die Spannkraft E gleich Null herausbekommen, so ist überhaupt kein Unterschied mehr zwischen den beiden Figuren vorhanden. Dann sind die Spannkräfte der einen Figur genau gleich denen der anderen.

Nun sieht man auch den Weg zur Lösung der Aufgabe: ***Es kommt darauf an, bei dem Ersatzfachwerk die Kraft Z so anzunehmen, daß sich für die Kraft E der Wert Null ergibt.*** Hierdurch hat man dann diejenige Kraft Z gefunden, die gleich ist der Kraft Z des ursprünglichen Fachwerkes Fig. 36a. Sobald aber Z gefunden ist, bietet die weitere Berechnung keine Schwierigkeiten, da dann an jedem Knotenpunkte immer nur zwei neue Unbekannte auftreten. Hiermit ist der Weg zur Berechnung der Kraft Z — im Prinzip wenigstens — eröffnet.

4. Systematischer Weg zur Ermittlung von Z.

Natürlich wäre es aber viel zu umständlich, in Fig. 36b alle möglichen Werte von Z auszuprobieren, bis man glücklich für E die Spannkraft Null erhält. Wir gehen in systematischer Weise vielmehr so vor:

Zunächst berechnen wir den Stab E für den Fall, daß nur die äußeren Lasten A, B, P wirken. Dieser Fall ist in Fig. 36c dargestellt. Die Berechnung bietet keine Schwierigkeiten, da man glatt von einem Knotenpunkt zum anderen kommt. Es möge hierbei für den Stab eine Spannkraft E_0 herauskommen; also:

E_0 = Spannkraft im Ersatzstabe nur infolge äußerer Kräfte.

Dann berechnen wir den Ersatzstab E für den Fall, daß auf das Ersatzfachwerk nur die Kräfte Z des fortgenommenen Stabes wirken. Und zwar nehmen wir, da Z ja noch unbekannt ist, zunächst $Z = 1{,}0$ t an. Diese Spannkraft werde $E_{Z=1}$ genannt (sprich: „E infolge Z gleich Eins"). Also:

$E_{Z=1}$ = Spannkraft im Ersatzstabe infolge eines angenommenen $Z = 1{,}0$ t.

Da nun in Wirklichkeit der Stab Z natürlich nicht gerade gleich

1,0 t sein wird, sondern irgendeinen anderen Wert Z haben wird, so ist die wirkliche Spannkraft des Stabes E infolge der Kräfte Z nicht gleich dem Werte $E_{z=1}$, sondern Z mal so groß. Also:

$E_z = Z \cdot E_{z=1}$ = Spannkraft im Ersatzstabe infolge irgendeines Wertes Z.

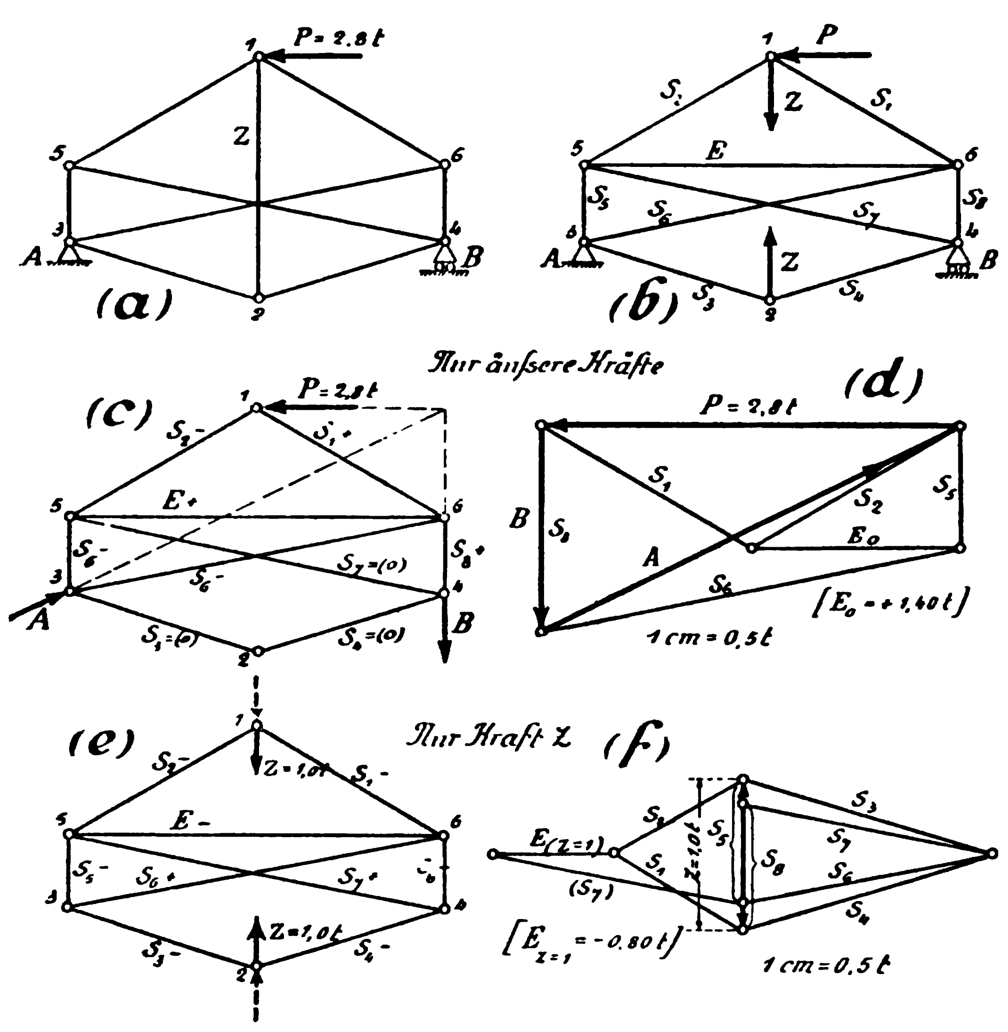


Fig. 36.

Wenn nun auf das Ersatzfachwerk sowohl die äußeren Lasten als auch die Kräfte Z wirken, d. h. wenn wir zu Fig. 36b zurückkehren, so ergibt sich also insgesamt für den Stab E die Spannkraft

$$E = E_0 + Z \cdot E_{z=1} = \text{Gesamtspannkraft im Ersatzstabe}$$
(bei irgendeinem Werte Z).

Nun haben wir aber vorhin gesehen: Diejenige Kraft Z ist die richtige, bei der sich für den Ersatzstab E der Wert Null ergibt. Wir werden also in der obigen Formel den Wert E einfach gleich Null setzen. Dann erhalten wir denjenigen Wert von Z, der mit der Stabkraft Z von Fig. 36a übereinstimmt. Wir setzen also die Gleichung an:

$$\text{(I)} \qquad E_0 + Z \cdot E_{Z=1} = 0 \,,$$

und erhalten für Z den Wert:

$$\text{(Ia)} \qquad Z = -\frac{E_0}{E_{Z=1}} \,.$$

Somit ist die richtige Stabkraft Z, die für das ursprüngliche Fachwerk Fig. 36a Gültigkeit hat, ermittelt. Die Berechnung der anderen Stabkräfte bietet dann keine Schwierigkeiten.

Wiederholung.

Dem eigentlich zu berechnenden Fachwerk, dessen Ermittlung durch die „Störungsstäbe" erschwert ist, stellen wir das „Ersatzfachwerk" gegenüber. Letzteres ist aus dem ursprünglichen Fachwerk dadurch entstanden, daß an Stelle der Störungsstäbe bequemer gelegene „Ersatzstäbe" eingezogen sind. Die Wirkung der Störungsstäbe selbst wird durch entsprechend an ihren Endknotenpunkten eingezeichnete Kräfte zum Ausdruck gebracht. Um die Übereinstimmung zwischen den beiden Fachwerken vollständig zu machen, ist es nur nötig, denjenigen Spannungszustand im Ersatzfachwerke ausfindig zu machen, bei dem die Ersatzstäbe die Spannung Null erhalten. Dies geschieht, indem die Spannkraft eines Ersatzstabes in der Form

$$E = E_0 + Z \cdot E_{Z=1}$$

aufgestellt und gleich Null gesetzt wird. Dadurch ergibt sich der Wert von Z, der im ursprünglichen Fachwerke wirklich vorhanden ist. Die weitere Durchrechnung des Fachwerkes geschieht dann in üblicher Weise nach *Cremona* oder dergleichen.

§ 15.

Beispiele zu § 14.

Erste Aufgabe.

Das im vorigen Paragraphen als Beispiel genommene Sechseck Fachwerk Fig. 36a ist für eine horizontale Last von $P = 2{,}8$ t vollständig durchzurechnen!

Der Zweck des Ersatzfachwerkes Fig. 36b mit dem Ersatzstabe E und den beiden Kräften Z (an Stelle des fortgenommenen Stabes Z) ist bereits besprochen. Jetzt kommt es darauf an, den Ausdruck für den Ersatzstab:

$$E = E_0 + Z \cdot E_{z=1}$$

aufzustellen und gleich Null zu setzen.

a) Ermittlung von E_0. Der Wert E_0 bezieht sich auf den Fall, daß auf das Ersatzfachwerk nur die äußeren Kräfte, nicht aber die Kräfte Z wirken. Dieser Belastungsfall ist in Fig. 36c dargestellt. Der zugehörige Kräfteplan ist in Fig. 36d gezeichnet. Zunächst sind die Auflagerkräfte A und B bestimmt. Dann findet man aus dem Knotenpunkte *1* die Stäbe S_1 und S_2; aus Punkt *2* die Stäbe S_3 und S_4 (beide gleich Null, da in *2* keine äußere Kraft vorhanden ist); aus *3* die Stäbe S_5 und S_6; aus *4* die Stäbe S_7 und S_8 und schließlich aus *5* den Stab E. Und zwar ergibt sich die Spannkraft des Stabes E infolge der äußeren Kräfte:

$$E_0 = +1{,}40 \text{ t.}$$

b) Ermittlung von E_z. Jetzt muß die Spannkraft des Ersatzstabes noch infolge der Kräfte Z berechnet werden. Da die Größe der Kräfte Z noch unbekannt ist, wird zunächst $Z = 1{,}0$ t eingeführt. Diesen Belastungszustand zeigt Fig. 36e. Auflagerkräfte treten jetzt nicht auf, da die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte schon für sich, ohne die Mitwirkung weiterer äußerer Kräfte, ein Gleichgewichtssystem darstellen. Wohl aber treten innere Kräfte (Stabkräfte) auf. Zur Bestimmung der letzteren wurde wiederum ein Kräfteplan benutzt. Da man beim Aufzeichnen eines Kräfteplanes die angreifenden Kräfte immer außerhalb der Fachwerkfigur einzeichnen soll (um einfache Pläne zu erzielen), wurden auch die Kräfte $Z = 1{,}0$ t nach außerhalb der Systemfigur verschoben. Daher rühren in Fig. 36e die punktierten Kraftlinien. Augenscheinlich ist dieses aber eine ziemlich nebensächliche Sache. Die Hauptsache ist, daß sich für diesen Zustand $Z = 1{,}0$ t die Spannkraft des Stabes E bestimmen läßt: Aus dem Punkte *1* ergeben sich S_1 und S_2; aus Punkt *2* folgen S_3 und S_4; aus *3* folgen S_5 und S_6; aus Punkt *4* die Spannkräfte S_7 und S_8 und endlich aus *5* die Spannkraft E. Allerdings muß für den letzteren Punkt die Spannkraft S_7 im Kräfteplan besonders aufgetragen werden, da sie nicht an der Stelle liegt, wo sie nachher gebraucht wird. [Dieses kommt daher, weil Fig. 36e kein einfaches Dreieckfachwerk ist,

sondern ein Fachwerk mit sich überkreuzenden Stäben.] Wir greifen dann aus dem Kräfteplan ab:

$$E_{Z=1} = -0{,}80 \text{ t}.$$

Für irgendeinen anderen Wert von Z, der nicht gerade gleich 1,0 t ist, würde sich also ergeben

$$E_Z = Z \cdot E_{Z=1} = Z \cdot (-0{,}80)\,.$$

c) **Berechnung der Stabkraft Z.** Zu diesem Zwecke stellen wir den Gesamtausdruck von E auf und setzten ihn gleich Null:

$$E = +1{,}40 + Z \cdot (-0{,}80) = 0\,.$$

Hieraus folgt dann:

$$Z = -\frac{+1{,}40}{-0{,}80} = +1{,}75 \text{ t}.$$

Hiermit ist derjenige Wert von Z gefunden, bei dem der Ersatzstab E zu Null wird, d. h. bei dem das Ersatzfachwerk identisch wird mit dem gegebenen Fachwerk.

d) **Berechnung der übrigen Stäbe.** Nachdem nun Z gefunden ist, kann die Konstruktion sehr einfach weiter berechnet werden. Beispielsweise, indem man in einem Kräfteplane der Reihe nach die Punkte *1*, *2*, ..., *6* vornimmt.

Man kann aber auch die bereits gezeichneten Pläne Fig. 36 d und f benutzen. Ersterer gibt die Stabkräfte infolge der äußeren Lasten, letzterer infolge der Kräfte $Z = 1{,}0$ t an. Die Werte infolge $Z = 1{,}0$ t müssen zunächst noch mit 1,75 multipliziert werden (da ja die richtige Stabkraft Z nicht gleich $+1{,}0$ t, sondern gleich $+1{,}75$ t ist) und zu den Werten des Planes Fig. 36d zugezählt werden. Auf diese Weise erhält man dann die wahren Spannkräfte sämtlicher Stäbe. In der folgenden Zusammenstellung ist diese Summierung (natürlich mit Berücksichtigung der Vorzeichen) ausgeführt:

$$\begin{aligned}
Z &= 1{,}75 \text{ t},\\
S_1 &= +1{,}60 - 1{,}75 \cdot 1{,}00 = -0{,}15 \text{ t},\\
S_2 &= -1{,}60 - 1{,}75 \cdot 1{,}00 = -3{,}35 \text{ t},\\
S_3 &= 0 \phantom{{,}00} - 1{,}75 \cdot 1{,}75 = -3{,}06 \text{ t},\\
S_4 &= 0 \phantom{{,}00} - 1{,}75 \cdot 1{,}75 = -3{,}06 \text{ t},\\
S_5 &= -0{,}80 - 1{,}75 \cdot 0{,}85 = -2{,}29 \text{ t},\\
S_6 &= -2{,}85 + 1{,}75 \cdot 1{,}70 = +0{,}13 \text{ t},\\
S_7 &= 0 \phantom{{,}00} + 1{,}75 \cdot 1{,}70 = +2{,}98 \text{ t},\\
S_8 &= +1{,}35 - 1{,}75 \cdot 0{,}85 = -0{,}14 \text{ t}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Durchrechnung des Fachwerkes erledigt. Statt des einen Kräfteplanes — wie bei einem einfachen Dreieckfache —

haben wir zwei Pläne gebraucht, außerdem noch einige Zwischenrechnungen. Trotzdem ist der Rechnungsgang aber viel einfacher, als wenn man etwa die ursprünglich erwähnten zwölf Gleichungen der einzelnen Knotenpunkte aufstellen wollte.

Zweite Aufgabe.

Das in Fig. 37 gezeichnete Bunkergerüst ist zu berechnen!

Aus den örtlichen Verhältnissen (Fig. 37a) ergab sich die gewählte Form. Das System ist in Fig. 37b mit den zugehörigen Maßen noch einmal gezeichnet. Es hat 2 feste Lager, 14 Stäbe und 9 Knotenpunkte, ist also statisch bestimmt. Die Berechnung soll hier nur für eine horizontale Windkraft von $W = 3{,}75$ t durchgeführt werden.

Trotz der statischen Bestimmtheit ist die Berechnung nicht einfach. Es sind *vier* Auflagerunbekannte vorhanden. Deshalb kann man nicht — wie sonst üblich — die Berechnung damit anfangen, daß man mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen des Körpers zunächst die Auflagerkräfte bestimmt. Von den Auflagerpunkten aus können wir also nicht vorgehen. Aber auch bei irgendeinem anderen Knotenpunkte läßt sich nichts machen, da wir dann auf *drei* unbekannte Stabkräfte stoßen. Dem System Fig. 37b läßt sich also ohne weiteres mit einem Kräfteplan nicht beikommen. Ebensowenig mit *Ritter* oder *Culmann*.

Also die Ersatzstabmethode. Als störende Kraft Z ist jetzt nicht eine Stabkraft, sondern eine Auflagerkraft genommen. Nämlich die horizontale Seitenkraft des linken Auflagers. Diese wollen wir uns also fortdenken und statt dessen einen Ersatzstab E einziehen (Fig. 37c). Wir haben somit durch diese Kraftvertauschung unser ursprüngliches Fachwerk Fig. 37b mit den vier Auflagerkräften in ein einfacheres Fachwerk mit nur drei Auflagerunbekannten verwandelt.

Nun folgt der geübte Rechnungsgang: Die Kraft im Ersatzstabe E wird in der Form ausgedrückt:

$$E = E_0 + Z \cdot E_{z=1}\,.$$

Dieser Ausdruck wird dann gleich Null gesetzt und hierdurch Z gefunden.

a) Ermittlung von E_0. Den Fall, daß auf das Ersatzfachwerk nur die äußeren Lasten wirken, während die Kraft Z noch außer Betracht gelassen wird, wollen wir von jetzt ab den

„*Zustand* $Z = 0$“

nennen. Die bei diesem Zustande auftretenden Kräfte mögen ebenfalls den Index „o“ bekommen.

Die Ermittlung von E_0 in Fig. 37c kann z. B. durch Kräfteplan geschehen. Noch einfacher aber analytisch: Zunächst bestimmen wir die Spannkraft im Stabe S_{11} (Schnitt α—α, Bezugspunkt *6*, rechter Fachwerkteil betrachtet). Diese ergibt sich

$$S_{11} = -\frac{3{,}75 \cdot 5{,}00}{2{,}50} = -7{,}50 \text{ t.}$$

Dann legen wir den Schnitt β—β und stellen für den Teil links vom Schnitte die Momentengleichung für den Punkt *5* auf. Vorher zerlegen wir noch die Kraft E horizontal ($E \cdot \cos\varphi$) und vertikal ($E \cdot \sin\varphi$), und zwar werde diese Zerlegung im Punkte *6* vorgenommen. [Das statische Moment einer Kraft ist *stets* gleich der Summe der statischen Momente ihrer Seitenkräfte, ganz gleichgültig, in welchem Punkte auf ihrer Richtungslinie die Zerlegung vorgenommen gedacht ist.] Dann lautet die Momentengleichung

$$S_{11} \cdot 2{,}50 - E_0 \sin\varphi \cdot 8{,}00 = 0\,.$$

Hieraus

$$E_0 \sin\varphi = \frac{S_{11} \cdot 2{,}50}{8{,}00} = \frac{7{,}50 \cdot 2{,}50}{8{,}00}\,,$$

$$E_0 = +\frac{7{,}50 \cdot 2{,}50}{8{,}00} \cdot \frac{5{,}951}{2{,}50} = +5{,}58 \text{ t.}$$

b) Ermittlung von $E_{Z=1}$. Den Fall, daß auf das Ersatzfachwerk nur die Kraft Z, und zwar im Betrage von 1 t wirkt, wollen wir den

„*Zustand $Z = 1$*“

nennen. Die hierbei auftretenden Kräfte werden meistens den Zusatz „$_{Z=1}$“ erhalten.

Der Wert $E_{Z=1}$ bestimmt sich wie vorhin der Wert E_0. Zunächst (Fig. 37d):

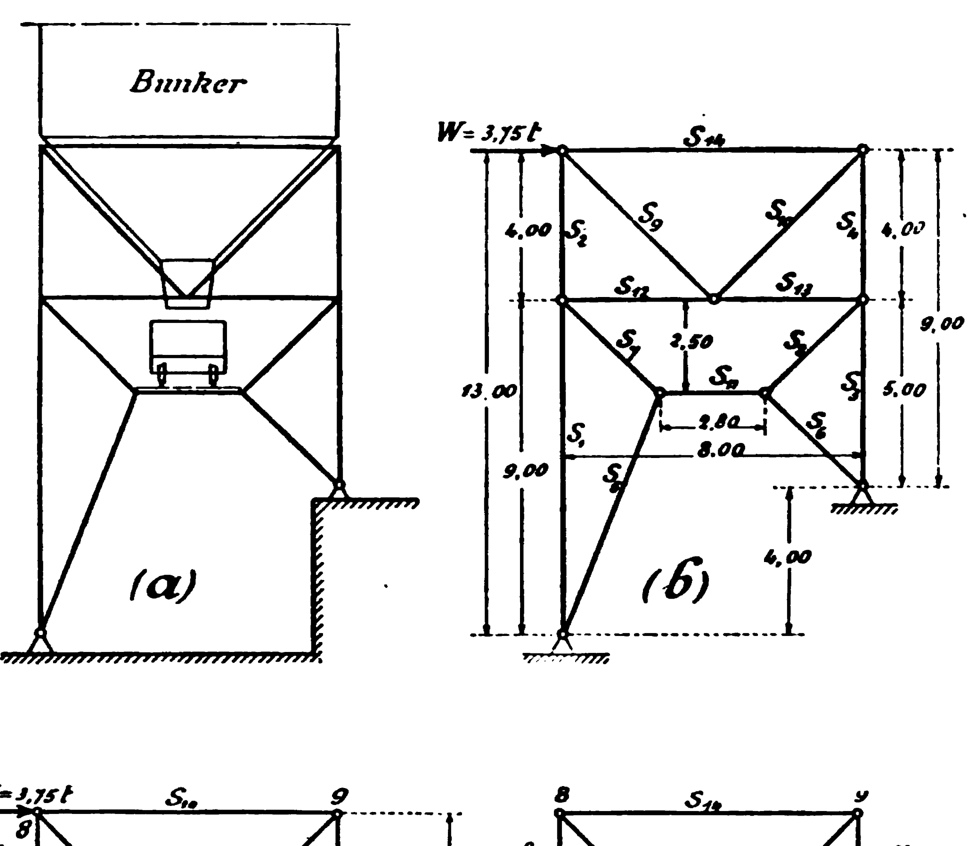
$$S_{11} = -\frac{1{,}00 \cdot 5{,}00}{2{,}50} = -2{,}00 \text{ t.}$$

Hierauf:

$$S_{11} \cdot 2{,}50 - 1{,}0 \cdot 9{,}00 - E \sin\varphi \cdot 8{,}00 = 0\,,$$

$$E \sin\varphi = \frac{1}{8{,}00}(2{,}00 \cdot 2{,}50 - 1{,}0 \cdot 9{,}00) = -0{,}50\,,$$

$$E_{Z=1} = -0{,}50 \cdot \frac{5{,}951}{2{,}50} = -1{,}19 \text{ t.}$$


Bunker
(a)
W = 3,75 t
S_{14}
4.00
9.00
13.00
2.50
2.80
8.00
5.00
4.00
(b)

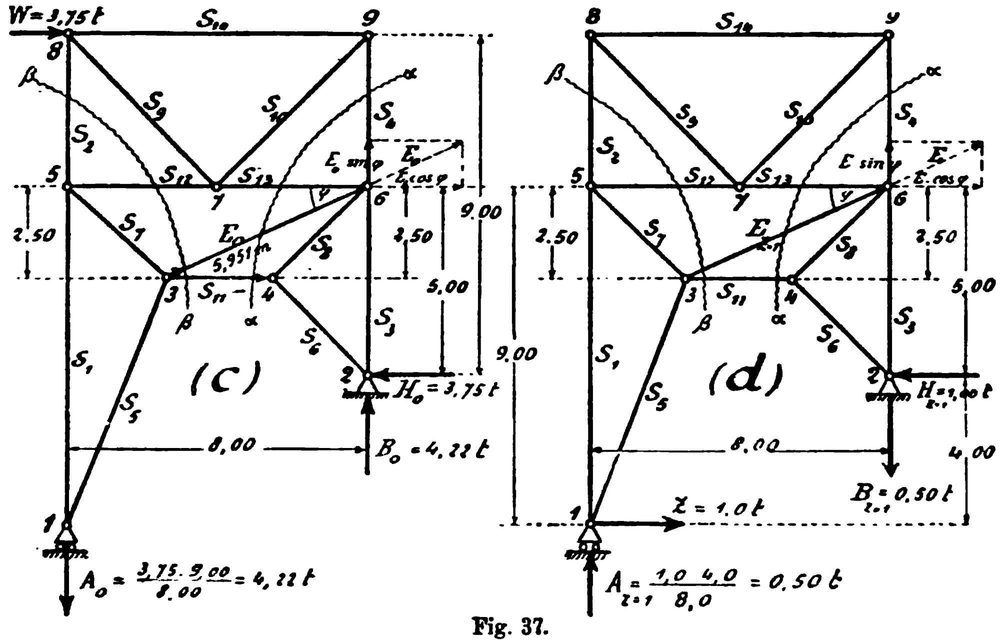

W = 3,75 t
8
9
5
6
7
3
4
1
2
2.50
9.00
5.00
8.00
(c)
$H_0 = 3.75\,t$
$B_0 = 4.22\,t$
$A_0 = \frac{3.75 \cdot 9.00}{8.00} = 4,22\,t$
(d)
$Z = 1.0\,t$
$B_{Z=1} = 0.50\,t$
$A_{Z=1} = \frac{1.0 \cdot 4.0}{8.0} = 0.50\,t$

Fig. 37.

c) Berechnung von Z. Nun setzen wir den Ausdruck $E = E_0 + Z \cdot E_{Z=1}$ gleich Null und erhalten

$$+5{,}58 + Z \cdot (-1{,}19) = 0\,,$$

$$Z = +\frac{5{,}58}{1{,}19} = +4{,}70 \text{ t.}$$

Hiermit ist die Horizontalkomponente Z des Auflagerdruckes bestimmt. Das Pluszeichen bedeutet, daß die Kraft Z so wirkt, wie von vornherein (Fig. 37d) angenommen. Die weitere Durchrechnung des Fachwerkes bietet keine Schwierigkeiten.

Dritte Aufgabe.

Das in Fig. 38 gezeichnete sechsfache Netzwerk ist zu berechnen!

„Der Fall mit zwei Ersatzstäben kommt in der technischen Praxis, soweit sie sich wenigstens bis heute entwickelt hat, kaum oder überhaupt nicht vor.“ So schrieb Herr Professor *Föppl* in der im Jahre 1900 erschienenen ersten Auflage seiner „Vorlesungen über technische Mechanik“. Kurze Zeit darauf erschien eine neue Auflage der „Graphischen Statik“ von *Müller-Breslau*, und da zeigte es sich, daß in der Zwischenzeit eine ganze Reihe von Brückensystemen untersucht war, bei denen man mit mehreren Ersatzstäben arbeiten muß. So schnell geht es in der Praxis vorwärts.

Auch wir wollen jetzt ein System untersuchen, bei dem man mit *einer* Stabvertauschung nicht mehr auskommt; sondern bei dem man *drei* „Störungsstäbe“ fortnehmen und durch drei „Ersatzstäbe“ ersetzen muß, um das Fachwerk den üblichen Berechnungsmethoden zugänglich zu machen (nach *Müller-Breslau*).

I. Beschreibung des Systems.

Das in Fig. 38a gezeichnete Fachwerk heißt ein „sechsfaches Netzwerk“, weil jede mittlere Diagonale durch die anderen Diagonalen in sechs Teile zerlegt wird. Die Konstruktion ist wichtig für Kriegs- und Kolonialzwecke, da sie aus lauter kurzen Stäben besteht und daher bequem transportierbar ist. Aus diesem Bedürfnis sind auch die neueren mehrteiligen Fachwerke entstanden.

Im mittleren Teile hat der Träger sechs gleiche Felder λ. Die Endfelder dagegen sind nur $\frac{1}{2}\lambda$ lang. Die Diagonalen mögen unter einem Neigungswinkel $\varphi = 45°$ gehen, so daß die Endvertikalen ebenfalls in Abschnitte von $\frac{1}{2}\lambda$ bzw. λ zerlegt werden.

Die Belastung sei gleichmäßig verteilt. Zu jedem der mittleren Knotenpunkte gehört also eine Last P; zum ersten und

letzten eine Last $\frac{1}{4}P$, und zum zweiten und vorletzten eine Last $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})P = \frac{3}{4}P$.

Das System ist statisch bestimmt. Denn es ist ein Träger mit drei Auflagerunbekannten und hat

$$s = 109 \text{ Stäbe und } k = 56 \text{ Knotenpunkte;}$$

also ist die Bedingung erfüllt: $s = 2k - 3$. Trotzdem geht die Berechnung nicht nach den üblichen Methoden, wie man sich leicht überzeugt, wenn man einen Kräfteplan oder dergleichen versucht. Man muß vielmehr das System mit Hilfe von Ersatzstäben zunächst in ein einfaches verwandeln.

II. Allgemeiner Rechnungsgang (Ersatzfachwerk mit drei Ersatzstäben).

Die Umwandlung eines derartig komplizierten Systems in ein einfaches kann auf verschiedene Weisen geschehen. Im vorliegenden Falle wurden die mit X, Y, Z bezeichneten Stäbe als „Störungsstäbe" genommen und dafür die „Ersatzstäbe" E, F, G eingesetzt (Fig. 38a und b). Dann entsteht ein Ersatzfachwerk, das — wie die folgende Durchrechnung zeigt — sich verhältnismäßig einfach ermitteln läßt.

Der Rechnungsgang bei *drei*facher Stabvertauschung entspricht natürlich genau dem bei *einem* Ersatzstabe: Auf das Ersatzfachwerk werden sowohl die äußeren Lasten als auch die Kräfte X, Y, Z (an Stelle der fortgenommenen Stäbe) wirkend angebracht (Fig. 38b). Dann werden die Spannkräfte in den Ersatzstäben in der Form dargestellt:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} E = E_0 + X \cdot E_{X=1} + Y \cdot E_{Y=1} + Z \cdot E_{Z=1}\,, \\ F = F_0 + X \cdot F_{X=1} + Y \cdot F_{Y=1} + Z \cdot F_{Z=1}\,, \\ G = G_0 + X \cdot G_{X=1} + Y \cdot G_{Y=1} + Z \cdot G_{Z=1}\,. \end{cases}$$

Hierin bedeuten:

$\left.\begin{matrix} E_0 \\ F_0 \\ G_0 \end{matrix}\right\}$ Spannkräfte, falls auf das Ersatzfachwerk nur die äußeren Lasten wirken. **„Zustand X, Y, $Z = 0$".**

$\left.\begin{matrix} E_{X=1} \\ F_{X=1} \\ G_{X=1} \end{matrix}\right\}$ Spannkräfte, falls auf das Ersatzfachwerk nur die Kräfte $X = 1{,}0$ t wirken. **„Zustand $X = 1$".**

Entsprechend bedeuten $E_{Y=1}$, $F_{Y=1}$, $G_{Y=1}$ die Spannkräfte in den Ersatzstäben, die beim „Zustand $Y = 1$" entstehen; usw. In Fig. 38c, n, o und p sind diese vier Zustände (X, Y, $Z = 0$; $X = 1$; $Y = 1$; $Z = 1$) dargestellt.

Sobald dann die Spannkräfte der Ersatzstäbe E, F und G in

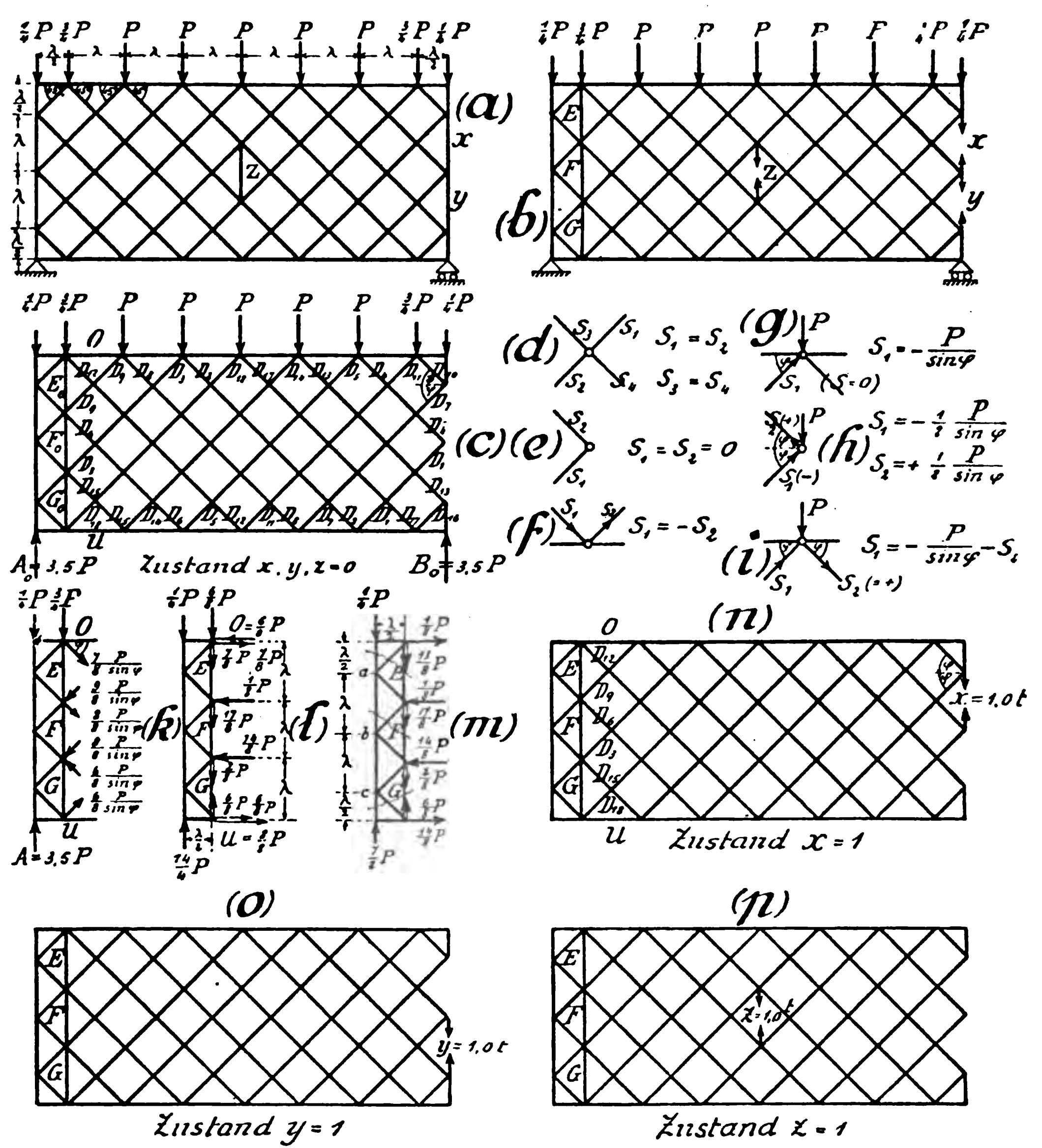


Fig. 38.

dieser Form geschrieben sind, wird jede gleich Null gesetzt. Auf diese Weise erhalten wir die drei Gleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} E_0 + X \cdot E_{X=1} + Y \cdot E_{Y=1} + Z \cdot E_{Z=1} = 0\,, \\ F_0 + X \cdot F_{X=1} + Y \cdot F_{Y=1} + Z \cdot F_{Z=1} = 0\,, \\ G_0 + X \cdot G_{X=1} + Y \cdot G_{Y=1} + Z \cdot G_{Z=1} = 0\,. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert dann die drei Unbekannten X, Y, Z. Sobald aber diese drei Störungsstäbe bekannt sind, bietet die weitere Durchrechnung des Fachwerkes keine Schwierigkeiten.

III. Durchführung des Rechnungsganges.

a) Zustand $X, Y, Z = 0$.

Die Ermittlung der Werte E_0, F_0 und G_0 kann nach Fig. 38c mittels Kräfteplan erfolgen. Einfacher jedoch auf folgende Weise: Zunächst erkennt man, daß eine Diagonale von der einen Gurtung bis zur anderen mit der gleichen Spannkraft durchläuft. An einem der inneren Knotenpunkte des Fachwerkes, wo sich zwei Diagonalen kreuzen, findet also bei den Stäben keine Änderung der Spannkraft statt (Fig. 38d). Man ersieht dies, indem man für einen solchen Knotenpunkt Fig. 38d das Kräftepolygon skizziert. Ferner lassen sich aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte vielfach direkt die Spannkräfte ablesen. So erkennt man für Fig. 38e (unbelasteter Knotenpunkt mit nur zwei Stäben), daß die angreifenden Stäbe die Spannkraft Null haben. Aus Fig. 38f ist ersichtlich, daß an den Knotenpunkten der unteren Gurtung die Diagonalen stets gleichgroße Spannkräfte, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen, haben. Fig. 38g zeigt einen Knotenpunkt des Obergurtes, an dem die eine Diagonale die Spannkraft Null habe; usw. Alle diese Fälle lassen sich aufs einfachste durch Skizzieren der zugehörigen Kräftepolygone oder durch analytische Betrachtung erledigen.

Nach dieser Vorübung kann man aber sofort die Spannkräfte der Diagonalen hinschreiben:

$$D_1 = 0; \quad D_2 = 0; \quad D_3 = -\frac{P}{\sin\varphi}, \qquad \text{(vgl. Fig. 38e, f, g).}$$

$$D_4 = 0; \quad D_5 = -\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_6 = +\frac{P}{\sin\varphi}, \qquad \text{(vgl. Fig. 38e, g, f).}$$

$$D_7 = -\frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_8 = +\frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_9 = -\frac{P}{\sin\varphi} - \frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}, \qquad \text{(vgl. Fig. 38h, f, i).}$$

$$D_{10} = +\frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{11} = -\frac{3}{4}\frac{P}{\sin\varphi} - \frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{12} = +\frac{3}{4}\frac{P}{\sin\varphi} + \frac{1}{8}\frac{P}{\sin\varphi}, \qquad \text{(vgl. Fig. 38h, i, f).}$$

$$D_{13} = -\frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{14} = -\frac{P}{\sin\varphi} + \frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{15} = +\frac{P}{\sin\varphi} - \frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi},$$

$$D_{16} = +\frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{17} = -\frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi}; \quad D_{18} = -\frac{P}{\sin\varphi} + \frac{3{,}5}{2}\frac{P}{\sin\varphi}.$$

Nachdem wir somit die Diagonalen haben, lassen sich auch die gesuchten Spannkräfte der Ersatzstäbe berechnen. Zu diesem

Zwecke betrachten wir die linke Scheibe des Ersatzfachwerkes mit den äußeren Kräften A und P und den anschließenden Diagonalkräften D_{12}, D_9, D_6, D_3, D_{15} und D_{18} (Fig. 38k). Die Diagonalkräfte mögen zunächst vertikal und horizontal zerlegt werden. Beispielsweise ergibt sich hierbei für die Vertikalprojektion von D_{12} der Wert $D_{12}\cdot\sin\varphi = \frac{7}{8}\frac{P}{\sin\varphi}\cdot\sin\varphi = \frac{7}{8}P$. Da $\varphi = 45°$ ist (Fig. 38a), so ist $\cos\varphi = \sin\varphi$. Also ist auch die Horizontalkomponente von D_{12} gleich $\frac{7}{8}\frac{P}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi = \frac{7}{8}P$. Diese Zerlegung der Diagonalkräfte horizontal und vertikal läßt sich also sehr einfach durchführen. In Fig. 38l sind diese Komponenten der D-Kräfte eingezeichnet (wobei an einem Punkte mit zwei Kräften die betreffenden Komponenten zusammengezählt sind).

Nun lassen sich auch der an die Scheibe anschließende Obergurtstab O und Untergurtstab U leicht bestimmen. Beispielsweise ergibt sich aus der Momentengleichung für den unteren rechten Eckpunkt der Scheibe Fig. 38l:

$$O\cdot 3\lambda = \left(\frac{14}{4}P - \frac{1}{4}P\right)\cdot\frac{\lambda}{2} + \frac{7}{8}P\cdot 3\lambda - \frac{1}{8}P\cdot 2\lambda - \frac{14}{8}P\cdot 1\lambda,$$

$$O = \frac{6}{8}P.$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$U = \frac{8}{8}P.$$

Zum Schlusse sind in Fig. 38m alle Kräfte, die überhaupt an der linken Scheibe des Ersatzfachwerkes angreifen, eingezeichnet. (Greifen an einem Punkte mehrere Kräfte an, so sind sie natürlich vereint.) Dann ergibt sich aus dem durch den Stab E gelegten Schnitte (Bezugspunkt a) die Spannkraft:

$$E_0 = -\frac{13}{8}P - \left(\frac{1}{8}P\cdot\frac{\lambda}{2}\right):\frac{\lambda}{2}$$

$$= -\frac{14}{8}P.$$

Entsprechend aus dem durch F gelegten Schnitte (Bezugspunkt b):

$$F_0 = \left(-\frac{13}{8}P - \frac{17}{8}P\right) + \left(\frac{1}{8}P\cdot\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}P\cdot\frac{3}{2}\lambda\right):\frac{\lambda}{2}$$

$$= -\frac{32}{8}P.$$

Und schließlich

$$G_0 = -\frac{6}{8}P - \left(\frac{14}{8}P \cdot \frac{\lambda}{2}\right) : \frac{\lambda}{2}$$

$$= -\frac{20}{8}P .$$

Hiermit sind die in den Ersatzstäben E, F, G bei dem Zustande X, Y, $Z = 0$ (d. h. nur äußere Lasten) entstehenden Spannkräfte gefunden.

b) Zustand $X = 1$.

Der Zustand, daß auf das Ersatzfachwerk die Kraft $X = 1{,}0$ t als angreifende Kraft wirkt, ist in Fig. 38n gezeichnet. Auflagerkräfte werden nicht hervorgerufen. Wenn man, von rechts anfangend, den Diagonalen nachgeht, kann man sofort die Spannkräfte hinschreiben:

$$D_{12} = +\frac{1{,}0}{2}\frac{1}{\sin\varphi}; \quad D_9 = -\frac{1{,}0}{2}\frac{1}{\sin\varphi}; \quad D_6 = -\frac{1{,}0}{2}\frac{1}{\sin\varphi};$$

$$D_3 = +\frac{1{,}0}{2}\frac{1}{\sin\varphi}; \quad D_{15} = D_{18} = 0 .$$

Aus diesen folgen dann durch Betrachtung der linken Scheibe:

$$O = \frac{1}{3\lambda}\left(-\frac{1{,}0}{2}\cdot 3\lambda + \frac{1{,}0}{2}\cdot 2\lambda + \frac{1{,}0}{2}\cdot 2\lambda - \frac{1{,}0}{2}\cdot 1\lambda\right) = 0 ,$$

$$U = 0 .$$

Und schließlich finden wir für die Ersatzstäbe die Spannkräfte:

$$E_{X=1} = -\frac{1{,}0}{2} - \left(\frac{1{,}0}{2}\cdot\frac{\lambda}{2}\right) : \frac{\lambda}{2} = -1{,}0 \text{ t} ,$$

$$F_{X=1} = -\frac{1{,}0}{2} - \left(\frac{1{,}0}{2}\cdot\frac{3\lambda}{2}\right) : \frac{\lambda}{2} + \left(2\cdot\frac{1{,}0}{2}\cdot\frac{\lambda}{2}\right) : \frac{\lambda}{2} = -1{,}0 \text{ t} ,$$

$$G_{X=1} = 0 .$$

Hiermit ist der Zustand $X = 1$ erledigt.

c) Zustand $Y = 1$.

Der Leser führe die Rechnung selbständig durch. Es ergibt sich:

$$E_{Y=1} = 0 ; \quad F_{Y=1} = -1{,}0 \text{ t} ; \quad G_{Y=1} = -1{,}0 \text{ t} .$$

d) Zustand $Z = 1$.

$$E_{Z=1} = 0 ; \quad F_{Z=1} = +1{,}0 \text{ t} ; \quad G_{Z=1} = 0 .$$

e) Auflösung der Gleichungen.

Nachdem somit sämtliche Zustände erledigt sind, gehen wir zur Auflösung der Gleichungen (II). Die Bezeichnungen E_0, F_0

und G_0 mögen zunächst noch beibehalten werden und nur für $E_{X=1}$ usw. die gefundenen Werte eingesetzt werden. Dann lauten die Gleichungen:

$$\begin{cases} E_0 + X\cdot(-1{,}0) + Y\cdot 0 \qquad\quad + Z\cdot 0 \;\; = 0\,, \\ F_0 + X\cdot(-1{,}0) + Y\cdot(-1{,}0) + Z\cdot 1{,}0 = 0\,, \\ G_0 + X\cdot 0 \qquad\quad + Y\cdot(-1{,}0) + Z\cdot 0 \;\; = 0\,. \end{cases}$$

$$\text{(IIa)} \qquad \begin{cases} E_0 - X = 0\,, \\ F_0 - X - Y + Z = 0\,, \\ G_0 - Y = 0\,. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Resultate:

$$\text{(IIb)} \qquad \begin{cases} X = +E_0\,, \\ Y = +G_0\,, \\ Z = X + Y - F_0 = E_0 + G_0 - F_0\,. \end{cases}$$

Nun setzen wir auch für E_0, F_0 und G_0 die Zahlen ein und erhalten dann die gesuchten Störungsstäbe:

$$X = -\tfrac{7}{4}P\,; \quad Y = -\tfrac{5}{2}P\,; \quad Z = -\tfrac{1}{4}P\,.$$

Nachdem jetzt X, Y, Z gefunden sind, kann man das ganze übrige Fachwerk analytisch oder graphisch berechnen.

Schlußbetrachtung: Auch dieses bereits recht komplizierte System hat sich mit Hilfe der Ersatzstäbe ziemlich schnell berechnen lassen. Es sei nun darauf hingewiesen, daß sich im Falle einer anderen Belastung nur die Werte E_0, F_0 und G_0 ändern würden. Die zu den Zuständen $X = 1$, $Y = 1$ und $Z = 1$ gehörigen Werte sind dagegen von der äußeren Belastung unabhängig. Hierdurch vereinfacht sich die Arbeit, wenn man eine derartige Konstruktion für verschiedene äußere Belastungen durchzurechnen hat.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß man gelegentlich statt der Ersatzstäbe E usw. auch Ersatzstützkräfte E usw. einführen kann. Es kommt ja nur darauf an, daß das Ersatzfachwerk statisch bestimmt und möglichst einfach zu berechnen ist. Im allgemeinen gibt aber das Einfügen von Ersatz**stäben** den einfachsten Rechnungsgang.

§ 16.

Ausnahmefälle: Statisch bestimmte Systeme, die trotzdem beweglich sind.

Daß es überhaupt solche Fachwerke gibt, muß zunächst sonderbar erscheinen. Denn ein statisch bestimmtes System ist ja gerade dadurch gekennzeichnet, daß es so viel widerstehende

Kräfte hat, wie Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen sind. Trotzdem kommen Fälle vor von Fachwerken, die die genügende Anzahl von Stab- und Auflagerunbekannten haben, dabei aber beweglich sind.

Vorweg sei aber hierzu bemerkt, daß die bisher durchgenommene mathematische Theorie durchaus nicht umgestoßen werden soll oder kann. Es handelt sich nur darum, einen besonderen Fall der Theorie genauer zu betrachten und mathematisch zu erklären.

I. Beispiele von beweglichen statisch bestimmten Systemen.

a) Absolute Beweglichkeit.

Fig. 39 a und b stellen je einen Träger dar, der ein festes und ein bewegliches Lager hat, und bei dem die Bedingung erfüllt ist: $s = 2k - 3$. Beide Figuren haben also die vorgeschriebene Anzahl von Unbekannten.

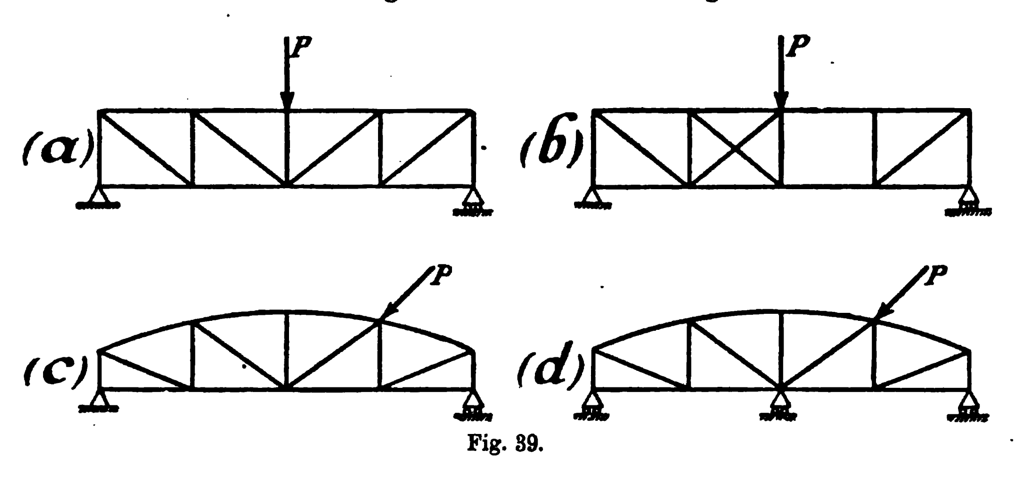


Fig. 39.

Während aber bei Fig. 39 a jedes Feld eine Diagonale hat, ist in Fig. 39 b die Diagonale des einen Feldes herausgenommen und in das Nebenfeld eingesetzt. Diese Figur hat also in einem Felde zwei (zug- und druckfeste) Diagonalen, während in einem Felde die Diagonale gänzlich fehlt. Durch diese Änderung in der Anordnung der Stäbe (nicht in der Zahl der Stäbe) ist die Konstruktion Fig. 39 b ganz augenscheinlich beweglich geworden. Infolge der Last P würde das Fachwerk einfach zusammenbrechen. Wir haben hier also einen Fall, wie durch eine falsche Anordnung der Stäbe eine Konstruktion beweglich wird, trotzdem die Zahl der Stäbe die Bedingung $u = 2k$ erfüllt.

Ein weiteres Beispiel einer solchen beweglichen Konstruktion bietet Fig. 39 d. Diese ist aus Fig. 39 c dadurch entstanden, daß zwar die Anzahl der Lagerkräfte dieselbe geblieben, dagegen die Anordnung derselben verändert ist. Es sind nämlich die drei Auflagerunbekannten in Form von drei beweglichen Lagern, die alle in gleicher Richtung verschieblich sind, angebracht. Man ersieht ohne weiteres, daß eine schräge Kraft P die ganze Konstruktion einfach fortschieben würde. Auch in diesem Fall ist also die Unbrauchbarkeit (Beweglichkeit) dadurch entstanden, daß die widerstehenden Kräfte zwar in der erforderlichen *Zahl* vorhanden, aber *falsch angeordnet* sind.

Sowohl in Fig. 39 b wie 39 d wird sich die Konstruktion so weit bewegen, bis sie einfach „unten liegt"; d. h. bis sie irgendwo gegen einen anderen Körper stößt. Wir nennen solche Konstruktionen von *„absoluter"* oder *„endlicher Beweglichkeit"*.

b) Begrenzte Beweglichkeit.

Es gibt noch eine andere Art von beweglichen statisch bestimmten Systemen. Sie sind zwar nicht so verschieblich wie die soeben betrachteten Fig. 39 b und d, trotzdem aber unzulässig.

Ein Beispiel hierfür bietet Fig. 40 b. Diese ist aus Fig. 40 a dadurch entstanden, daß der Neigungswinkel α der Stäbe zu Null geworden ist. Durch diese Änderung in der Anordnung der Stäbe ist aber ein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Konstruktionen entstanden. Während nämlich Fig. 40 a ein normales Tragwerk ist, das auch unter der Einwirkung der Belastung in der gezeichneten Lage verharrt (abgesehen von den sehr kleinen elastischen Verschiebungen), kann die Fig. 40 b überhaupt nicht in der gezeichneten Stellung bleiben. Denn zwei *horizontale* Kräfte S können niemals einer *vertikalen* Kraft P das Gleichgewicht halten, da sie ja stets nur eine horizontale Resultierende geben. Die Fig. 40 b ist also einfach unmöglich. Sie kann nur auf dem Papier existieren, nicht aber in der Wirklichkeit.

In Wirklichkeit werden vielmehr die Stäbe S von Fig. 40 b unter dem Einflusse der Belastung stark nach unten durchschlagen, so daß sie schließlich gegen die Horizontale einen Winkel α' bilden. Erst in dieser neuen Stellung ist Gleichgewicht möglich. Denn dann können die beiden Kräfte S' eine Resultierende ergeben, die der vertikalen Kraft P das Gleichgewicht hält.

Um zu sehen, wie stark die Durchhängung δ in solchen Fällen ungefähr ist, wollen wir annehmen, die Länge l in Fig. 40 b

sei 300 cm, die Spannung σ im durchgehangenen Zustande sei 1400 kg/qcm, der Elastizitätsmodul $E = 2150000$ kg/qcm. Dann ergibt sich aus dem *Hooke*schen Gesetze (I. Band, § 28, 30) zunächst die Verlängerung λ, die die Stäbe S bei der Einsenkung erfahren:

$$\lambda = \frac{\sigma \cdot l}{E} = \frac{1400 \cdot 300}{2150000} = 0{,}195 \text{ cm.}$$

Und aus Fig. 40b folgt dann die Einsenkung δ:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (l + \lambda)^2 - l^2 = l^2 + 2l\lambda + \lambda^2 - l^2 \\ &= 2l\lambda + \lambda^2 \\ &= 2 \cdot 300 \cdot 0{,}195 + 0{,}195^2 = 117{,}0 \\ \delta &= \sqrt{117} = 10{,}8 \text{ cm!} \end{aligned}$$

Wenn also die Konstruktion Fig. 40b bei einer Spannung von $\sigma = 1400$ kg/qcm endlich zur Ruhe kommt, hat Punkt m sich um

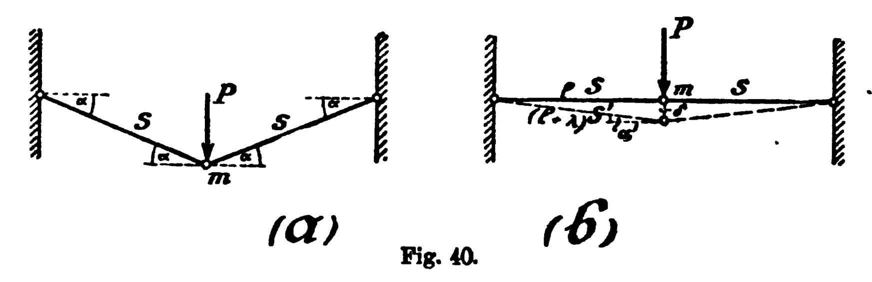


Fig. 40.

10,8 cm von seiner ursprünglichen Stellung entfernt. Derartige Konstruktionen erfahren aber, wie wir später sehen werden, sehr leicht noch größere Spannungen. Auf jeden Fall ist also klar, daß wir bei dem System Fig. 40b nicht mehr von den gewöhnlichen, sehr kleinen elastischen Formänderungen reden können, sondern daß wir diese Konstruktionen direkt als „beweglich" bezeichnen müssen.

Insgesamt haben wir in diesem Paragraphen drei Beispiele von beweglichen Systemen kennen gelernt. Zunächst die Fig. 39b und d, und jetzt Fig. 40b. Zwischen den Fällen Fig. 39b und d einerseits und Fig. 40b andererseits besteht aber ein Unterschied. Die ersteren Konstruktionen leisten den angreifenden Kräften überhaupt keinen Widerstand. Sie geben einfach nach und werden so weit verschoben, bis sie irgendwo gegen einen anderen Körper stoßen. Das System Fig. 40b dagegen findet von selber eine Gleichgewichtslage, allerdings erst nach recht beträchtlicher Formänderung. Die Verschiebung ist also nicht beliebig groß,

sondern die Konstruktion kommt von selber zum Stillstand. Wir wollen einen derartigen Fall eine „*begrenzte Beweglichkeit*“ nennen. Man bezeichnet sie wohl auch als „unendlich kleine Beweglichkeit“. Doch dürfte diese Bezeichnung weniger zutreffend sein, da die Bewegungen durchaus nicht unendlich klein sind (10,8 cm = $\sim\frac{1}{60}$ der Spannweite!). Unendlich klein, oder wenigstens nahezu unendlich klein, sind die Bewegungen nur bei solchen Systemen, die wir als unsere „*starren Systeme*“ bezeichnen. Denn bei diesen sind die elastischen Formänderungen tatsächlich verschwindend klein gegenüber den Abmessungen des Systems selber. (Im allgemeinen höchstens $\frac{1}{600}$ der Spannweite, meistens noch weniger.)

Wiederholung.

Wenn ein System die genügende Anzahl von widerstehenden Kräften hat ($u = 2k$), so ist der normale Fall natürlich der, daß die Konstruktion unter dem Einflusse der Belastung nur die üblichen verschwindend kleinen Formänderungen infolge der Elastizität des Materials ausführt. Dieses sind unsere sogenannten „*starren Systeme*“. Es gibt aber auch Ausnahmefälle. Bei besonderer Anordnung und Lage der Stäbe, bzw. Auflager, kann es nämlich vorkommen, daß die Konstruktion unter dem Einflusse der Belastung ganz unzulässige Verschiebungen ausführt. Dieses sind die sogenannten „*beweglichen Systeme*“. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle:

a) absolute Beweglichkeit: bei denen leistet die Konstruktion den angreifenden Kräften überhaupt keinen Widerstand,

b) begrenzte Beweglichkeit: bei denen kann die Konstruktion nur in der ursprünglichen Stellung keinen Widerstand leisten. Später kommt sie dann in einer neuen Stellung von selber zum Gleichgewicht; allerdings erst nach einer ganz unzulässigen Formänderung.

Es sei noch hinzugefügt, daß auch bei statisch unbestimmten Systemen, die also sogar mehr Stäbe und Auflagerkräfte haben, als erforderlich sind, derartige bewegliche Systeme vorkommen.

Jetzt wollen wir dazu übergehen, die Sache mathematisch zu erklären und das Kennzeichen abzuleiten, nach dem wir es einer Konstruktion sofort ansehen können, ob sie solch einen Ausnahmefall bildet oder nicht. Hierzu brauchen wir einen kleinen Ausflug in das mathematische Gebiet. [Für mathematisch geschulte Leser wird es genügen, nur den Schluß des folgenden Absatzes zu lesen.]

II. Mathematik.

a) Elementare Untersuchung von Gleichungen 1ten Grades.

Es handle sich um eine Gruppe von n Gleichungen 1ten Grades mit n Unbekannten. Beispielsweise:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 ,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 ,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 .$$

Hierin seien x, y, z die Unbekannten und a_1, b_1 usw. gegebene Zahlen. Bei der Auflösung dieser Gleichungen können nun folgende Fälle eintreten: Erstens, die Gleichungen ergeben bei ihrer Auflösung für jede der Unbekannten einen bestimmten endlichen Wert. Zweitens, die Gleichungen ergeben keinen bestimmten endlichen Wert, sondern entweder den Wert „unendlich“ oder sie lassen sich überhaupt nicht auflösen. Der erstere Fall ist ja der weitaus häufigere und von uns bisher als der normale Fall als selbstverständlich angenommen (§ 11, I). Die zweite Möglichkeit — für die Unbekannten kommt der Wert unendlich heraus oder aber die Gleichungen lassen sich überhaupt nicht auflösen — möge zunächst noch an Beispielen erläutert werden.

Beispielsweise sei bei irgendeiner Untersuchung für die Unbekannte x die Gleichung herausgekommen:

$$\text{(I)} \qquad x \cdot 0 = 4 ;$$

also:

$$x = \frac{4}{0} .$$

Je kleiner der Nenner eines Bruches ist, um so größer wird bekanntlich der Bruch selber. Nähert sich der Nenner immer mehr dem Werte Null, so wächst der Bruch immer mehr; und ist der Nenner direkt gleich Null, so wird der Bruch unendlich. Wir haben also in der obigen Gleichung (I) ein Beispiel dafür, wie aus einer einfachen Gleichung 1ten Grades für die betreffende Unbekannte der Wert „∞“ herauskommen kann.

Ein anderes Beispiel:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0 = 2 , \\ x \cdot 1 + y \cdot 1 - z \cdot 1 = 3 , \\ x \cdot 1 + y \cdot 0 - z \cdot 1 = 4 . \end{cases}$$

Diese anscheinend so einfachen Gleichungen lassen sich nämlich überhaupt nicht auflösen. Zunächst schreiben wir sie unter Fortlassung aller überflüssigen Zahlen:

$$\begin{aligned} y \qquad &= 2 , \\ x + y - z &= 3 , \\ x \qquad - z &= 4 . \end{aligned}$$

Addiert man nun die erste und dritte Gleichung, so ergibt sich:

$$x + y - z = 2 + 4 = 6 .$$

Andererseits soll aber nach der zweiten Gleichung:

$$x + y - z = 3$$

sein. Wir sehen also: Die obigen Gleichungen (II) enthalten einen Widerspruch. Es ist gar nicht möglich, diese Gleichungen aufzulösen, denn sie widersprechen sich selbst. Somit haben wir in den Gleichungen (I) und (II) Beispiele dafür kennen gelernt, daß sich aus anscheinend ganz einfachen Gleichungen 1ten Grades keine bestimmten endlichen Werte für die Unbekannten ergeben; sondern daß entweder der Wert „unendlich" herauskommt, oder daß die Gleichungen sich überhaupt nicht auflösen lassen.

Wie kann man nun erkennen, ob eine Gruppe von Gleichungen 1ten Grades diese Fallstricke enthält? Ohne weitere mathematische Hilfsmittel würde man so vorgehen: Man versucht, die Gleichungen aufzulösen. Ergeben sich hierbei für die Unbekannten bestimmte endliche Werte, so ist alles in Ordnung. Kommt aber schließlich für eine oder mehrere Unbekannten der Wert „unendlich" heraus, oder geht es mit der Auflösung überhaupt nicht weiter, indem sich schließlich ein Widerspruch in den Gleichungen herausstellt, dann liegt eben der besondere Fall vor, den wir in den Gleichungen (I) und (II) kennen gelernt haben. Auf diese Weise — indem wir einfach die Auflösung versuchten — sind wir ja auch bei den Gleichungen (I) und (II) dahintergekommen, daß bei ihnen dieser besondere Fall vorlag.

Im folgenden werden wir nun aber ein Hilfsmittel kennen lernen, mit dem wir einer Gruppe von Gleichungen sofort ansehen können, ob sie für die Unbekannte endliche Werte liefert, oder aber den Wert „unendlich" resp. überhaupt keine Werte. Dieses Mittel, das uns also das probeweise Auflösen der Gleichungen ersparen soll, sind die sog. „Determinanten". Unbedingt nötig sind sie nicht; sie erleichtern uns aber die Arbeit.

b) Untersuchung der Gleichungen mittels Determinanten.

α) *Erklärung einer Determinante.*

Eine Determinante hat den Zweck, gewisse Zusammenstellungen von Multiplikationen, die namentlich beim Auflösen von Gleichungen vorkommen, abgekürzt zu schreiben. Wenn der Mathematiker beispielsweise auf folgende Zusammenstellung von Produkten stößt:

$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 ,$$

so schreibt er dies in einer besonderen Form. Er schreibt nämlich die einzelnen Zahlen der obigen Faktoren einfach in einer Gruppe zusammen, die folgende Gestalt hat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Man nennt diese Form eine „*Determinante*". Sie ist also nichts weiter als eine **andere Schreibweise**, gewissermaßen ein Symbol, für die obige Differenz der Produkte $a_1 b_2$ und $a_2 b_1$. Der Zweck dieser neuen Schreibweise wird später klar werden. Wir brauchen uns jetzt nur die Bedeutung einer solchen Determinante zu merken; es ist:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

In Worten: Man multipliziert die Zahlen in der Determinante **kreuzweis** und nimmt das zweite Produkt mit negativem Vorzeichen. Dann erhält man den Ausdruck, den eine solche Determinante darstellen soll.

Ferner kommt man beim Auflösen von Gleichungen häufig auf Summen von Produkten folgender Art:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)\,.$$

Wenn wir auf diesen Ausdruck die soeben kennen gelernte Determinantenschreibweise anwenden, so würden wir ihn in der Form schreiben:

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

und diese Summe zieht der Mathematiker zu folgender Schreibweise zusammen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

Wenn wir also in einem mathematischen Buche auf solch ein Symbol stoßen, so wissen wir jetzt, daß damit gemeint ist:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$
$$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)\,.$$

In Fortführung dieses Gedankens können wir nun auch Determinanten mit noch mehr Gliedern deuten. Beispielsweise hat zu bedeuten:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Jede der auf der rechten Seite stehenden kleinen Determinanten ist nun weiter zu entwickeln, wie Formel (2) für eine solche Determinante mit drei Horizontal- und Vertikalreihen angibt. Dann erhalten wir:

$$(3\text{a})\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\left\{b_2\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}\right\}$$
$$- a_2\left\{b_1\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}\right\}$$
$$+ a_3\left\{b_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}\right\}$$
$$- a_4\left\{b_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Jetzt haben wir die Sache so weit entwickelt, daß nur noch Determinanten mit zwei Horizontal- und Vertikalreihen vorkommen. Diese kleinen Determinanten werden nun nach Formel (2) weiter entwickelt, so daß schließlich die große Determinante sich auflöst in:

$$(3b)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_1\{b_2(c_3 d_4 - c_4 d_3) - b_3(c_2 d_4 - c_4 d_2) + b_4(c_2 d_3 - c_3 d_2)\} \\ &\quad - a_2\{b_1(c_3 d_4 - c_4 d_3) - b_3(c_1 d_4 - c_4 d_1) + b_4(c_1 d_3 - c_3 d_1)\} \\ &\quad + a_3\{b_1(c_2 d_4 - c_4 d_2) - b_2(c_1 d_4 - c_4 d_1) + b_4(c_1 d_2 - c_2 d_1)\} \\ &\quad - a_4\{b_1(c_2 d_3 - c_3 d_2) - b_2(c_1 d_3 - c_3 d_1) + b_3(c_1 d_2 - c_2 d_1)\}. \end{aligned}$$

Aus dem letzten Beispiele wird man auch den Nutzen der Determinanten erkennen: Sie ermöglichen es, einen langen umständlichen Summenausdruck von Produkten durch ein übersichtliches, einfaches Symbol darzustellen. Man lasse sich also weder durch den neuen Namen noch durch die neue Darstellung imponieren. Es ist nur eine neue, aber recht zweckmäßige Schreibweise für bekannte, häufig vorkommende Sachen.

Die Horizontalreihen einer Determinante nennt man *Zeilen*, die Vertikalreihen heißen *Kolonnen*. Jede der Zahlen a_1, b_1, ... heißt ein *Element* der Determinante. Eine Determinante mit n Zeilen (und also auch n Kolonnen) heißt vom $n$ten Grade. Sie hat n^2 Elemente. Abgekürzt schreibt man Determinante „D" oder auch mit dem griechischen „Δ".

Will man eine Determinante vom $n$ten Grade in ihre Bedeutung (Summe von Produkten) auflösen, so verfahre man, wie soeben bei der Determinante 4ten Grades durchgeführt ist: Man zerlegt die Determinante $n$ten Grades in n Determinanten vom $(n-1)$ten Grade, sog. „Unterdeterminanten". Das hierbei zu beachtende Schema dürfte durch Formel (3) klargestellt sein. Beispielsweise erhält man die zum Faktor a_1 gehörige Unterdeterminante, indem man die Horizontal- und Vertikalreihe der Hauptdeterminante, in denen a_1 vorkommt, fortläßt und die übrigen Zahlen zu einer Determinante zusammenschreibt. Die Vorzeichen der Determinante sind abwechselnd + und —. Jede dieser Unterdeterminanten vom $(n-1)$ten Grade zerlegt man nun nach demselben Schema in $(n-1)$ weitere Unterdeterminanten vom $(n-2)$ten Grade [Formel (3a)]. Schließlich kommt man auf Determinanten 2ten Grades, die man dann nach der in Formel (1) gegebenen Erklärung direkt hinschreiben kann. Auf diese Weise läßt sich also jede Determinante in eine ganz bestimmte Summe von Produkten auflösen, und der Zweck der Determinanten ist eben der, eine solche Reihe von Produkten — mit denen man es nämlich in der Theorie der Gleichungen fortwährend zu tun hat — in recht übersichtlicher und kurzer Weise zu schreiben. Irgendwelcher mathematische Lehrsatz oder dergleichen steckt absolut nicht dahinter.

β) *Anwendung der Determinanten zur Auflösung von Gleichungen.*

Jene Summe von Produkten, für die wir soeben die Determinantenschreibweise eingeführt haben, tritt besonders beim Auflösen von

Gleichungen auf. Nehmen wir z. B. die zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 , \\ a_2 x + b_2 y = c_2 . \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den gewöhnlichen Methoden der Algebra ergibt für die Unbekannten die Werte:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} ; \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} .$$

Vergleichen wir nun diese Ausdrücke mit unseren Determinanten, so erkennen wir, daß die vorkommenden Summen von Produkten gerade in die Determinantenschreibweise hineinpassen. Durch Anwendung der Formel (1) ergibt sich nämlich die Schreibweise:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} .$$

Diese Schreibweise hat den großen Vorteil, daß sich nach ihr die Werte von x und y ohne weitere Ausrechnung direkt hinschreiben lassen. Nämlich: Im Nenner sowohl bei x als bei y steht eine Determinante, die einfach dadurch entsteht, daß die in den gegebenen Gleichungen bei x und y stehenden Faktoren in Form einer Determinante zusammengeschrieben werden (sog. „*Nennerdeterminante*"). Und die „*Zählerdeterminante*" von x entsteht dadurch, daß man die Faktoren, die in den Gleichungen bei x stehen (a_1 und a_2), aus der Nennerdeterminante fortläßt und durch die auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden Faktoren (c_1 und c_2) ersetzt. Entsprechend findet man die bei y im Zähler stehende Determinante, indem man aus der Nennerdeterminante die Zahlen b_1 und b_2 (d. h. die in den Gleichungen neben y stehenden Faktoren) fortläßt und dafür die rechte Seite der Gleichungen (c_1 und c_2) einsetzt. Auf diese Weise kann man die Lösung der Gleichungen in Determinantenform sofort hinschreiben.

Genau wie bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten läßt sich nun für eine beliebige Anzahl von Gleichungen mit der entsprechenden Anzahl von Unbekannten der Rechnungsgang durchführen: Zunächst schreiben wir die Gleichungen so, daß auf der linken Seite nur die Unbekannten x, y usw. mit ihren Faktoren a_1, b_1 usw. stehen; während rechts die bekannten Glieder sind. Dann läßt sich jede Unbekannte sofort in Form eines aus zwei Determinanten gebildeten Bruches hinschreiben: Die Nennerdeterminante dieses Bruches wird einfach dadurch gebildet, daß sämtliche Faktoren der Unbekannten x, y usw. in Form einer Determinante zusammengeschrieben werden. Und die Zählerdeterminante z. B. der Unbekannten x läßt sich aus der Nennerdeterminante ableiten, indem man in dieser die Vertikalreihe, in der die zu der Unbekannten x gehörigen Faktoren stehen, wegstreicht und

durch die auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden Zahlen ersetzt. Im Nenner aller Unbekannten steht also ein und dieselbe Determinante. Dagegen die Zählerdeterminanten der einzelnen Unbekannten sind voneinander verschieden.

Den Beweis für diese Sache können wir uns wohl schenken. Doch möge ein Beispiel gezeigt werden:

$$5x + 2y + 3z = 18\,,$$
$$2x + 4y + 1z = 13\,,$$
$$1x + 3y + 4z = 19\,.$$

Unsere Regel liefert sofort die Auflösung (zuerst wird die Nennerdeterminante hingeschrieben, dann die Zählerdeterminante):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 13 & 4 & 1 \\ 19 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{18\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 13\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 19\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{18(16-3) - 13(8-9) + 19(2-12)}{5(16-3) - 2(8-9) + 1(2-12)} = \frac{57}{57} = 1\,,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 18 & 3 \\ 2 & 13 & 1 \\ 1 & 19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{114}{57} = 2\,,$$

$$z = 3\,.$$

Auf diese Weise kann man also solche Gleichungen recht übersichtlich auflösen.

γ) Aufsuchung der Ausnahmefälle mittels Determinanten.

Jetzt kommt für uns die Hauptsache. Mit Hilfe der Determinanten können wir nämlich auch leicht entscheiden, ob solch eine Gruppe von Gleichungen für die Unbekannten bestimmte endliche Werte liefert oder nicht. Der mathematische Satz hierfür lautet: Stellt sich bei einer Gruppe von Gleichungen heraus, daß die „*Nennerdeterminante*" den Wert „Null" ergibt, so sind die Gleichungen nicht auflösbar bzw. ergeben für die Unbekannten den Wert „Unendlich". Als Beispiel diene die Gruppe (II) von Gleichungen, die wir zu Anfang unserer mathematischen Betrachtung untersucht haben:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 0 = 2\,, \\ x\cdot 1 + y\cdot 1 - z\cdot 1 = 3\,, \\ x\cdot 1 + y\cdot 0 - z\cdot 1 = 4\,. \end{cases}$$

Hier lautet die Nennerdeterminante (d. h. die Koeffizienten der Unbekannten zu einer Determinante zusammengeschrieben):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Diese ergibt bei ihrer Auflösung:

$$0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1) - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = 0.$$

Die Nennerdeterminante liefert also den Wert „Null". Nach dem soeben ausgesprochenen mathematischen Satze ist dies ein Zeichen, daß die betreffenden Gleichungen sich nicht auflösen lassen bzw. für die Unbekannte den Wert „Unendlich" ergeben. In der Tat haben wir ja auch vorhin beim Versuch der Auflösung der Gleichungen gesehen, daß sie einen inneren Widerspruch enthalten und also nicht auflösbar sind.

Nur noch eine kleine Unannehmlichkeit ist zu überwinden. Die Auflösung einer Determinante mit mehreren Horizontal- und Vertikalreihen ist nämlich etwas langweilig. Hier hilft folgender Satz aus der Determinantentheorie:

Ist bei einer Determinante eine Horizontal- oder Vertikalreihe (d. h. jedes Glied derselben) das Vielfache einer anderen Horizontal- oder Vertikalreihe, so hat die Determinante den Wert „Null".

Zum Beispiel ist in der vorhin untersuchten Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

die dritte Kolonne (Vertikalreihe) das (-1)fache der ersten Kolonne (denn es ist $0 = (-1)\cdot 0$; usw.). In der Tat hat ja auch, wie wir oben gesehen haben, die ganze Determinante den Wert Null.

Aus dem obigen Satze folgt als Spezialfall: Eine Determinante ist auch dann gleich Null, wenn eine Zeile oder Kolonne das 0fache einer anderen Reihe ist; d. h. wenn eine Zeile oder Kolonne nur aus den Zahlen „Null" besteht.

Durch diese Betrachtungen sind wir ein wesentliches Stück in der Theorie der Gleichungen vorwärts gekommen. Sobald wir die Gleichungen angeschrieben haben, können wir durch bloße Untersuchung der Nennerdeterminante erkennen, ob diese Gleichungen bei ihrer Auflösung bestimmte endliche Werte für die Unbekannte liefern oder nicht. Soweit brauchen wir die Mathematik für die späteren statischen Untersuchungen.

Wiederholung.

Im vorliegenden Absatze haben wir eine rein mathematische Sache betrachtet, nämlich die Frage: Welche Möglichkeiten ergeben sich beim Auflösen von Gleichungen 1ten Grades? Folgendes war das Resultat:

Der normale Fall ist natürlich der, daß eine Gruppe von n Gleichungen 1ten Grades mit n Unbekannten für jede Unbekannte einen bestimmten endlichen Wert liefert. Setzt man dann diese endlichen Werte an Stelle der Unbekannten ein, so werden die Gleichungen befriedigt. Im Gegensatz zu diesem Normalfall kann aber auch der Ausnahmefall eintreten, daß die Gleichungen bei ihrer Auflösung nicht endliche Werte für die Unbekannten ergeben [Beispiele Gleichungen (I) und (II) dieses Absatzes]. In diesem Falle können die Gleichungen nur durch unendliche Werte der Unbekannten befriedigt werden bzw. sie lassen sich überhaupt nicht befriedigen (da sie einen inneren Widerspruch enthalten).

Um nun diesen Ausnahmefall — der für das Spätere sehr wichtig ist — zu erkennen, kann man verschieden vorgehen. Entweder: Wir beginnen ruhig nach den elementaren Methoden der Algebra mit der Auflösung der Gleichungen. Dann muß sich später von selber herausstellen, ob sie endliche Werte liefern oder nicht. Oder: Wir denken uns die Lösung der Gleichungen mittels Determinanten durchgeführt. Dann tritt bei allen Unbekannten im Nenner ein und dieselbe Determinante („*Nennerdeterminante*") auf, die einfach dadurch entsteht, daß die in den Gleichungen neben den Unbekannten stehenden Koeffizienten in Determinantenform zusammengeschrieben werden. Ist diese Nennerdeterminante gleich Null, dann liegt der Ausnahmefall vor.

Zur Erleichterung der Rechnung wurde noch der Hilfssatz erwähnt: Ist bei einer Determinante eine Zeile oder Kolonne proportional einer anderen Zeile oder Kolonne, so ist die Determinante gleich Null.

Handelt es sich nur um eine Gleichung mit einer Unbekannten, so braucht man natürlich keine besonderen Untersuchungen. Für diesen Fall [Gleichung (I)] haben wir bereits gesehen, daß sich dann der Wert „unendlich" für die Unbekannte ergibt, wenn der Faktor der Unbekannten aus der Zahl „Null" besteht. [Die Determinante besteht dann gewissermaßen nur aus der einen Zahl Null.]

III. Erklärung der statischen Ausnahmefälle (bewegliche st. best. Systeme) **durch die Theorie der Gleichungen.**

Im ersten Absatze dieses Paragraphen haben wir an einigen Beispielen gesehen, daß es Systeme gibt, die trotz genügender

Anzahl von Unbekannten beweglich sind. Jetzt soll mit Hilfe der soeben durchgenommenen Theorie der Gleichungen die mathematische Erklärung folgen.

Die ganze Berechnung eines Systems läßt sich ja in mathematischer Hinsicht zurückführen auf die Aufstellung und Auflösung einer Gruppe von Gleichungen. Der grundlegende Gedankengang ist stets folgender: Jeder Teil der Konstruktion soll im Ruhezustand sein. Unter dieser Annahme schreiben wir die Gleichgewichtsbedingungen an und schaffen uns hierbei eine Gruppe von Gleichungen. Die Unbekannten in diesen Gleichungen sind die gesuchten Stab- und Auflagerkräfte, und zwar erscheinen sie sämtlich in der ersten Potenz (also lineare Gleichungen). Die Faktoren, mit denen die Unbekannten multipliziert sind, sind die Neigungswinkel der Stäbe bzw. Abmessungen des Fachwerkes; also bekannte Größen. Außerdem kommen in diesen Gleichungen noch Glieder vor, die von den Lasten P herrühren; also ebenfalls bekannt sind. Mit anderen Worten: Der ganze Gleichgewichtszustand eines Systems läßt sich mathematisch darstellen durch eine Gruppe von Gleichungen, die die Form haben:

$$a_1 x + b_1 y + \dots = c_1 \,,$$
$$a_2 x + b_2 y + \dots = c_2 \,,$$
usw.

Hierin sind x, y usw. die unbekannten Kräfte (Stäbe und Auflager), und a_1, b_1 usw. sind bekannte Größen. (Als Beispiel nehme man die Gleichungen von § 12, erste Aufgabe. Natürlich können einzelne Faktoren auch gleich Null sein. Dann fallen die betreffenden Glieder aus.)

Nach den Lehren von Absatz II dieses Paragraphen können sich nun beim Auflösen dieser Gleichungen folgende Fälle ergeben:

a) **Normalfall.** Für jede der Unbekannten ergibt sich ein bestimmter endlicher Wert. Setzt man diese Werte an Stelle der Unbekannten in die Gleichungen ein, so werden sie erfüllt (d. h. die linke Seite wird gleich der rechten). Dies hat folgende physikalische Bedeutung: In dem betreffenden System muß jede Stab- und Auflagerkraft in einer bestimmten endlichen Größe wirken. Wenn sie aber in dieser Größe wirkt, dann ist dafür auch jede Gleichgewichtsbedingung erfüllt, d. h. dann ist tatsächlich jeder Punkt des Systems im Ruhezustand. „*Starres System*“.

b) **Ausnahmefall.** Für die Unbekannten ergeben sich Werte „unendlich“ bzw. überhaupt keine Werte, da sich die Gleichungen

nicht erfüllen lassen. Die Bedeutung des letzteren Falles ist ohne weiteres klar: Die Forderung, die in den Gleichgewichtsbedingungen steckt, läßt sich durch keinerlei Stab- oder Auflagerkräfte erfüllen; sie ist direkt unerfüllbar. Ein solches System läßt sich also überhaupt nicht im Ruhezustand halten. Wenn dagegen für die Unbekannten der Wert „unendlich" herauskommt, so würde dies bedeuten, daß sich der Gleichgewichtszustand nur mit Hilfe von unendlich großen Spannkräften aufrechterhalten läßt. Unendlich große Kräfte können wir aber mit unseren Stäben und Auflagern nicht ausüben. Auch in diesem Fall ist also kein Gleichgewichtszustand des Systems zu erzielen. „*Bewegliches System*".

Mit anderen Worten: Wenn die Gleichungen, auf die sich schließlich die Berechnung eines jeden Systems zurückführen läßt, mit endlichen Werten der Unbekannten nicht erfüllbar sind, so bedeutet dieses, daß die Vorbedingung des ganzen Rechnungsganges, nämlich die Möglichkeit des Gleichgewichtes, nicht vorhanden ist. In diesem Falle handelt es sich also um *bewegliche Systeme.*

Hiermit ist das Kennzeichen der beweglichen Systeme gefunden.

IV. Zusammenfassung.

Um zu erkennen, ob ein System starr oder beweglich ist, fangen wir zunächst ruhig mit der Berechnung an und stellen die gesuchten Kräfte als Unbekannte von Gleichungen dar. (Z. B. nach der ursprünglichen Methode der Betrachtung der einzelnen Knotenpunkte, oder nach Ritter, oder nach der Ersatzstabmethode usw.) Ergibt sich dann aus der mathematischen Betrachtung dieser Gleichungen, daß sie für die Unbekannten bestimmte *endliche Werte* liefern, so ist die Konstruktion *starr.* Ergibt sich aber, daß die Gleichungen für die Unbekannten den Wert „*unendlich*" liefern oder überhaupt *nicht auflösbar* sind, so ist die Konstruktion *beweglich.*

Bei dieser mathematischen Untersuchung, ob die Gleichungen endliche Werte liefern oder nicht, werden wir nach Absatz II folgendermaßen vorgehen: Ist die betreffende Gleichung so einfach, daß nur *eine* Unbekannte vorkommt, so liegt der Ausnahmefall vor, falls der Koeffizient der Unbekannten die Zahl „Null" ist. Treten dagegen mehrere Gleichungen mit entsprechenden Unbekannten auf, so besteht das Kennzeichen für den Ausnahmefall darin, daß die Nennerdeterminante gleich Null wird.

Wenn man ein Fachwerk richtig berechnet, kann man also

niemals in die Gefahr kommen, ein bewegliches System in die Welt zu setzen. Im Laufe der Rechnung zeigt sich der Ausnahmefall ganz von selber dadurch an, daß sich für die Unbekannten keine endlichen Werte ergeben. Wenn dagegen der betreffende Rechnungsgang — graphisch oder analytisch — glatt zu Ende gegangen ist, so ist dies gleichzeitig ein Zeichen, daß ein Ausnahmefall nicht vorliegt. Bei einfachen Konstruktionen wird man also gar nicht erst an den Ausnahmefall denken, sondern sofort mit der Berechnung beginnen. Die glückliche Beendigung derselben ist dann die nachträgliche Bestätigung, daß das System starr ist.

§ 17.

Beispiele zu § 16.

Erste Aufgabe.

Das in Fig. 41a gezeichnete System ist hinsichtlich Beweglichkeit zu untersuchen!

Das System hat die nötige Zahl von Unbekannten. Es müßte also eigentlich starr sein. Jedoch lehrt bereits der Augenschein, daß die Konstruktion infolge falscher Anordnung der Stäbe beweglich ist. Jetzt wollen wir noch sehen, daß natürlich auch das mathematische Kennzeichen der Beweglichkeit auf diesen Fall zutrifft.

Es kommt also darauf an, die Spannkräfte in analytischer Form darzustellen, so daß sie als Unbekannte von Gleichungen auftreten. Die Untersuchung dieser Gleichungen muß dann darauf hinweisen, daß der Ausnahmefall vorliegt. Um nun den betreffenden analytischen Ausdruck für die Unbekannten zu erhalten, kann man in Fig. 41 verschieden vorgehen.

a) *Direkt mit den Gleichgewichtsbedingungen.*

Wir legen den Schnitt α—α (Fig. 41a) und schreiben für den rechten oder linken Teil die Gleichgewichtsbedingung: Summe aller Vertikalprojektionen gleich Null, an. Die Neigungswinkel der Kräfte O und U gegen die Horizontale sind gleich Null. Also lautet die obige Gleichgewichtsbedingung:

$$O \cdot \sin 0^\circ + U \cdot \sin 0^\circ = B\,,$$
$$(O + U) \sin 0^\circ = B\,,$$
$$(O + U)\, 0 = B\,,$$
$$(O + U) = \frac{B}{0}\,,$$
$$(O + U) = \infty\,.$$

Die obige Gleichgewichtsbedingung $R_v = O$ wäre also nur dann zu erfüllen, wenn die Stabkräfte $O + U$ unendlich wären. In Wirklichkeit ist sie demnach nicht zu erfüllen; d. h. das System ist beweglich.

b) *Mit der Ersatzstabmethode.*

Wenn es Schwierigkeiten macht, die betreffenden Gleichungen mit den Unbekannten aufzustellen, so sei daran erinnert, daß die Ersatzstabmethode diejenige Methode ist, die auch in kompli zierten Fällen auf einfache Weise die Unbekannten stets in analytischer Form liefert. In Fig. 41b und c ist diese Methode angewandt. Der Stab Z ist als Störungsstab genommen und dafür der Ersatzstab E eingeführt. Dessen Spannkraft wird nun in der Form dargestellt (§ 15):

$$E = E_0 + Z \cdot E_{Z=1} \, .$$

Dieser Ausdruck wird gleich Null gesetzt, wodurch sich die Gleichung ergibt:

$$E_0 + Z \cdot E_{Z=1} = 0 \, ,$$

$$Z \cdot E_{Z=1} = -E_0 \, .$$

Hiermit ist für die Unbekannte Z der Ausdruck gefunden, der zu diskutieren ist. Zunächst muß natürlich der Zahlenwert von $E_{Z=1}$ berechnet werden. In Fig. 41c ist der „Zustand $Z = 1$“ gezeichnet. Es ergibt sich, daß nur das stark gezeichnete Viereck in Spannung versetzt wird. Alle anderen Kräfte sind gleich Null. Also:

$$E_{Z=1} = 0 \, .$$

Hiermit geht die obige Gleichung über in:

$$Z \cdot 0 = -E_0 \, .$$

Wir sehen also, daß der neben der Unbekannten stehende Faktor die Zahl „Null“ ist. Dieses ist aber das Kennzeichen dafür, daß die Gleichung keinen endlichen Wert für die Unbekannte liefert. Der angenommene Gleichgewichtszustand läßt sich also mit endlichen Spannkräften nicht erzielen; das Fachwerk ist beweglich.

Zusatz: Fig. 41d zeigt, daß auch diese Konstruktion bei gewissen Belastungen im Ruhezustand sein kann. Bei dieser Belastung wird nämlich die Kraftsumme $Q = A - P$ für den Schnitt α—α gleich Null. Eine Diagonale, die in dem offenen Felde etwa vorhanden wäre, würde also die Spannkraft „Null“ erhalten. Das heißt, sie kann auch fortgelassen werden, ohne daß etwas an der Konstruktion zu merken wäre.

Natürlich sagt aber solch ein einzelner Fall nichts gegen unsere allgemeine Theorie. Denn daß bei gewissen Belastungen ein Stab oder auch mehrere Stäbe einer Konstruktion spannungslos und deshalb auch einfach fortgelassen werden können, ist ja nichts Neues. Sobald sich aber die Belastung auch nur im geringsten ändert, würde der Zusammenbruch der Konstruktion erfolgen.

In mathematischer Beziehung würde sich für Fig. 41d bei Aufstellung der Gleichung $R_y = 0$ ergeben:

$$(O + U) \cdot 0 = A - P = 0 .$$

Wir sehen also, die Gleichung $R_y = 0$ stellt in diesem Fall tatsächlich keinen Widerspruch dar, weil zufällig auch bei der rechten Seite die Zahl Null steht. Bei der geringsten Änderung

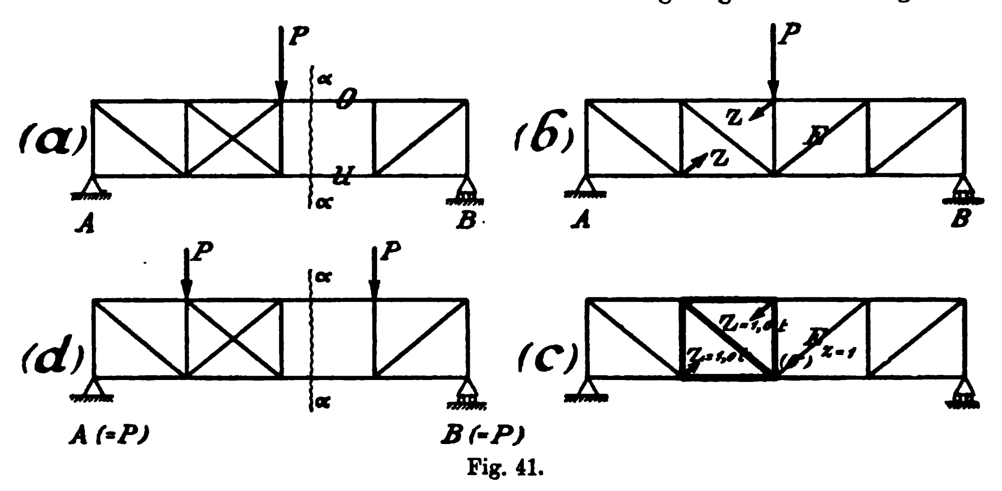


Fig. 41.

der Belastung würde aber auf der rechten Seite eine andere Zahl entstehen, z. B. $\frac{1}{10}$, und dann bekämen wir wieder:

$$(O + U) \cdot 0 = 0{,}1 ,$$

$$O + U = \frac{0{,}1}{0} = \infty ,$$

also unendlich große Spannkräfte. Unsere Regel: Das System ist unbrauchbar, wenn in der Gleichung neben der Unbekannten der Faktor „Null“ steht, ist also auf jeden Fall innezuhalten.

Zweite Aufgabe.

Die Beweglichkeit des Systems Fig. 42 ist mathematisch nachzuweisen!

Zur Berechnung der Auflagerkräfte wenden wir u. a. die Gleichgewichtsbedingung an: Summe aller Horizontalprojektionen gleich Null.

$$A \cdot \cos 90^0 + B \cdot \cos 90^0 + C \cdot \cos 90^0 = P \cdot \cos\delta ,$$
$$(A + B + C) \cdot \cos 90^0 = P \cdot \cos\delta ,$$
$$(A + B + C) \cdot 0 = P \cdot \cos\delta .$$

Wir sehen: neben der Unbekannten $(A + B + C)$ steht der Faktor Null. Es ergeben sich also keine endlichen Werte für die Auflagerkräfte. Fig. 42a kann demnach nur eine papierne Existenz führen; verwirklichen läßt sich dieser Gleichgewichtszustand nicht.

Auch bei dieser Aufgabe möge noch gezeigt werden, wie man mit dem Ersatzstabverfahren arbeiten würde (Fig. 42b). Die mittlere Auflagerkraft werde als Störungskraft genommen und dafür bei A eine Ersatzauflagerkraft E eingeführt. Der Punkt A wird hierdurch zu einem festen Auflager (mit zwei Unbekannten A und E); der ganze Träger also zu einem einfachen Balken mit

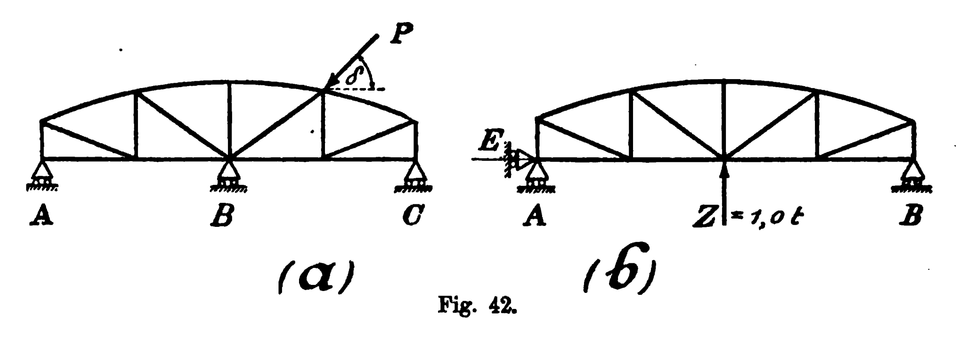


Fig. 42.

einem festen und einem beweglichen Lager. Zur Berechnung von Z dient dann nach dem Ersatzstabverfahren die Gleichung:

$$E = E_0 + Z \cdot E_{Z=1} = 0 ,$$
$$Z \cdot E_{Z=1} = -E_0 .$$

Nun muß der Zahlenwert von $E_{Z=1}$ eingesetzt werden. Es ergibt sich hierbei aus Fig. 42b, daß der Faktor $E_{Z=1}$ — Auflagerkraft E infolge einer angenommenen Kraft $Z = 1{,}0$ t — gleich Null ist. Denn eine Vertikalkraft Z bringt nur vertikale, keine horizontale Auflagerdrücke hervor. Die obige Gleichung geht also über in:

$$Z \cdot 0 = -E_0 ;$$

und hieraus folgt, daß für die Kraft Z kein endlicher Wert herauskommt. Das System bildet also keinen Ruhezustand.

Zusatz: Auch bei dieser Konstruktion ist bei einer ganz bestimmten Belastung ein Ruhezustand möglich. Nämlich dann, wenn die Lasten genau senkrecht stehen. Denn dann braucht

in den Auflagern keinerlei Horizontalkraft aufzutreten, so daß es gleichgültig ist, ob ein Lager fest ist oder ob alle horizontal beweglich sind. Unsere vorhin angeschriebene Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$ würde in diesem Falle lauten (mit $\delta = 90^0$, $\cos\delta = 0$):

$$(A + B + C) \cdot 0 = 0 ;$$

hieraus
$$0 = 0 .$$

Auch aus dieser Gleichung zeigt sich, daß in diesem besonderen Falle kein Widerspruch mit der Bedingung des Gleichgewichtes besteht. [Die Gleichung kann allerdings auch nicht zur Ausrechnung von $(A + B + C)$ benutzt werden, da sie nichts weiter aussagt, als daß $0 = 0$ ist.] Doch hat dieser Fall keinerlei praktische Bedeutung, da bei der geringsten Abweichung der Lasten von ihrer Vertikalstellung sofort für $(A + B + C)$ der Wert „unendlich" auftreten würde. Das System ist auf jeden Fall unbrauchbar.

Dritte Aufgabe.

Die in Fig. 43 dargestellte Stabverbindung ist hinsichtlich Beweglichkeit zu untersuchen!

Den Neigungswinkel der Stäbe S gegen die Horizontale wollen wir allgemein mit α bezeichnen (Fig. 43b). Zur Berechnung der

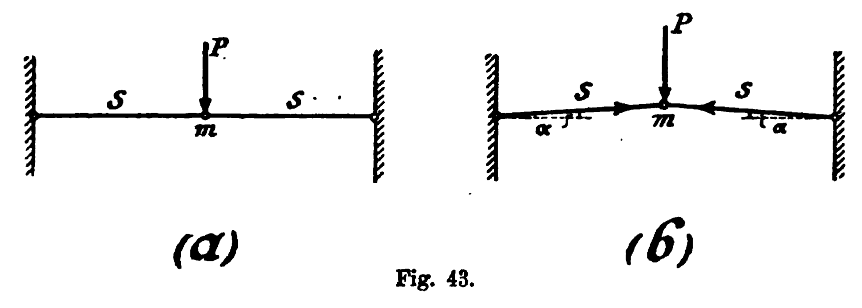


Fig. 43.

Stabkräfte S wenden wir dann auf den Punkt m die Gleichgewichtsbedingung: Summe aller Vertikalprojektionen gleich Null, an:

$$S \cdot \sin\alpha + S \cdot \sin\alpha = P ,$$

$$S \cdot 2\sin\alpha = P .$$

[S von vornherein als Druck eingeführt.] Für den besonderen Fall, daß $\alpha = 0$ wird (Fig. 43a), geht diese Gleichung über in:

$$S \cdot 0 = P .$$

Bei der Unbekannten steht der Faktor 0. Das bedeutet: die Gleichung liefert für die gesuchte Spannkraft den Wert ∞. Somit

ist mathematisch nachgewiesen, daß die Voraussetzung der ganzen Rechnung, nämlich der Gleichgewichtszustand, nicht erfüllbar ist. Auch Fig. 43a existiert nur im Bilde, nie in der Wirklichkeit.

Zusatz: Auch bei Fig. 43a ist ein Gleichgewichtszustand möglich, nämlich dann, wenn die Last P genau in die Richtung der Stäbe S fällt. Dann nimmt die vorhin gebrauchte Gleichgewichtsbedingung die Form an:

$$S \cdot 0 = 0;$$

also

$$0 = 0.$$

Diese Gleichung enthält keinen direkten Widerspruch; also ist ein solcher Gleichgewichtszustand tatsächlich möglich. Sie ist aber auch keine eigentliche mathematische Gleichung, aus der sich die Unbekannte S berechnen ließe. Es handelt sich wiederum um einen vorübergehenden Gleichgewichtszustand, der bei der geringsten Änderung der Lastrichtung aufhören würde.

Vierte Aufgabe.

An Hand von Fig. 43 ist der Übergang eines anscheinend starren Systems in ein bewegliches System zu untersuchen!

An das soeben durchgenommene Beispiel werde noch eine interessante Betrachtung angeknüpft. Wir wollen nämlich untersuchen, wie sich solch eine Konstruktion verhält, wenn sie zwar nicht direkt in beweglicher Form auftritt, aber doch nahe daran ist. Nehmen wir beispielsweise $\alpha = 1^0$ an. P sei gleich 1000 kg. Dann ergibt die Gleichung für S (Fig. 43b):

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1000}{2 \cdot 0{,}01745} = 28600 \text{ kg}.$$

Wir bekommen also einen großen, aber immerhin noch endlichen Wert für die Spannkraft S, und man könnte glauben, daß alles in Ordnung sei. In Wirklichkeit ist aber das System recht bedenklich. Die Stäbe S erfahren nämlich infolge dieser Spannkraft auch eine Zusammendrückung. Der Punkt m senkt sich infolgedessen, und das Fachwerk kommt aus der anscheinend stabilen Lage ($\alpha = 1^0$) in die bewegliche Lage von Fig. 43a. Dann ist aber erst recht kein Ruhezustand möglich, und das System schlägt noch weiter nach unten durch.

Wir sehen an diesem Beispiel, daß eine Konstruktion, die zunächst in einer stabilen Lage ist, durch die Nachgiebigkeit des Materials in eine bewegliche Lage gerät und sich in dieser dann natürlich genau so wie jedes andere bewegliche System verhält.

Um auch gegen solche Überraschungen gesichert zu sein, müßte man jedes System nicht in der Lage untersuchen, in der man es zunächst aufzeichnet, sondern in derjenigen Lage, die es infolge der Elastizität des Materials annimmt. Mit anderen Worten: Man müßte der Untersuchung die Systemfigur zugrunde legen, die die Konstruktion im gespannten Zustande annimmt. Doch geht eine solche Genauigkeit im allgemeinen zu weit. Für die Praxis genügt es, wenn man die ursprüngliche Systemfigur als das Gegebene annimmt und an dieser die Untersuchung hinsichtlich Beweglichkeit anstellt. Nur wenn die Spannkräfte an einzelnen Stellen ungewöhnlich groß werden, d. h. sich dem Werte ∞ nähern, wäre darauf zu achten, ob nicht eine Konstruktion vorliegt, die infolge Längenänderung der Stäbe in ein bewegliches System übergehen könnte.

Fünfte Aufgabe.

Das in Fig. 44a gezeichnete Tragwerk mit drei Auflagerstäben, die sich in einem Punkte schneiden, ist zu untersuchen!

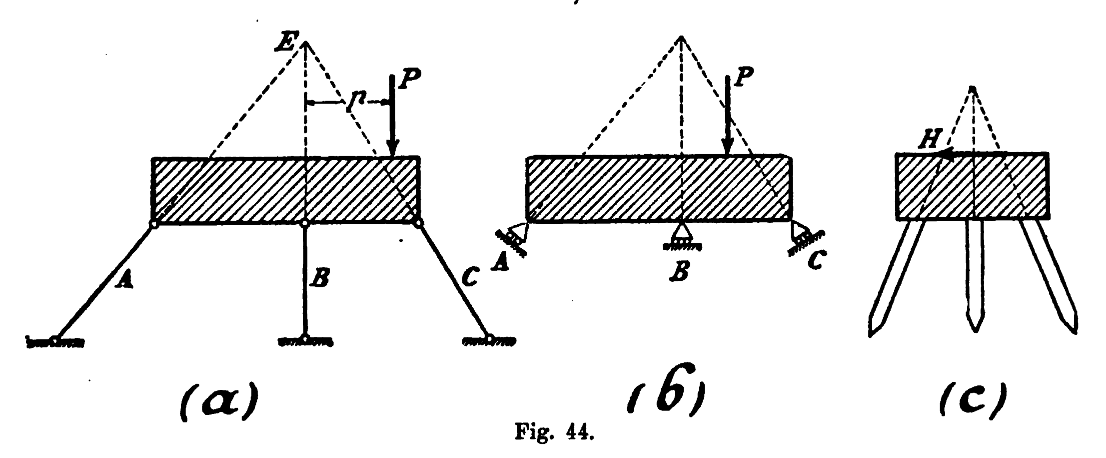


Fig. 44.

Wir wenden die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ an. Als Bezugspunkt werde der Schnittpunkt E genommen. Dann lautet die Bedingung:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = P \cdot p\,,$$
$$(A + B + C) \cdot 0 = P \cdot p\,.$$

Aus dieser mathematischen Gleichung folgt, daß $(A + B + C)$ unendlich groß sein müßte, falls die Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein sollte. In der Wirklichkeit läßt sich also der angenommene Gleichgewichtszustand überhaupt nicht erreichen; das System ist beweglich. Die Fig. 44a verhält sich genau so wie

Fig. 43a: Sobald die Belastung zu wirken beginnt, verläßt die Konstruktion die gezeichnete Stellung, führt eine sehr beträchtliche Bewegung aus und kommt dann in einer neuen Stellung zur Ruhe.

In Fig. 44b ist derselbe Fall gezeichnet: Stützung durch drei Auflagerdrücke A, B und C, die sich in einem Punkte schneiden. Auch dieses System ist beweglich und somit unbrauchbar.

Einen anderen Fall zeigt Fig. 44c. Es handelt sich um ein Maschinenfundament, das wegen schlechten Untergrundes auf Pfählen gegründet werden muß. Würde man die in Fig. 44c gezeichnete Anordnung der Pfähle ausführen, so wäre die Konstruktion beweglich. Infolge der Horizontalstöße H der Maschine würde das Fundament sicherlich derartige Bewegungen machen, daß ein Betrieb unmöglich wäre. Man sieht übrigens schon an diesem Beispiel, daß die Lehre von den Ausnahmefällen nicht nur theoretisches Interesse bietet.

Sechste Aufgabe.

Das in Fig. 45 gezeichnete Sechseck ist hinsichtlich Beweglichkeit zu untersuchen!

Der allgemeine Rechnungsgang bei diesem System ist bereits in § 15, erste Aufgabe, durchgenommen:

An Stelle des Störungsstabes Z setzen wir einen Ersatzstab E ein. Dessen Spannkraft wird in der Form angeschrieben:

$$E = E_0 + Z \cdot E_{z=1} \, .$$

Da in Wirklichkeit E gleich Null ist, ergibt sich aus dieser Formel eine Gleichung, die zur Berechnung von Z verwendet werden kann:

$$E_0 + Z \cdot E_{z=1} = 0 \, ,$$

$$Z \cdot E_{z=1} = -E_0 \, .$$

Wir haben also auch für diesen Fall durch die analytische Berechnung eine Gleichung mit einer Unbekannten erhalten. Nun muß man den neben der Unbekannten stehenden Faktor $E_{z=1}$ berechnen. ($E_{z=1}$ hängt natürlich von den gegebenen Abmessungen der Systemfigur ab. Dagegen hat es nichts mit der Belastung P zu tun.) Ergibt sich für $E_{z=1}$ der Wert „Null“, so ist das betreffende Sechseck beweglich; andernfalls ist es starr. Hiernach ist die Aufgabe für jeden gegebenen Fall zu lösen.

Man kann auch ein sehr hübsches, ganz allgemeines mathematisches Kennzeichen ableiten, um bei einem Sechseck sofort zu entscheiden, ob der Wert $E_{Z=1}$ gleich Null wird. Hierzu führt folgende Reihe von Überlegungen: Zunächst läßt sich zeigen, daß die vier Kräfte S_1, S_2, S_3, S_4 von Fig. 45a zusammen ein Gleichgewichtssystem bilden. Denn S_1 und S_2 ergeben in Fig. 45a eine Resultierende von 1,0 t, und S_3 und S_4 ebenfalls. Da diese beiden Resultierenden von je 1,0 t außerdem in derselben Geraden

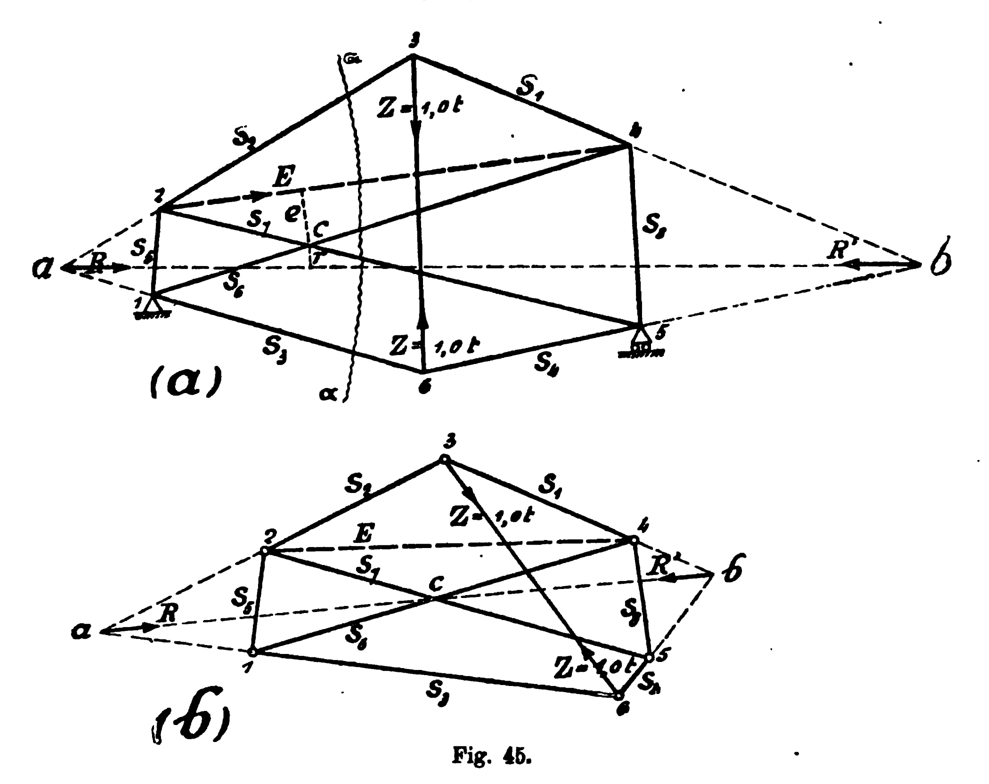


Fig. 45.

liegen und entgegengesetzt gerichtet sind, so heben sie sich gegenseitig auf. Folglich bilden auch die ursprünglichen Kräfte S_1, S_2, S_3, S_4 zusammen ein Gleichgewichtssystem.

Nun denken wir uns in Fig. 45a diese vier Kräfte anders zusammengefaßt. Nämlich S_2 und S_3 zu ihrer Resultierenden R, und S_1 und S_4 zu einer Resultierenden R'. Auch diese beiden Kräfte müssen ein Gleichgewichtssystem ergeben, da ja die ursprünglichen Kräfte $S_1 .. S_4$ ein solches bilden. R und R' müssen also gleich groß sein, entgegengesetzte Richtung haben und in ein und derselben Geraden liegen. Nun geht aber die Kraft R

durch den Schnittpunkt a von S_2 und S_3, da sie ja die Resultierende von S_2 und S_3 ist; und die Kraft R' geht durch den Schnittpunkt b von S_1 und S_4. Wenn also beide Kräfte in ein und derselben Geraden liegen sollen, so kann dieses nur die Verbindungsgerade $\overline{a\,b}$ sein. Denn diese ist die einzige Wirkungslinie, innerhalb deren die Kräfte R und R' sich aufheben könnten. Wir haben also durch diese Zwischenbetrachtung zunächst das Resultat gefunden, daß die Resultierende R von S_2 und S_3 bzw. R' von S_1 und S_4, innerhalb der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte a und b verläuft. Dieses Resultat werden wir zur Ermittelung von $E_{\dot{Z}=1}$ verwenden.

Um nämlich die Spannkraft E für den angenommenen Belastungszustand $Z = 1{,}0$ t auszurechnen, legen wir den Schnitt α—α und betrachten das Gleichgewicht des linken Teiles (Fig. 45a). Dieser besteht nur aus dem Stab S_5. Angreifende Kräfte sind: S_2, E, S_7, S_6 und S_3. (Auflagerkräfte treten jetzt nicht auf.) Für S_2 und S_3 wird die Ersatzkraft R eingeführt. Nehmen wir nun den Schnittpunkt c der beiden Kräfte S_7 und S_6 zum Bezugspunkt einer Momentengleichung, so lautet diese:

$$E \cdot e = R \cdot r\,.$$

[e und r sind die Lote vom Bezugspunkte auf die Kräfte E und R. Die Kräfte S_7 und S_6 haben die Lote 0.] Hieraus folgt die gesuchte Spannkraft des Stabes E:

$$E_{Z=1} = \frac{R \cdot r}{e}\,.$$

Nun können wir auch angeben, wann der Wert $E_{Z=1}$ gleich Null werden wird. Nämlich dann, wenn die Verbindungslinie der Punkte a und b durch den Schnittpunkt c der Stäbe S_7 und S_6 hindurchgeht. Dann wird nämlich das Lot r gleich Null und folglich auch der obige Wert $E_{Z=1}$ gleich Null. Wir haben also durch die vorigen Überlegungen folgendes interessante Resultat erhalten: Wenn bei einem Sechseck die Verbindungslinie der Schnittpunkte a und b hindurchgeht durch den Schnittpunkt c, so ist der Wert $E_{Z=1}$ gleich Null. Dieses war aber, wie vorhin abgeleitet, das Kennzeichen dafür, daß das System verschieblich ist. Wenn wir also irgendwo auf eine solche sechseckige Fachwerkfigur stoßen, werden wir vor allen Dingen danach sehen, ob etwa die Schnittpunkte a, b und c in einer Geraden liegen. Trifft dieses zu, so hat es gar keinen Zweck, zu rechnen; dann ist die Konstruktion beweglich. Auf jeden Fall ein hübsches mathematisches Kennzeichen für eine statische Sache.

In Fig. 45b ist dieser Ausnahmefall gezeichnet. Hier geht die Verbindungslinie $\overline{a\ b}$ durch den Schnittpunkt c der Diagonalen S_6 und S_7. Es läßt sich mathematisch zeigen, daß dieser Fall immer dann eintritt, wenn die Eckpunkte des Sechseckes auf einem sogenannten Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel) liegen. Dieser geometrische Satz stammt schon von dem französischen Mathematiker *Pascal*, aus dem 17. Jahrhundert (*Pascal*sches Sechseck). Wie so oft, hatte auch hier die Mathematik den Boden vorbereitet, auf dem drei Jahrhunderte später die Technik ernten konnte.

Herr Professor *A. Föppl* (München) erwähnt in seinen „Vorlesungen über technische Mechanik" eine interessante experimentelle Darstellung dieses Ausnahmefalles. Ein Pascalsches Sechseck, dessen Endpunkte auf einem Kreise von etwa 70 cm Durchmesser lagen, wurde mit 50 kg belastet. Während ein starres System von derartig geringen Abmessungen Formänderungen von nicht mehr als einigen Zehntel mm aufweist, zeigte sich bei dem Ausnahmefall zwischen den einzelnen Knotenpunkten eine Verschiebung von 3—4 mm. Hiernach kann man beurteilen, welche Formänderungen eintreten würden, wenn man eine derartige Konstruktion im Großen ausführen würde.

Siebente Aufgabe.

Die in Fig. 46 gezeichneten Brückensysteme sind hinsichtlich Beweglichkeit zu untersuchen!

Im Jahre 1876 entspann sich ein Streit, ob die in Fig. 46a gezeichnete, ausgeführte Brücke etwa beweglich wäre. Zunächst

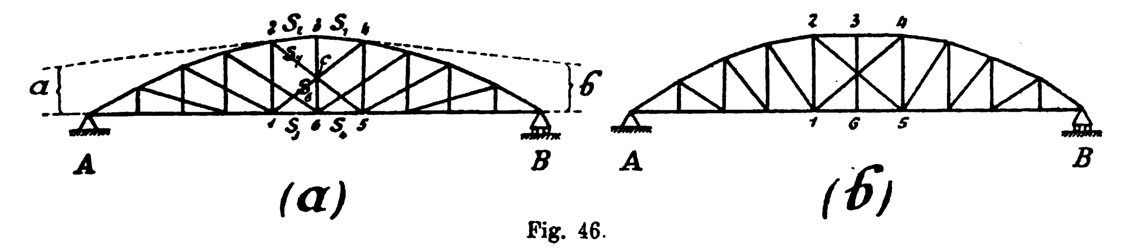


Fig. 46.

sieht man ein, daß die eventuelle Beweglichkeit von dem mittleren Sechseck *1....6* abhängt. Denn wenn man von den Auflagern *A* und *B* z. B. mit einem Kräfteplan anfängt, so kommt man glatt bis zu dem mittleren Sechseck. Für die Stäbe links und rechts ergeben sich also bei der Berechnung bestimmte endliche Werte. Die eventuelle Beweglichkeit des ganzen Systems kann

also nur dadurch zustande kommen, daß der mittlere Teil beweglich ist.

Auf Grund unserer vorhergegangenen Untersuchungen können wir aber sofort aussagen, daß das Sechseck von Fig. 46a nicht beweglich ist. Denn der Schnittpunkt a der Seite S_2 und S_3 liegt auf der Horizontalen $A—B$; desgl. der Schnittpunkt b der Seite S_1 und S_4. Die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte geht also nicht durch den Schnittpunkt von S_6 und S_7. Folglich ist das Sechseck und somit die ganze Brücke nicht beweglich.

Anders ist es bei Fig. 46b. Hier sind die Seiten S_2, S_1 parallel den Seiten S_3, S_4 angenommen, und der Schnittpunkt von S_6, S_7 liegt in halber Höhe zwischen den Gurtseiten. Die Schnittpunkte a und b der Seite S_2, S_3 und S_4, S_1 liegen in der Unendlichkeit. Ihre Verbindungslinie ist wegen der Symmetrie als eine in halber Höhe durchlaufende horizontale Gerade anzusehen. Sie geht also durch den Schnittpunkt von S_6, S_7. Folglich ist das Fachwerk beweglich. [Der Kegelschnitt, auf dem die sechs Eckpunkte liegen, kann hier als eine unendlich lange Ellipse aufgefaßt werden.] Wenn man also eine Brücke nach Fig. 46b ausführen würde, müßte man sich auf ganz unzulässige Formänderungen gefaßt machen. Der Vorgang wäre der, daß die Brücke sich zunächst sehr stark deformiert; die sechs Knotenpunkte kommen hierdurch in eine andere Lage, bei der sie nicht mehr ein *Pascal*sches Sechseck bilden, und auf diese Weise gelangt die ganze Konstruktion in eine mögliche neue Gleichgewichtslage. Natürlich dürfen wir derartige Bauwerke, die sich zunächst eine neue Gleichgewichtslage aufsuchen müssen, um überhaupt stehen zu können, nicht bauen.

Aber auch Fig. 46a ist durchaus kein mustergültiges System. Es ist augenscheinlich nahe daran, beweglich zu sein, und derartige Bauwerke führen immer sehr starke Schwankungen aus. Durch die festvernieteten Knotenpunktsverbindungen werden diese Bewegungen allerdings etwas beschränkt.

Achte Aufgabe.

Das in Fig. 37 gezeichnete Gerüst ist hinsichtlich Beweglichkeit zu untersuchen!

Mit Hilfe der Ersatzstabmethode hatten wir die Untersuchung des Systems zurückgeführt auf die Berechnung des Störungsstabes Z:

$$Z \cdot E_{Z=1} = -E_0 .$$

Das System wird also dann beweglich sein, wenn beim Zustande $Z = 1$ für den Ersatzstab die Spannkraft Null herauskommt. Bei der Anordnung Fig. 37 ist dies nicht der Fall, denn in § 15, zweite Aufgabe, hatte sich ja für $E_{Z=1}$ ein bestimmter endlicher Wert ergeben. Wohl aber wäre $E_{Z=1} = 0$, wenn die beiden Auflager in gleicher Höhe wären. [Die Zeichnung führe man selber aus. Daß dann $E_{Z=1} = 0$ wird, folgt schon ohne weitere Rechnung aus Symmetriebetrachtungen.] Für diesen Fall ist das Gerüst unausführbar.

Auch wenn die beiden Fußpunkte annähernd in gleicher Höhe gelagert sind, ist das System nicht zu empfehlen. Denn dann gibt es erstens sehr große Spannkräfte (annähernd gleich unendlich), und zweitens sehr große Formänderungen.

Neunte Aufgabe.

Das in Fig. 47 gezeichnete sechsfache Fachwerk ist zu untersuchen!

Die Fig. 47 unterscheidet sich von der in § 15 untersuchten Fig. 38 nur durch die Zahl der Felder. Die Berechnung wird

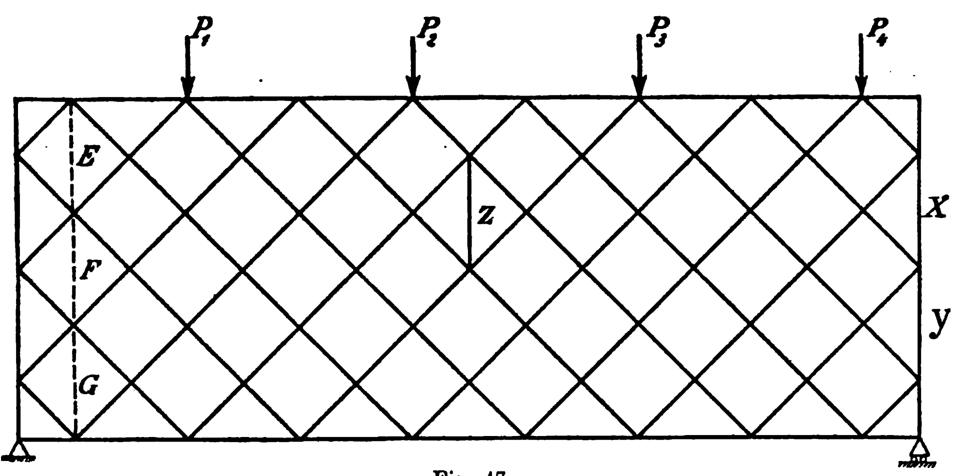


Fig. 47.

wieder mit Hilfe von drei Störungs- bzw. Ersatzstäben durchgeführt. Die schließlichen Gleichungen zur Berechnung der Störungsstäbe lauten:

$$X \cdot E_{X=1} + Y \cdot E_{Y=1} + Z \cdot E_{Z=1} = -E_0\,,$$
$$X \cdot F_{X=1} + Y \cdot F_{Y=1} + Z \cdot F_{Z=1} = -F_0\,,$$
$$X \cdot G_{X=1} + Y \cdot G_{Y=1} + Z \cdot G_{Z=1} = -G_0\,.$$

Da wir jetzt drei Gleichungen mit drei Unbekannten haben, führen wir die Untersuchung mittels Determinanten aus. Wir

sehen also nach, ob die Nennerdeterminante eventuell den Wert Null hat. Die Nennerdeterminante lautet:

$$\begin{vmatrix} E_{X=1} & E_{Y=1} & E_{Z=1} \\ F_{X=1} & F_{Y=1} & F_{Z=1} \\ G_{X=1} & G_{Y=1} & G_{Z=1} \end{vmatrix}.$$

Für $E_{X=1}$ usw. ergeben sich bei der Durchrechnung der Systemfigur folgende Werte (die Ausrechnung führe der Leser an Hand von § 15, dritte Aufgabe, selber durch!):

$$E_{X=1} = 0\,; \quad E_{Y=1} = -1\,; \quad E_{Z=1} = 0\,.$$
$$F_{X=1} = -1\,; \quad F_{Y=1} = -1\,; \quad F_{Z=1} = +1\,.$$
$$G_{X=1} = -1\,; \quad G_{Y=1} = 0\,; \quad G_{Z=1} = +1\,.$$

[Es sei hierbei daran erinnert, daß die Spannkräfte $E_{X=1}$ usw. nur von dem Zustande $X = 1$ usw. abhängen, nicht aber von den äußeren Lasten P.] Setzen wir diese Werte in die obige Determinante ein, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix}.$$

Je nachdem diese Determinante den Wert „Null" ergibt oder nicht, ist das System beweglich oder starr.

Nach unseren Regeln über Determinanten erkennen wir nun aber sofort, ohne erst die obige Determinante in ihre Produkte aufzulösen, daß sie tatsächlich den Wert „Null" hat. Denn die dritte Vertikalreihe läßt sich aus der ersten ableiten, indem man jedes Glied mit ein und derselben Zahl, nämlich -1, multipliziert. Eine derartige Proportionalität zwischen zwei Reihen einer Determinante ist aber nach dem Früheren ein Kennzeichen, daß die ganze Determinante den Wert „Null" hat.

Somit ist zu ersehen, daß die obigen drei Gleichungen keine endlichen Werte für die Spannkräfte der Stäbe X, Y, Z liefern. Das in Fig. 47 gezeichnete System stellt also keinen möglichen Gleichgewichtszustand dar; es ist beweglich.

Aus dem entgegengesetzten Verhalten von Fig. 38 und Fig. 47 ersieht man, daß ein und dasselbe System je nach der Anzahl der Felder starr oder beweglich ist. Es ist die alte Regel: Wenn man an nicht-einfache Konstruktionen herangeht, muß man sich auch auf Ausnahmefälle gefaßt machen.

Zusatz: Nur in einem Falle wäre auch bei Fig. 47 ein Gleichgewichtszustand möglich; nämlich dann, wenn zufällig auch die

Zählerdeterminante der obigen drei Gleichungen gleich Null ist. Dann ergeben nämlich, wie die mathematische Betrachtung zeigt, die Gleichungen keinen Widerspruch; sondern sie liefern für die Unbekannten den (unbestimmten) Ausdruck 0:0. Wir brauchen aber auf diesen Fall nicht näher einzugehen, da er für die Praxis ohne Belang ist. Denn in der Zählerdeterminante kommen die rechten Seiten der Gleichungen, nämlich die Werte E_0, F_0 und G_0, vor. Diese hängen aber von der Belastung P ab (während bei $E_{X=1}$ usw. die äußere Belastung nicht auftritt). Wenn nun auch zufällig bei einer bestimmten Größe und Richtung der Belastung die Zählerdeterminante gleich Null wird, so wird bei der geringsten Änderung der Belastung diese Determinante einen anderen, endlichen Wert annehmen. Dann aber tritt sofort wieder der Fall in Erscheinung, daß beim Resultat im Zähler des Bruches eine endliche Zahl, im Nenner dagegen die Zahl Null steht; d. h. daß die Gleichungen mit endlichen Werten nicht erfüllbar sind. Unsere allgemeine Regel: Bei mehreren Gleichungen tritt dann der Ausnahmefall ein, wenn die Nennerdeterminante gleich Null ist, ist also für die Praxis unbedingt maßgebend.

§ 18.

Belastung außerhalb der Knotenpunkte. Fachwerke aus scheibenförmigen Gliedern.

Alle unsere bisherigen Fachwerkberechnungen hatten zur Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten des Systems angreifen. Es kommt aber auch vor, daß eine Last außerhalb der Knotenpunkte, also direkt auf einen Stab, wirkt. Für diese Belastungsart mögen nun unsere bisherigen Untersuchungen vervollständigt werden.

I. Belastung zwischen den Knotenpunkten.

1. Unterschied in der Wirkungsweise eines unbelasteten und eines belasteten Fachwerkstabes.

Mit der Wirkungsweise eines gewöhnlichen Fachwerkstabes wurde die Untersuchung der Fachwerke begonnen (§ 2). Wir machten uns klar, daß ein solcher, an seinen beiden Enden gelenkig gelagerter Stab wie eine Feder wirkt, die auseinandergezogen bzw. zusammengedrückt worden ist (Fig. 2c und d). In Fig. 48b ist als Beispiel die Wirkungsweise des Stabes O_1, der als Druckstab angenommen ist, dargestellt. Das Kennzeichnende für

einen solchen unbelasteten Stab besteht also darin, daß die beiden Kräfte, mit denen er auf seine beiden Endpunkte (Bolzen) einwirkt, *innerhalb der Stabachse* liegen.

Auch wenn im Knotenpunkte eine Last steht, wird hieran nichts geändert. Denn eine solche Last wird direkt auf den Bolzen übertragen (Fig. 48c), so daß die eigentlichen Stabkräfte immer in der Linie der Stabachse zur Wirkung kommen.

Außerdem sind die beiden Kräfte, mit denen ein Stab auf seine beiden Knotenpunkte wirkt, natürlich gleich groß. Denn sie sind ja nichts anderes als die Spannkraft ein und desselben Körpers, betrachtet in ihrer Einwirkung auf die beiden Endstützpunkte dieses Körpers.

Ganz anders ist die Sache, wenn der Stab selbst noch eine Last trägt (Stab S in Fig. 48a). Die Einwirkung eines solchen Stabes auf seine Endbolzen besteht nicht mehr in zwei gleich großen, innerhalb der Stabachse liegenden Kräften. Sondern je nach der Größe der Last P werden diese Kräfte mehr oder weniger geneigt sein (Fig. 48d). Wir haben also auf die Endpunkte zwei zunächst ganz unbekannte Kräfte K' und K'' wirkend. Das einzige, was wir von dieser Einwirkung eines solchen belasteten Stabes S auf seine Endknotenpunkte aussagen können, ist folgendes: Kehrt man in Fig. 48d die Pfeile von K' und K'' um, d. h. zeichnet man die Kräfte so, wie sie umgekehrt von den Bolzen auf den Stab S einwirken, so müssen K', P und K'' ein Gleichgewichtssystem bilden. Denn sie sind ja die Kräfte, die den Körper S im Ruhezustand halten. Daraus folgt, daß in Fig. 48c die Wirkungslinien der drei Kräfte P, K' und K'' sich in einem Punkte schneiden müssen. Und ferner, daß die drei Kräfte bei ihrer Zusammensetzung ein geschlossenes Polygon bilden (Fig. 48e). Mit anderen Worten: K' und K'' bilden die Komponenten der gegebenen Kraft P. Der Punkt z aber, wo die Zerlegung von P in ihre Komponenten stattzufinden hätte, ist natürlich unbekannt, so daß wir weder K' noch K'' angeben können.

Zusammenfassend haben wir als Unterschied: Ein *unbelasteter* Fachwerkstab übt auf seine beiden Endknotenpunkte nur Kräfte aus, die in der Linie der Stabachse wirken, und zwar ist die Einwirkung des Stabes auf den einen Endpunkt ebenso groß wie auf den anderen.

Ein *belasteter* Fachwerkstab übt auf seine Endpunkte unbestimmt gerichtete Kräfte K' und K'' aus, die außerdem verschieden groß sind. Folgerichtig werden wir jetzt diese schrägen

Kräfte K', K'' als die „Stabkräfte" des betreffenden (belasteten) Fachwerkstabes bezeichnen, da sie ja die Einwirkung des Stabes auf seine Knotenpunkte darstellen. Die einzige Aussage hinsichtlich dieser Kräfte K' und K'' ist die, daß sie die Seitenkräfte der gegebenen Kraft P darstellen.

2. Zurückführung der Kräfte K' und K'' auf gewöhnliche Stabkräfte und Knotenpunktlasten.

Nun sind aber sämtliche Methoden der Fachwerkberechnung darauf aufgebaut, daß die Richtungslinien der Stabkräfte stets

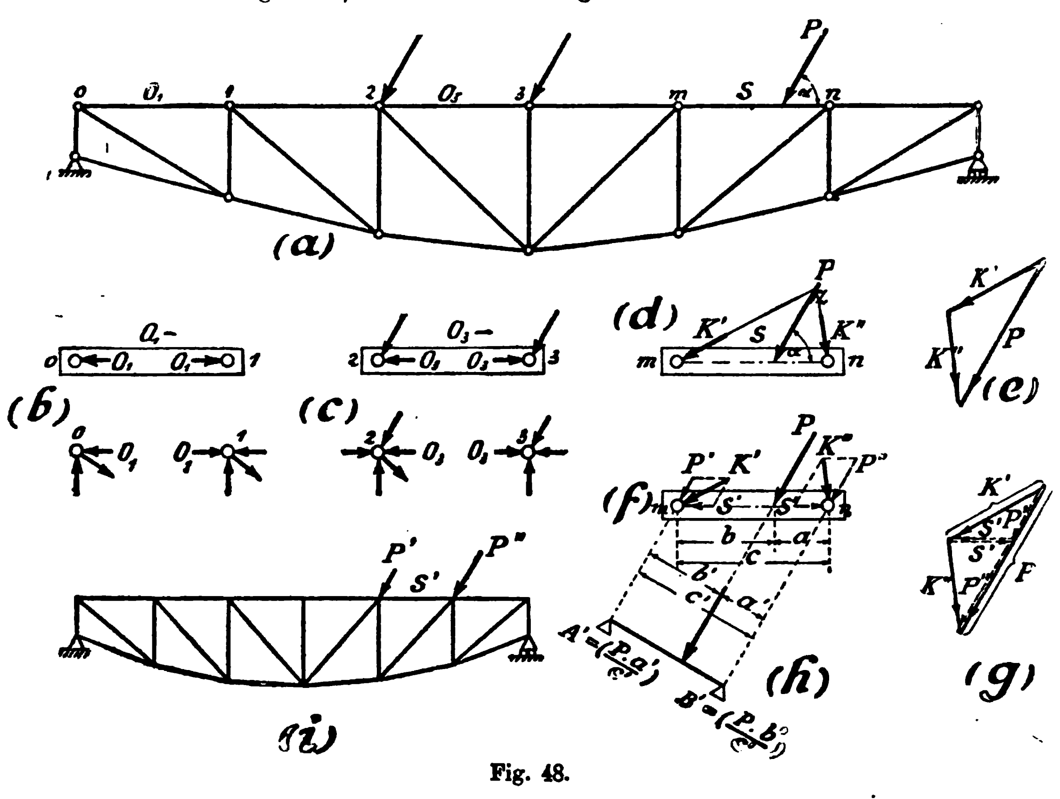


Fig. 48.

bekannt seien. Jede Berechnung beginnt ja damit, daß zunächst die Kräfte innerhalb der Stabachsen eingezeichnet werden, worauf dann die Ermittlung der Größe der Kräfte erfolgt. Wenn wir also die Berechnung eines solchen *belasteten* Fachwerkstabes S den bisherigen Methoden zur Berechnung von Fachwerkstäben zugänglich machen wollen, müssen wir versuchen, diese unregelmäßigen Kräfte K' und K'' möglichst durch Kräfte zu ersetzen, die innerhalb der Stabachse liegen. [Natürlich lassen sich die

Drücke K' und K'' nicht aus der Welt schaffen, da sie ja die wirklich vorhandenen Kräfte sind, die zwischen Bolzen und Stab auftreten. Wohl aber können wir sie zerlegen, so daß sie, zum Teil wenigstens, in der Rechnung als Kräfte auftreten, die innerhalb der Stabachse liegen.]

Wir zerlegen also im Punkte m die Kraft K' so, daß die eine Seitenkraft in Richtung der Stabachse liegt. Als Richtungslinie der anderen Seitenkraft werde die Parallele zu der gegebenen Last P genommen (Fig. 48f). Das gleiche machen wir mit K'' im Punkte n. Das eigentliche Zerlegungsbild von K' und K'' ist in Fig. 48g skizziert. Hierbei ergibt sich folgendes wichtige Resultat: Wie groß auch K' und K'' sein mögen, die horizontale Seitenkraft von K' ist auf jeden Fall ebenso groß und entgegengesetzt gerichtet wie die horizontale Seitenkraft von K''. (Deshalb sind auch beide mit demselben Buchstaben S' bezeichnet.) Mit anderen Worten: Bei dieser Zerlegung haben sich innerhalb der Stabachse zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ergeben; d. h. genau solche Kräfte, wie sie ein gewöhnlicher *unbelasteter* Fachwerkstab ausübt. Das ist ein großer Vorteil dieser Zerlegungsmethode.

Ferner hat die vorgenommene Zerlegung der Kräfte K' und K'' den Vorteil, daß sich die anderen Seitenkräfte (P' und P'' in Fig. 48f und g) leicht aus der Last P bestimmen lassen. Da nämlich, wie unter 1. gezeigt, K' und K'' die Seitenkräfte von P sind, so würden auch die vier Kräfte P', S', S', P'' bei ihrer Zusammensetzung als Resultierende die Kraft P haben. Deshalb ist das statische Moment der Kraft P in bezug auf irgendeinen Punkt gleich der Summe der statischen Momente der vier Kräfte in bezug auf diesen selben Punkt. Beispielsweise ergibt sich, wenn der Punkt n als Bezugspunkt genommen wird:

$$P \cdot a' = P' \cdot c' + S' \cdot 0 + S' \cdot 0 + P'' \cdot 0\,,$$

$$P' = \frac{P \cdot a'}{c'}\,.$$

Statt der Abstände a' und c' (rechtwinklig zu den Kräften) wird es mitunter bequemer sein, die in der Stabrichtung zu messenden Abstände a und c einzuführen. Man sieht aus Fig. 48f, daß nach den geometrischen Sätzen über Proportionen $a' : c' = a : c$ ist. Die obige Formel läßt sich also auch schreiben:

$$\text{(I)} \qquad P' = \frac{P \cdot a}{c}\,.$$

Trotzdem die Kraft K' selber nicht bekannt ist, haben wir somit die Seitenkraft P' direkt aus der Last P und den gegebenen Abmessungen a und c bestimmt. Entsprechend ergibt sich für die Seitenkraft P'':

$$\text{(I)} \qquad P'' = \frac{P \cdot b'}{c'} = \frac{P \cdot b}{c}.$$

Als Gedächtnisstütze kann man sich merken, daß diese beiden Seitenkräfte P' und P'' genau so groß sind wie die Auflagerdrücke A' und B' eines einfachen Balkens von der Länge c', der rechtwinklig zu der äußeren Last P verläuft (Fig. 48h). Da $P' + P''$ zusammen wieder P ergibt, genügt es, auch nur eine der obigen Formeln auszurechnen.

Zusammenfassend haben wir also folgendes gesehen: Die Einwirkungen K' und K'' eines belasteten Fachwerkstabes auf seine beiden Endknotenpunkte lassen sich darstellen durch zwei Einwirkungen S', die gleich groß, entgegengesetzt gerichtet sind und innerhalb der Stabachse liegen, und durch die beiden Kräfte P' und P'', die direkt in den Knotenpunkten einwirken. Vergleicht man nun dieses Einwirkungsschema mit der Einwirkung eines normalen, unbelasteten Fachwerkstabes, an dessen Enden gewöhnliche Knotenpunktslasten angreifen (Fig. 48c), so erkennt man folgende wichtige Übereinstimmung: Der *belastete* Fachwerkstab S wirkt auf die Endknotenpunkte (und somit auch auf das ganze übrige System) genau so, wie ein normaler *unbelasteter* Fachwerkstab, in dessen Knotenpunkten Lasten im Betrage von P' und P'' vorhanden sind. Die Größe dieser beiden Lasten P' und P'' ist gegeben durch die obigen Formeln:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} P' = \dfrac{P \cdot a'}{c'} = \dfrac{P \cdot a}{c}, \\[2ex] P'' = \dfrac{P \cdot b'}{c'} = \dfrac{P \cdot b}{c}. \end{cases}$$

3. Vollständige Berechnung des Fachwerkes mit belasteten Stäben.

Hiermit ist der Weg zur Berechnung einer derartigen Konstruktion klargestellt. Wir ersetzen die zwischen den Knotenpunkten befindliche Last P durch zwei ihr parallele und in den Knotenpunkten angreifende Seitenkräfte P' und P'', und berechnen dann das Fachwerk so, wie jedes andere Fachwerk, das nur in den Knotenpunkten belastet ist. Hiermit ist die Lösung gefunden (Fig. 48i).

Nur auf die Beanspruchung des Stabes S muß noch etwas genauer eingegangen werden. Insgesamt wirken auf ihn die Last P und die beiden Kräfte K' und K'', mit denen die Bolzen auf den Stab drücken (Fig. 49a). [Die Pfeile von K' und K'' in Fig. 49 sind entgegengesetzt den Pfeilen von Fig. 48, da jetzt nicht die Wirkung des Stabes auf die Bolzen, sondern umgekehrt der Bolzen auf den Stab dargestellt werden soll.] Von den Kräften K' und K'' sind bekannt die Seitenkräfte P' und P'' nach den obigen Formeln (I). Ferner die beiden gleich großen Seitenkräfte S', die ja aus dem Gesamtfachwerk wie gewöhnliche Stabkräfte berechnet werden (Fig. 48i). Solch ein Fachwerkstab stellt also einen Körper dar, auf dem im ganzen fünf bekannte Kräfte wirken. Nämlich die gegebene Last P und die vier Bolzendrücke (gewissermaßen die Auflagerkräfte dieses Körpers) P', S', S' und P'' (Fig. 49a). Im Gegensatz hierzu ist in Fig. 49b ein unbelasteter Fachwerkstab gezeichnet. Dieser ist nur durch die beiden Kräfte S beansprucht. Auch wenn er in seinen Enden zur Übertragung von Knotenpunktslasten dient, kommen letztere nicht für die Spannungen des Stabes in Betracht, da eine solche Last P direkt durch einen gleich großen Bolzendruck P' aufgehoben wird (Fig. 49b, rechtes Ende). Bei Belastung außerhalb der Knotenpunkte ist aber zwischen dem Gegendruck P' bzw. P'' und der Last P ein Abstand (Fig. 49a), so daß sich Druck und Gegendruck nicht sofort aufheben, sondern im Stabe Spannungen erzeugen. Darin eben besteht der Gegensatz zwischen belasteten und unbelasteten Stäben.

Um diese Spannungen richtig zu berechnen, muß man natürlich das gesamte Kräftesystem P', S', P, S' und P'' beachten. Für irgendeinen Schnitt β—β (Fig. 49c) ergibt sich zunächst die gesamte Normalkraft (rechtwinklig zum Querschnitt):

$$\text{(II)} \qquad \boxed{S = S' + P' \cdot \cos\alpha\,.}$$

Dieses ist also die eigentliche Längskraft, die den Stab auf Druck bzw. Zug beansprucht. Berechnet man die Längskraft von der rechten Seite, so ergibt sich für den untersuchten Schnitt β—β:

$$\begin{aligned} S &= S' - P''\cos\alpha + P\cos\alpha = S' + (P - P'')\cos\alpha \\ &= S' + P' \cdot \cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Natürlich derselbe Wert wie vorhin.

Außer der Kraft rechtwinklig zum Querschnitt wirkt aber auch noch eine Kraft in Richtung des Querschnittes (Querkraft):

$$\text{(III)} \qquad \boxed{Q = P' \cdot \sin\alpha\,.}$$

Diese Kraft ruft in dem Querschnitte Schubspannungen τ hervor.

Schließlich wirkt auf den betrachteten Querschnitt noch ein Biegungsmoment:

$$\text{(IV)}\qquad \boxed{\begin{aligned} M &= P' \cdot x \\ \text{oder auch} \quad &= P' \sin\alpha \cdot x\,. \end{aligned}}$$

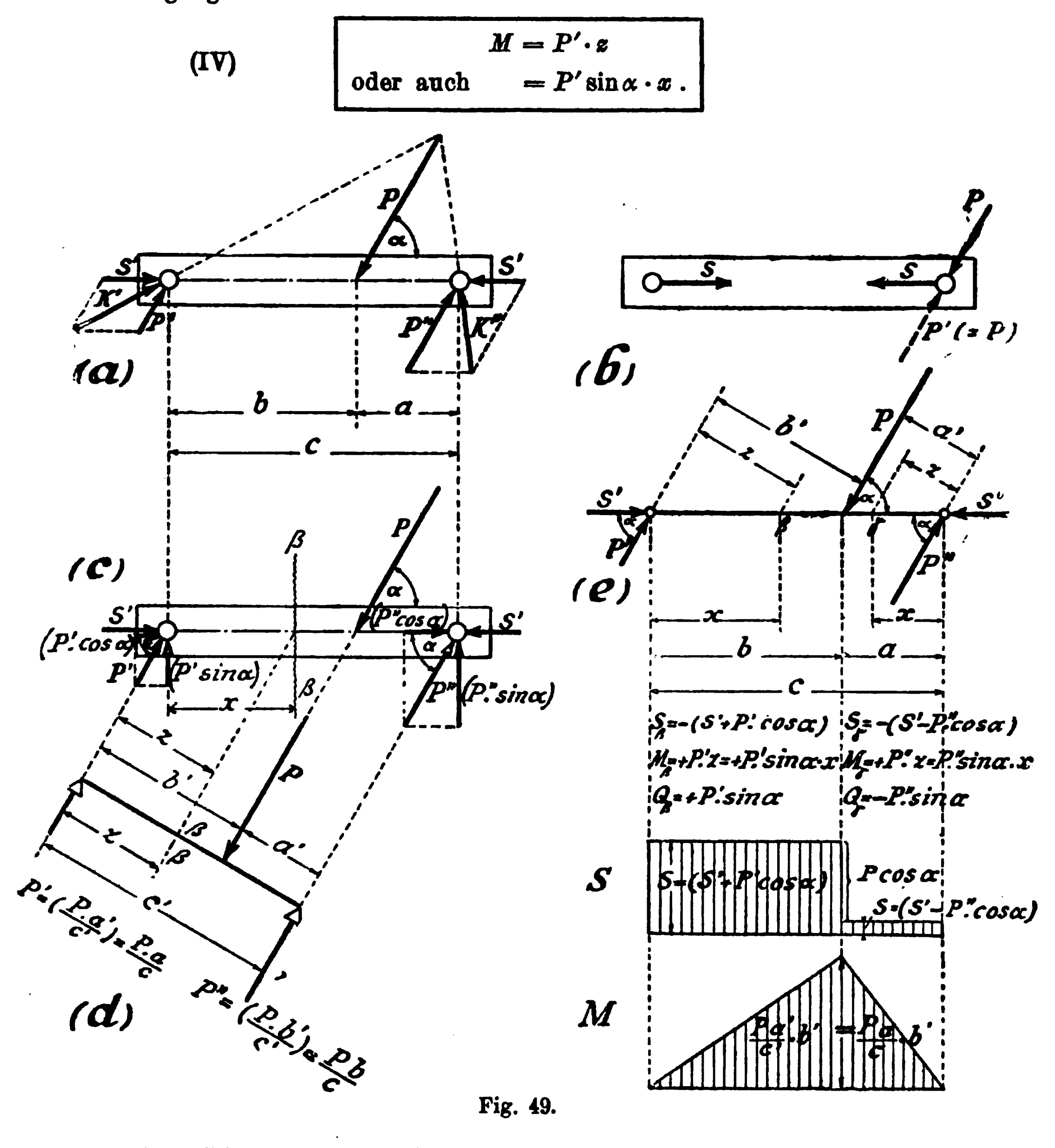


Fig. 49.

Dieses Biegungsmoment ist genau so groß, wie dasjenige eines gedachten Balkens, der rechtwinklig zu der Last P in einer Länge c' verlaufen würde (Fig. 49d).

Der Stab ist also auf zusammengesetzte Festigkeit, nämlich Zug oder Druck und außerdem Biegung, beansprucht. Ist nun die Fläche des betrachteten Querschnittes gleich F und sein Widerstandsmoment gleich W, so ergibt sich nach den Lehren von der zusammengesetzten Festigkeit die Gesamtbeanspruchung des betrachteten Querschnittes β—β:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{S}{F} - \dfrac{M}{W} & \text{(in der obersten Faser),} \\[2ex] \sigma = -\dfrac{S}{F} + \dfrac{M}{W} & \text{(in der untersten Faser).} \end{cases}$$

Die Querkraft Q würde Schubspannungen zur Folge haben, die jedoch fast immer unberücksichtigt bleiben (vgl. I. Band, § 41). Hiermit ist die endgültige Beanspruchung eines derartigen belasteten Fachwerkstabes erledigt.

In Fig. 49e ist noch gezeigt, wie S, Q und M verschieden sind, je nachdem man einen Querschnitt β bzw. γ links oder rechts von der Last P untersucht. Hierin zeigt sich besonders der Unterschied gegen einen normalen Fachwerkstab, der ein und dieselbe Stabkraft S auf der ganzen Länge beibehält und außerdem von Q und M überhaupt nichts weiß. Hat ein belasteter Fachwerkstab mehrere Lasten P, so wechselt seine Normalkraft S von Last zu Last (vgl. Fig. 49e bei einer Last).

Zusammenfassung.

Wenn eine Last P unter einem Winkel α direkt auf einen Fachwerkstab einwirkt, so verteilen wir sie zunächst nach dem Hebelgesetz auf die beiden Endknotenpunkte:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} P' = P \cdot \dfrac{a'}{c'} = P \cdot \dfrac{a}{c}, \\[2ex] P'' = P \cdot \dfrac{b'}{c'} = P \cdot \dfrac{b}{c}. \end{cases}$$

Hierdurch erhalten wir ein Fachwerk mit lauter Knotenpunktslasten, das wie jedes andere gewöhnliche Fachwerk berechnet wird. Die aus dieser Berechnung sich ergebenden Spannkräfte mögen S' genannt werden (Fig. 48i). Dann werden die Kräfte P' und P'' mit ihren Pfeilen umgedreht, um die Wirkung der Bolzen auf den Stab, nicht umgekehrt, zu veranschaulichen, und hierauf der Stab mit seinen sämtlichen angreifenden Kräften, nämlich: den umgekehrten Kräften P' und P'', den soeben gefundenen Achskräften S' und der gegebenen Belastung P, aufgezeichnet. Aus

diesem gesamten Belastungsschema ergeben sich dann folgende Beanspruchungen des Stabes:

Seine gesamte Längskraft

(II) $\begin{cases} S = S' \pm P' \cdot \cos\alpha & \text{[für Querschnitt links von } P], \\ S = S' \mp P'' \cdot \cos\alpha & [\text{„ „ rechts „ „}]. \end{cases}$

Ferner seine Querkraft

(III) $\begin{cases} Q = +P' \sin\alpha & \text{[für Querschnitt links von } P], \\ Q = -P'' \sin\alpha & [\text{„ „ rechts „ „}]. \end{cases}$

Und schließlich sein Biegungsmoment

(IV) $\begin{cases} M = P' \cdot z = P' \sin\alpha \cdot x & \text{[für Querschnitt links von } P], \\ M = P'' \cdot z = P'' \sin\alpha \cdot x & [\text{„ „ rechts „ „}]. \end{cases}$

Letzteres ist genau so groß, wie das Biegungsmoment eines einfachen Balkens von der Länge c', der rechtwinklig zu der Last P verläuft. Ist nun bei dem betrachteten Querschnitt

die Querschnittsfläche $= F$,

das Widerstandsmoment $= W$,

so ergibt sich die endgültige Spannung:

(V) $$\sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{M}{W}.$$

Dieses ist also die Spannung, die das zulässige Maß nicht überschreiten darf.

Die Längskraft (Normalkraft) S werden wir auch als die eigentliche „Spannkraft" des Stabes bezeichnen. Dann verwechsele man sie aber nicht mit den „Stabkräften" K' und K'', mit denen wir die Einwirkung des Stabes auf seine Knotenpunkte bezeichnet haben. „Spannkraft" (Längskraft) und „Stabkraft" (Bolzendruck) sind bei einem belasteten Stabe durchaus voneinander verschieden.

Spezialfall:

Belastung rechtwinklig zum Stabe. In diesem Falle sind die beiden Seitenkräfte P' und P'', mit denen die Last P auf die Knotenpunkte m und n wirkt, ebenfalls rechtwinklig zum Stabe gerichtet (Fig. 50a). Setzen wir nun in die früheren Formeln den Winkel $\alpha = 90^0$ ein (also $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$), so gehen sie über in:

(IIa) Längskraft $S = S'$,

(IIIa) Querkraft $Q = P'$ bzw. $-P''$,

(IVa) Moment $M = P' \cdot x$ bzw. $P'' \cdot x$.

Die Stabkraft S' (die sich nach der Verteilung von P in P' und P'' aus Fig. 50a ergeben würde) ist also direkt die gesamte Spannkraft des Stabes. In Fig. 50b ist der Stab mit seinen sämtlichen fünf Kräften gezeichnet. Man erkennt auch hieraus, daß bei rechtwinkliger Belastung die Normalkraft des Stabes nur aus den Kräften S' besteht, da die anderen Kräfte in dieser Kraftrichtung keinen Beitrag liefern. Diese Spannkraft S' gilt dann für sämtliche Querschnitte des Stabes.

Betrachtet man zum Vergleiche ein Fachwerk unter den gleichen Umständen, bei dem die Last P aber indirekt, d. h. durch Vermittlung von Längs- und Querträgern, einwirkt (Fig. 50c), so erkennt man mit Fig. 50a folgende Übereinstimmung: Die Seiten-

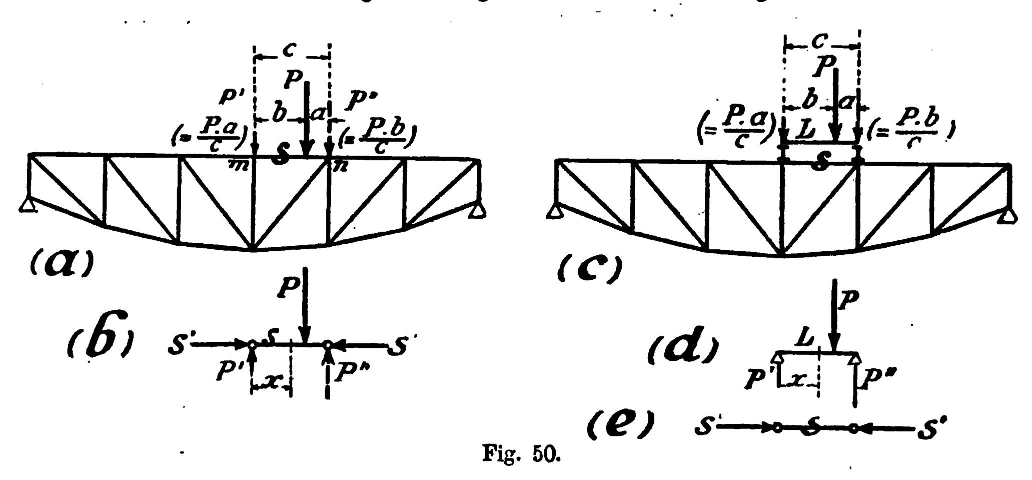


Fig. 50.

kräfte P' und P'' von Fig. 50a sind genau so groß wie die Auflagerdrücke der Querträger in Fig. 50c. Die Spannkraft S' = Gesamtspannkraft S, die sich aus Fig. 50a ergibt, ist also ebenso groß wie die Spannkraft, die sich in Fig. 50c ergeben würde. Und die Querkraft Q und das Moment M, die in Fig. 50a noch zu der Beanspruchung des Stabes S hinzukommen, sind augenscheinlich ebenso groß wie die Querkraft und das Moment, die in Fig. 50c der Längsträger L aufzunehmen hat. Insgesamt sehen wir also, daß die Konstruktion Fig. 50a sich genau so verhält wie die indirekt belastete Konstruktion Fig. 50c. Nur müssen die Werte Q und M, die in Fig. 50c der Längsträger aufnimmt, in Fig. 50a direkt dem Fachwerkstab auferlegt werden. Man kann also sagen: Wenn eine Belastung eigentlich auch direkt auf ein Fachwerk wirkt, so wird sie durch die Fachwerkstäbe doch in eine indirekte Belastung umgewandelt.

Dies gilt aber nur dann, wenn die Belastung rechtwinklig zu dem Stabe steht. Bei schräger Belastung wäre die Beanspruchung der Stäbe S in Fig. 50a und c durchaus voneinander verschieden.

II. Fachwerke mit scheibenförmigen Gliedern.

Bei solchen Fachwerken mit Belastung außerhalb der Knotenpunkte bekommen die Stäbe also außer ihrer Normalkraft S noch eine Biegungsbeanspruchung M. Bei größeren Abmessungen bildet man deshalb die auf Biegung beanspruchten Glieder nicht mehr als einfache Stäbe aus, sondern als genietete Träger (Fig. 51a). Oder man geht noch weiter, indem man diese Glieder als besondere kleine Fachwerkscheiben konstruiert (Fig. 51e). Aus dieser Herleitung ergibt sich auch sofort der zu wählende Rechnungsgang: Beim Fachwerk Fig. 51a wird die Last P zunächst in die beiden Teilkräfte

$$\text{(I)} \qquad P' = \frac{P \cdot a}{c}, \qquad P'' = \frac{P \cdot b}{c}$$

zerlegt, und für diesen Fall werden dann die (Hilfs-)Spannkräfte S' bestimmt (Fig. 51b). Dann setzt sich nach Fig. 51c die gesamte Beanspruchung des Stabes zusammen aus den Kräften S' (innerhalb der Verbindungslinie der beiden Bolzen wirkend), den Kräften P' und P'' und der Last P. Die gesamte Spannkraft, die innerhalb der Verbindungslinie der beiden Bolzen auf der Strecke x wirkt, beträgt also:

$$\text{(II)} \qquad S = S' + P' \cdot \cos\alpha \,.$$

Das Biegungsmoment infolge der Kraft P' für den Querschnitt direkt unter der Last P ist:

$$\text{(III)} \qquad M' = P' \cdot z = P' \sin\alpha \cdot x \,.$$

[Ebenso groß wie das Moment eines Balkens, der rechtwinklig zur Last P verlaufen würde, Fig. 51d.] Da aber die Kraft S nicht durch den Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes verläuft, gibt sie auch noch ein Biegungsmoment ab (Fig. 51c):

$$M'' = S \cdot y \,.$$

Das gesamte Moment an dieser Stelle ist also:

$$M = M' + M'' = P' \cdot z + S \cdot y \,.$$

Hat der Querschnitt die Fläche F und das Widerstandsmoment W, so sind demnach die Spannungen in den äußersten Faserschichten

$$\sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{M}{W} \,.$$

Hiermit ist die Konstruktion Fig. 51a erledigt.

Genau so ist die Untersuchung von Fig. 51e. Wollte man dieses Fachwerk direkt berechnen, so würde man schon bei Knoten *0* auf Schwierigkeiten stoßen, da hier mehr als zwei unbekannte Stabkräfte zusammenlaufen. [Das System ist kein einfaches Dreieckfachwerk.] Wir helfen uns in diesem Falle einfach damit, daß wir die Konstruktion als ein einfaches Dreieckfachwerk auffassen, dessen Obergurt aber nicht aus einfachen Stäben, sondern aus Scheiben gebildet ist. Die Berechnung geschieht also in folgender Weise: Zunächst werden die Zwischenlasten P_1 usw. auf die anliegenden Knotenpunkte verteilt und für diesen Fall die Hilfswerte S' bestimmt, wobei jede Scheibe als einfacher Stab behandelt wird. Nun werden die Scheiben mit sämtlichen an ihnen angreifenden Kräften einzeln betrachtet. Für eine unbelastete Scheibe von Fig. 51e ergeben sich hierbei als angreifende Kräfte nur die betreffenden Kräfte S' (Fig. 51f). Diese Scheiben erfahren bei der gewählten Form also nur im Obergurt Spannkräfte, und zwar gleich S'; während ihre übrigen Stäbe spannlos bleiben. Bei der Scheibe, die die Lasten P_1 und P_2 trägt, kommen aber zu der Spannkraft S' noch die schrägen Bolzendrücke P' und P'' hinzu. Hierbei ist zu beachten, daß zu jeder Last ein bestimmtes Paar Bolzendrücke P' und P'' gehört. Für diese so belasteten Scheiben (Fig. 51g) kann nun ein kleiner Kräfteplan gezeichnet werden. Dieser ergibt dann die endgültigen Spannkräfte S der Stäbe. Wenn man die ganze Untersuchung mittels Kräfteplan durchführt, kann man auch diese kleinen Kräftepläne mit dem großen Kräfteplan für das gesamte System (der die Hilfskräfte S' liefert) zusammenziehen. (Siehe 5. Beispiel vom folgenden Paragraphen.)

Auch das Fachwerk Fig. 51h läßt sich in ein einfaches Dreieckfachwerk, bei dem einzelne Stäbe aus Scheiben gebildet sind, auflösen. Dies geschieht, indem man die Diagonalen des Systems in ihrem oberen Teil gewissermaßen gespalten denkt, so daß aus der Fig. 51h die Fig. 51i entsteht. Durch eine solche, gedanklich mögliche Spaltung ist dann das Fachwerk Fig. 51h in ein einfaches Dreieckfachwerk übergeführt, dessen Obergurt allerdings nicht aus einfachen Stäben, sondern aus zusammengesetzten Scheiben besteht. Dieses letztere Fachwerk läßt sich also in der bei Fig. 51e erläuterten Weise berechnen.

Natürlich müssen wir aber noch überlegen, ob die an Hand von Fig. 51i berechneten Spannkräfte nun auch tatsächlich für das eigentlich zu berechnende System Fig. 51h gültig sind. [Denn an und für sich ist ja durch eine solche Spaltung von Stäben ein

ganz neues System entstanden.] Dieser Nachweis für die Übereinstimmung der Spannungen kann folgendermaßen geführt werden:

Bei dem einfachen Beispiel Fig. 52 mögen die Spannkräfte in dem ursprünglichen Fachwerke mit „S“ und in dem abgeänderten Fachwerke mit „T“ bezeichnet werden. Und zwar bedeute T_1 die Summe der beiden Stabkräfte, die am Punkte $0'$ angreifen. T_2 bezeichne die Kraft des durchlaufenden Stabes $\overline{0'4'}$. Für den nicht durchlaufenden Stab $\overline{0'2'}$ bleibt also der Betrag $(T_1 - T_2)$

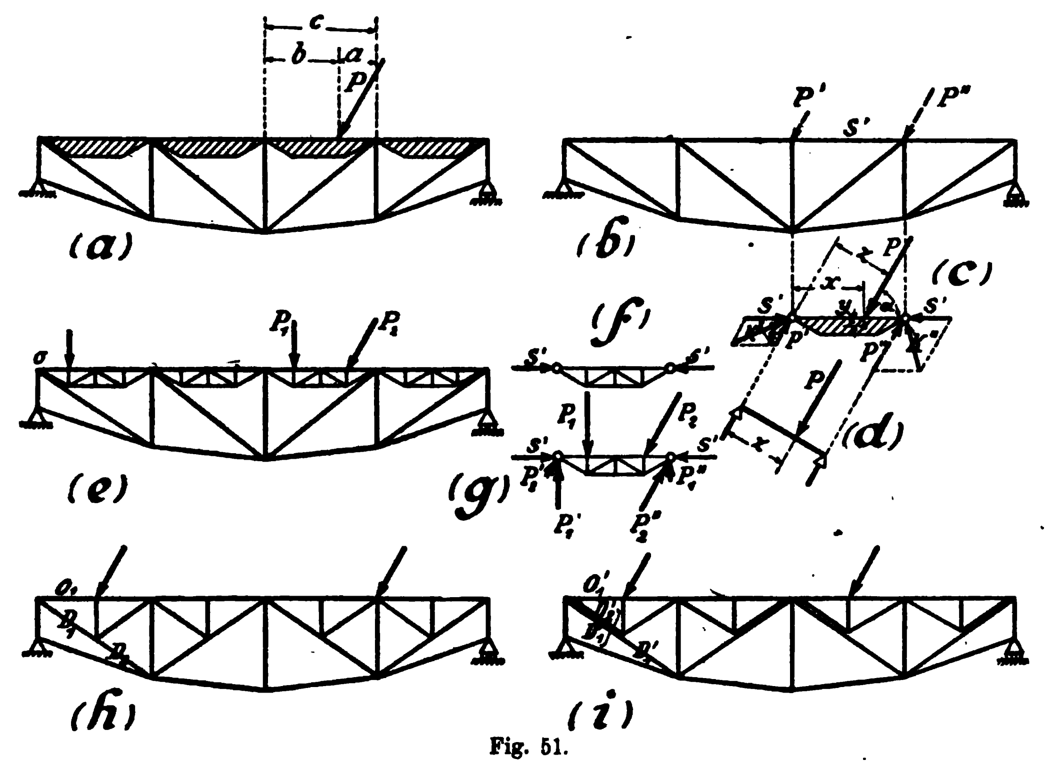


Fig. 51.

übrig. Nun denken wir uns für jeden Punkt der beiden Figuren die Gleichgewichtsbedingungen $R_x = 0$, $R_y = 0$ angeschrieben. Für den Punkt 0 treten in diesen Gleichungen die Kräfte A, S_1 und S_3 auf. Für den entsprechenden Punkt $0'$ die Kräfte A, T_1 und T_3, und zwar mit denselben Neigungswinkeln wie die Kräfte S. Für den Punkt 1 kommen die Kräfte S_3, S_4, S_5 in Betracht. Für den Punkt $1'$ die unter denselben Neigungswinkeln wirkenden Kräfte T_3, T_4, T_5. Am Punkte 2 haben wir die Kräfte (Fig. 52c) S_5, S_6 und $(S_1 - S_2)$. Entsprechend sind am Punkte $2'$ die Kräfte T_5, T_6 und $(T_1 - T_2)$. Denkt man sich nun alle diese Gleichungen

$R_{x=0}$, $R_{y=0}$ sowohl für das ursprüngliche System Fig. 52a wie für das gespaltene System Fig. 52b angeschrieben, so erhält man zwei Gruppen von Gleichungen, die sich augenscheinlich nur dadurch unterscheiden, daß in der einen Gruppe die Unbekannten mit „S" und in der anderen Gruppe mit „T" bezeichnet sind. Alle anderen Größen (Neigungswinkel und äußere Kräfte) stimmen aber vollkommen überein. Daraus folgt, daß sich bei der Auflösung der ersten Gruppe dieselben Werte für die Unbekannten ergeben müssen, wie aus der anderen Gruppe. Beispielsweise ergibt sich $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, usw. Hiermit ist bewiesen, daß die Stabkräfte von Fig. 52b mit denen des ursprünglichen Systems übereinstimmen.

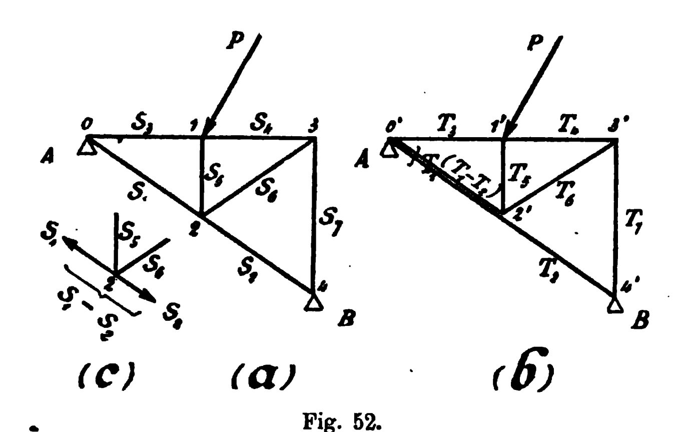


Fig. 52.

Genau so wie an diesem einfachen Beispiele läßt sich allgemein zeigen: Wenn man aus einem gegebenen System durch Spaltung eines Stabes ein neues System schafft, so stimmen dessen Spannkräfte mit dem gegebenen System überein. Nur ist darauf zu achten, daß in den Strecken, wo bei dem neuen System zwei Stäbe nebeneinander laufen, diese beiden Stabkräfte gemeinsam zu nehmen sind, um die Stabkraft des gegebenen Systems an der betreffenden Stelle zu erhalten. [In dem neuen System müssen die vorhin gespaltenen Stäbe gewissermaßen wieder zusammengeschoben werden.]

Wenden wir nun diesen Satz auf die Systeme Fig. 51h und i an, so erkennt man folgenden Rechnungsgang: Um das ursprüngliche System Fig. 51h zu berechnen, formen wir es durch Spaltung der Stäbe S_1 usw. in das neue System Fig. 51i um und berechnen zunächst dessen Spannkräfte. (Einfaches Dreieckfachwerk mit scheibenförmigen Gliedern.) Diese Spannkräfte mögen heißen:

D_1', D_2', O_1' usw. (Fig. 51 i). Dann bestimmen sich hieraus die Spannkräfte des gegebenen Fachwerkes durch die Beziehungen:

$$D_1 = D_1' + D_2'\,; \quad D_2 = D_1'\,; \quad O_1 = O_1'\,; \quad \text{usw.}$$

Zusatz. Nebenbei sei bemerkt, daß diese Überführung eines Fachwerkes in ein anderes, wobei einzelne Stäbe gewissermaßen gespalten zu denken sind, im allgemeinen nur bei statisch bestimmten Systemen zulässig ist. Denn bei statisch unbestimmten Systemen treten bei der Berechnung der Stabkräfte außer den Gleichgewichtsbedingungen noch andere Gleichungen auf. Diese aber sind in den beiden Fällen (ursprüngliches und abgeändertes System) verschieden, so daß auch die Resultate (Spannkräfte) verschieden sind. Früher hat man häufig statisch unbestimmte mehrfache Netzwerke durch eine solche Zerlegung in andere Fachwerke zu berechnen versucht, wobei man sich in der Praxis nicht immer klarmachte, daß in diesem Falle die Berechnung nur angenäherte Resultate liefern kann.

Zusammenfassung: Kommen bei einem Fachwerke Glieder vor, die aus vollwandigen oder fachwerkförmigen Scheiben bestehen, so wird die Berechnung genau so durchgeführt, als wenn an Stelle der Scheiben, zwischen den Knotenpunkten, ein einfacher Stab wäre, der durch die Zwischenlasten beansprucht ist. Diese Zerlegung eines zusammengesetzten Fachwerkes in ein einfaches mit belasteten Stäben erleichtert häufig die Berechnung. In manchen Fällen muß man, um diese Zerlegung zu ermöglichen, einzelne Fachwerkstäbe gespalten annehmen, um auf diese Weise ein Hauptsystem mit eingehängten „Zwischensystemen" zu erhalten. Die richtigen Spannkräfte ergeben sich dann, indem man die beiden Systeme wieder zusammengeschoben denkt.

Um Irrtümer zu vermeiden, sei bemerkt, daß man die betrachtete Fachwerkfigur Fig. 51 e und h natürlich auch ohne diesen Kunstgriff hätte berechnen können. Schlimmstenfalls, wenn man an einer Stelle nicht weiterkommt, mit der Ersatzstabmethode. Statt aber solch schweres Geschütz aufzuführen, wird man stets lieber die angegebene Zurückführung auf einfache Systeme mit scheibenförmigen Gliedern anwenden.

§ 19.

Beispiele zu § 18.

Erste Aufgabe.

Das in Fig. 53a gezeichnete Fachwerk mit Zwischenbelastung ist zu berechnen!

a) Verteilung der Zwischenlasten und Spannkräfte S'.

Zunächst werden die Zwischenlasten von Fig. 53a auf die Endknotenpunkte der betreffenden Stäbe verteilt. Hierdurch entsteht das in Fig. 53c gezeichnete Belastungsschema mit Lasten nur in den Knotenpunkten:

$$\text{Im Punkte } 0: \quad 400 + \tfrac{1}{2}800 = 800 \text{ kg};$$

$$\text{,, \quad ,, } 1: \quad 800 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}800 = 1600 \text{ kg; usw.}$$

Zu diesem Fachwerk sind dann die Spannkräfte S' bestimmt. (Kräfteplan Fig. 53d.)

b) Die endgültigen Spannkräfte S (und Biegungsmomente M).

Für die unbelasteten Stäbe sind die so erhaltenen Spannkräfte bereits die endgültigen; denn ein unbelasteter Stab erfährt von seiten der Knotenpunkte nur Kräfte, die innerhalb der Stabachse wirken. Für die belasteten Stäbe dagegen kommen außer den Kräften S' noch die Seitenkräfte P' bzw. P'' hinzu, die dann zusammen mit den Kräften S' die wirklichen Bolzendrücke K' und K'' ergeben (Fig. 53e). Hierbei sei daran erinnert, daß jetzt, da die Einwirkung der Bolzen auf den Stab darzustellen ist, die Pfeile von P' und P'' natürlich umgekehrt zu nehmen sind, als wenn die Einwirkung des Stabes auf den Bolzen gezeichnet wird (Fig. 53e und b). Man gehe also so vor, daß man bei der Berechnung des Stabes von vornherein die Kräfte P' und P'' mit umgekehrten Pfeilen einzeichnet, dann S' als Zug oder Druck richtig hinzufügt und schließlich die Last P. Für die beiden in Betracht kommenden Stäbe O_1 und O_2 ergeben sich somit folgende Zusammenstellungen:

Stab O_1 (Fig. 53e). Die gesamte endgültige Spannkraft beträgt

$$\text{von } 0 \text{ bis } \beta\text{—}\beta: \quad S = -4950 - 400 \cdot \cos 55^0 = -5180 \text{ kg},$$

$$\text{von } \beta\text{—}\beta \text{ bis } 1: \quad S = -4950 + 400 \cdot \cos 55^0 = -4720 \text{ kg}.$$

[An der Stelle, wo die Zwischenlast angreift, findet also in der Spannkraft ein Sprung von $800 \cdot \cos 55^0 = 460$ kg statt.] Außer-

dem erfährt der Stab ein größtes Biegungsmoment (für den Schnitt $\beta-\beta$, unter der Zwischenlast):

$$M = 400 \cdot 100 = 40000 \text{ cmkg}.$$

Der Stab bestehe aus zwei Winkeleisen 50 · 100 · 8 (Fig. 53f) mit einer Fläche

$$F = 2 \cdot 11{,}5 = 23{,}0 \text{ qcm}$$

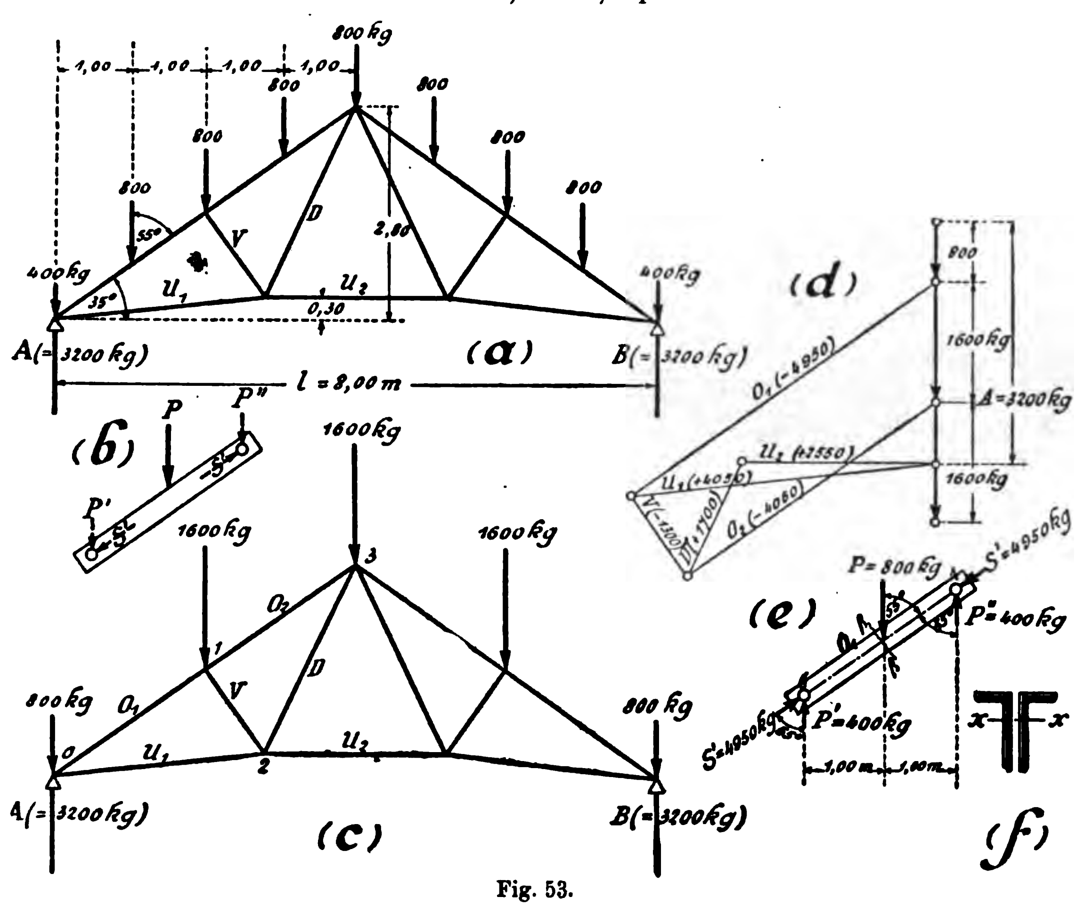


Fig. 53.

und den Widerstandsmomenten

$$W_1 = 2 \cdot 32{,}3 = 64{,}6 \text{ cm}^3 \quad \text{[für die oberste Faser]},$$

$$W_2 = 2 \cdot 18{,}1 = 36{,}2 \text{ cm}^3 \quad \text{[„ „ unterste „]}.$$

Somit sind die größten Beanspruchungen des Stabes O_1:

$$\sigma = -\frac{5180}{23{,}0} - \frac{40000}{64{,}6} = -220 - 620 = -840 \text{ kg/qcm} \quad \text{[in der obersten Faser]},$$

$$\sigma = -\frac{5180}{23{,}0} + \frac{40000}{36{,}2} = -220 + 1110 = +890 \text{ kg/qcm} \quad \text{[in der untersten Faser]}.$$

Der größere von beiden Werten ist natürlich maßgebend. Hiermit ist der Stab O_1 erledigt.

Stab O_2. Für den Stab O_2 würde sich entsprechend ergeben (wobei wir nur die wirklich gebrauchten Werte hinschreiben wollen):

$$\text{Größte Längskraft } S = -4050 - 400 \cdot \cos 55^0 = -4050 - 230 = -4280 \text{ kg},$$

$$\text{Moment } M = 400 \cdot 100 = 40000 \text{ cmkg},$$

$$\text{Querschnitt des Stabes: } 2 \measuredangle 50 \cdot 100 \cdot 8 \text{ mit } F = 23{,}0 \text{ qcm}, \quad W = 36{,}2 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma = -\frac{4280}{23{,}0} + \frac{40000}{36{,}2} = -190 + 1110 = +920 \text{ kg/qcm}.$$

Zusatz: In der Praxis wird diese Zusatzkraft $P' \cdot \cos\alpha$, die zu der Stabkraft S' noch hinzukommt, vielfach vernachlässigt. Dies rührt wohl daher, weil man über die Wirkungsweise derartig belasteter Fachwerkstäbe meistens recht oberflächlich hinweggeht. An und für sich ist ja gegen eine Vernachlässigung solcher kleiner Zusatzkräfte nichts einzuwenden. Doch muß man auf jeden Fall auch die richtige Berechnung kennen.

Zweite Aufgabe.

Der in Fig. 54a gezeichnete kleine Drehkran ist für die Belastung P zu berechnen!

Es sei $P = 3000$ kg, $\alpha = 45^0$. Die Abmessungen sind aus Fig. 54a zu entnehmen. Die Stützung erfolgt oben durch ein Halslager, unten durch ein Spurlager. Das obere Lager ist also ein (in vertikaler Richtung) bewegliches Lager und übt stets eine horizontale Auflagerkraft aus. Das untere Lager wirkt als festes Kipplager.

Die Auflagerdrücke ergeben sich nach Fig. 54a:

$$V = P \cdot \sin\alpha = 3000 \cdot 0{,}707 = 2120 \text{ kg}, \qquad [R_v = 0]$$

$$H = (P \sin\alpha \cdot 5{,}00 + P \cos\alpha \cdot 0{,}45) \frac{1}{4{,}75} \qquad [\Sigma M_m = 0]$$

$$= (2120 \cdot 5{,}00 + 2120 \cdot 0{,}45) \frac{1}{4{,}75} = 2430 \text{ kg},$$

$$B = (P \sin\alpha \cdot 5{,}00 - P \cos\alpha \cdot 4{,}30) \frac{1}{4{,}75} = 310 \text{ kg}. \qquad [\Sigma M_n = 0]$$

[Kontrolle: $H - B = P\cos\alpha = 2430 - 310 = 2120$ kg.] Aus V und H ergibt sich der gesamte Auflagerdruck A. Doch können wir auch direkt mit den beiden Seitenkräften V und H weiter arbeiten.

a) Verteilung der Zwischenlasten und Spannkräfte S'.

Stab S_1 (Fig. 54a und b). Der Stab S_1 ist mit P belastet. Diese Last greift jetzt außerhalb der eigentlichen Stablänge an. Die Verteilung auf die zugehörigen Knotenpunkte wird hierdurch aber im Prinzip nicht geändert. Die Abstände der Last P von den Endpunkten sind wieder mit a und b bezeichnet, die Stablänge mit c (Fig. 54b). Dann ist:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} P' = \dfrac{P \cdot a}{c} = \dfrac{3000 \cdot 1{,}0}{4{,}0} = 750 \text{ kg}, \\[2ex] P'' = \dfrac{P \cdot b}{c} = \dfrac{3000 \cdot 5{,}0}{4{,}0} = 3750 \text{ kg}. \end{cases}$$

Fig. 54.

Die Pfeilrichtungen von P' und P'' ergeben sich stets aus der Bedingung, daß das statische Moment der Kraft P gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte P' und P'' ist. Hiernach erhalten bei Belastung außerhalb der Stablänge die Seitenkräfte P' und P'' entgegengesetzte Pfeilrichtungen. [Haben zwei Kräfte entgegengesetzte Richtungen, so ergeben sie bei ihrer Zusammensetzung eine Resultierende, die seitlich von den Kräften zu liegen kommt. Umgekehrt ergibt sich bei der Zerlegung einer Kraft P in zwei Richtungen

auf derselben Seite von P, daß diese Seitenkräfte entgegengesetzte Richtungen erhalten müssen. Vgl. z. B. Fig. 29 von Band I.] Somit ist die Einwirkung der Last P auf die Knotenpunkte des belasteten Stabes klargestellt (Fig. 54b).

Stab S_2 (Fig. 54c). Am Stabe S_2 greifen insgesamt an die Kräfte B, H und V (Fig. 54a und c). Sämtliche sind außerhalb der Knotenpunkte. Die Verteilung von $B = 310$ kg auf die Knotenpunkte dieses Stabes ergibt die Seitenkräfte:

$$P' = \frac{310 \cdot 0{,}45}{4{,}00} = 35 \text{ kg}, \qquad P'' = \frac{310 \cdot 4{,}45}{4{,}00} = 345 \text{ kg}.$$

Die Pfeile von P' und P'' sind wieder entgegengesetzt, da die Last B außerhalb der Stablänge angreift. [Die Seitenkraft, die der gegebenen Kraft zunächst liegt, ist stets die größere und gleichgerichtet mit der gegebenen Kraft.]

Ferner gehören zum Stab S_2 die außerhalb der Knotenpunkte angreifenden Kräfte H und V. Die Verteilung der ersteren liefert die Seitenkräfte:

$$\frac{2430 \cdot 4{,}30}{4{,}00} = 2610 \text{ kg} \qquad \text{und} \qquad \frac{2430 \cdot 0{,}30}{4{,}00} = 180 \text{ kg}.$$

Die Last V wird durch den unteren Stabteil als ein Bolzendruck von 2120 kg nach dem Knotenpunkt *2* geleitet (Fig. 54c).

Insgesamt hat der Stab S_2 also folgende Knotenpunktslasten

infolge B { 345 kg im Punkte *0* in Richtung ←,
35 „ „ „ *2* „ „ →,

infolge H { 2610 kg im Punkte *2* in Richtung →,
180 „ „ „ *0* „ „ ←,

infolge V { 2120 kg im Punkte *2* in Richtung ↑.

Diese Kräfte werden nun an jedem Knotenpunkte zusammengezählt.

Nachdem somit die Lasten auf die Knotenpunkte verteilt sind, werden die Spannkräfte S' bestimmt (Fig. 54d). Nach irgendeiner graphischen oder analytischen Methode ergibt sich:

$$S_1' = +1930 \text{ kg}, \quad S_2' = +2460 \text{ kg}, \quad S_3' = -5290 \text{ kg}, \quad S_4' = -2740 \text{ kg}.$$

b) Die endgültigen Spannkräfte und Beanspruchungen.

Dieses sind also die in der Linie der Stabachse wirkenden Bolzendrücke. Um die Beanspruchung eines Stabes klar zu erkennen, zeichnen wir ihn mit sämtlichen angreifenden Kräften auf, d. h. mit den gegebenen äußeren Lasten, den bereits vorhin

bestimmten Kräften $P'(P'')$ und den soeben neugefundenen Kräften S'. Hierbei ist wieder zu beachten, daß die Bolzendrücke $P'(P'')$ jetzt umgekehrt zu zeichnen sind als in Fig. 54b und c, da die Einwirkung der Bolzen auf die Stäbe, und nicht wir vorhin, der Stäbe auf die Bolzen, betrachtet wird. An jedem Stab haben wir dann eine Gleichgewichtsgruppe von Kräften, aus denen sich folgende endgültigen Werte für die Spannkraft und das Moment ergeben:

Stab S_1 (Fig. 54e und f).

Spannkraft von $0-1$: $+1930 + 750 \cdot \cos 45^0 = +2460$ kg,

„ „ $1-r$: $-P \cdot \cos 45^0 = -2120$ kg.

Größtes Moment: $M = P \sin\alpha \cdot 100 = 212000$ cmkg. [Momentenfläche Fig. 54f]

Vorhanden 2 [N.-P. 16 mit $F = 48{,}0$ qcm, $W = 232$ cm³.

Größte Spannung: $\sigma = \frac{2460}{48{,}0} + \frac{212000}{232} = 51 + 914 = 970$ kg/qcm.

Stab S_2 (Fig. 54g und h; der untere Teil Fig. 54i).

Spannkraft von $n-2$: $-V = -2120$ kg,

„ „ $2-0$: $+2460$ kg,

„ „ $0-m$: 0.

Moment bei 2: $M_2 = H \cdot 30 = 2430 \cdot 30 = 72900$ cmkg,

„ „ 0: $M_0 = B \cdot 45 = 310 \cdot 45 = 13950$ cmkg.

Für die übrigen Stäbe treten keine Momente auf und die Spannkräfte sind gleich den betreffenden Werten S'.

Übungsaufgabe. Der Leser führe die Untersuchung dieses Systems auch in der Weise durch, daß die Last P von vornherein in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt wird und also nur mit Horizontal- und Vertikalkräften zu arbeiten ist. Dann fällt die eine Seitenkraft von P in die Richtung des Stabes S_1, aber außerhalb der Knotenpunkte. Sie muß also genau so wie jede andere Kraft als ein auf den Bolzen wirkender Druck nach dem Knotenpunkte hin übertragen werden (vgl. die Kraft V in Fig. 54c und g). Hier wirkt sie dann als Knotenpunktslast bei der Bestimmung der Kräfte S'. Später, bei der Ermittlung der Stabbeanspruchung, muß sie dann mit umgekehrten Pfeilen eingeführt werden, genau so, wie es bei den Kräften P' und P'' zu geschehen hat.

Dritte Aufgabe.

Der in Fig. 55a gezeichnete Dachbinder mit stetig gekrümmtem Obergurt und Zwischenbelastung ist zu berechnen!

Abmessungen, Neigungswinkel usw. siehe Fig. 55a.

a) Verteilung der Zwischenlasten und Spannkräfte S'.

Zunächst werden die Zwischenlasten auf die Knotenpunkte verteilt. Statt der gebogenen Stäbe führen wir die geraden Verbindungslinien der Knotenpunkte ein und bestimmen die zu diesem System gehörigen Spannkräfte S' (Fig. 55b). Für den Stab O_1 z. B. würde sich ergeben:

$$\text{Spannkraft } S' = -\frac{(4500-750)}{\sin 30^0} = -\frac{3750}{0{,}50} = -7500 \text{ kg.}$$

b) Die gesamten Spannkräfte und Beanspruchungen.

Jetzt zeichnen wir den Stab O_1 auf mit sämtlichen Kräften: der Last P, den Drücken $P'(P'')$ und der Spannkraft S' (Fig. 55c). Dann ergibt sich:

$$\text{Größte Spannkraft:} \quad S = -(7500 + 375 \cdot \cos 60^0) = -7690 \text{ kg.}$$

$$\begin{aligned}\text{Größtes Moment:} \quad M &= +375 \cdot 100 - 7500 \cdot 6{,}7 \\ &= +37500 - 50250 \\ &= -12750 \text{ cmkg.}\end{aligned}$$

[Das Moment ist für den Querschnitt unter der Last genommen. Da der Obergurt gekrümmt sein sollte, greift die Kraft S' exzentrisch an (Fig. 55c). Der Abstand von der Kraft bis zum Querschnittsschwerpunkte, d. h. der Bogenstich h_1, ergibt sich geometrisch zu 6,7 cm. Die Kraft S' liefert also ein Moment von $S' \cdot 6{,}7$, und zwar entgegengesetzt drehend dem Moment von P'.]

Man ersieht, daß das Moment infolge S', das linksherum zeigt, größer ist als das Moment infolge der Last P. Der Obergurtstab O_1 erleidet also in den oberen Fasern Zug, in den unteren Fasern Druck. Zugleich erkennt man aber, wie günstig es ist, bei solchen zwischenbelasteten Konstruktionen dem Obergurt eine Wölbung zu geben. Aus S und M folgt dann bei einem angenommenen Profil die Spannung σ.

Zusatz. An diesem Beispiel möge noch kurz gezeigt werden, wie man die geometrischen Abmessungen einer derartigen Konstruktion berechnen kann. Der Obergurt soll nach einem Kreisbogen gekrümmt sein. Gegeben sei (Fig. 55d):

$$\text{Spannweite } l = 12{,}00 \text{ m}; \quad \text{Stich } f = 2{,}00 \text{ m}.$$

Dann finden wir zunächst (vgl. Band I, § 55)

$$(1) \quad \begin{cases} r = \dfrac{l^2}{8f} + \dfrac{f}{2} = 10{,}00 \text{ m}; \qquad f' = r - f = 8{,}00 \text{ m}; \\ y_1 = \sqrt{r^2 - m_1^2} - f' = \sqrt{100-16} - 8{,}00 = 1{,}165 \text{ m}; \quad y_2 = \ldots \end{cases}$$

Hieraus folgt dann weiter (Fig. 55d):

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{y_1}{x_1} = 0{,}583\,, \quad \alpha_1 = \backsim 30^0; \quad \alpha_2 = \ldots; \quad \alpha_3 = \ldots, \\ \text{Sehnenlängen } s_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = 5{,}36; \quad s_2^2 = \ldots; \quad s_3^2 = \ldots \end{cases}$$

Zum Schlusse ergibt sich die Bogenhöhe h_1 nach dem Sehnensatze:

$$(3)\qquad (2r - h_1)\cdot h_1 = \left(\frac{s_1}{2}\right)^2.$$

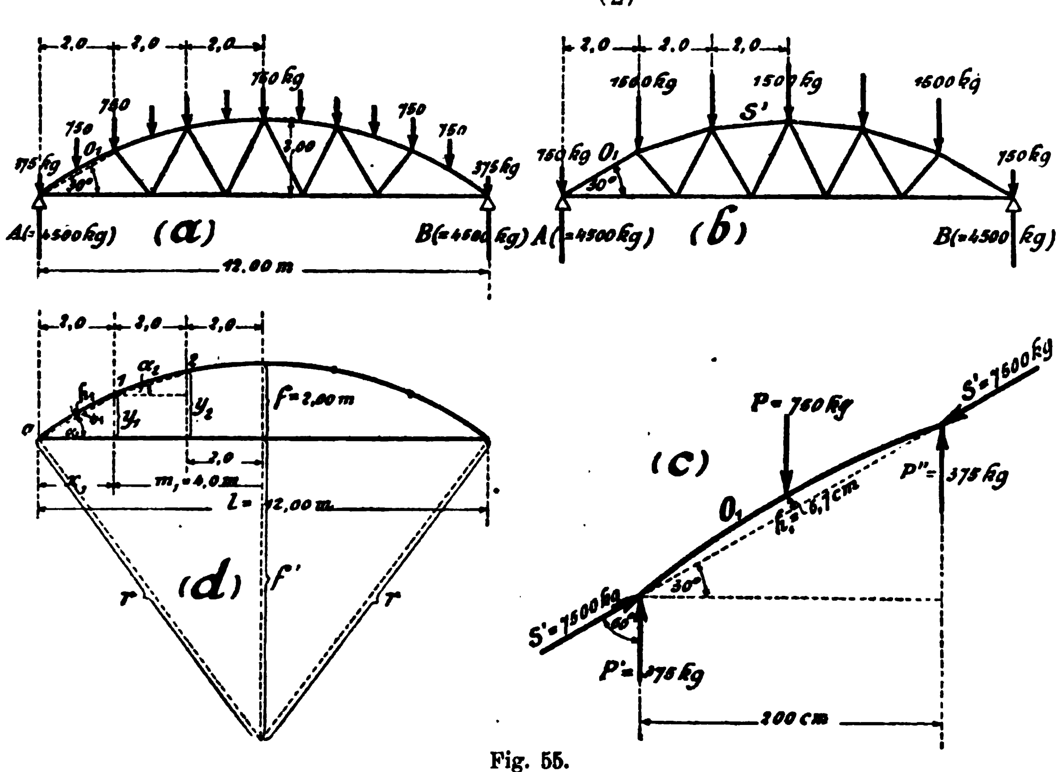


Fig. 55.

Dieser Ausdruck würde beim Ausmultiplizieren für die Unbekannte h_1 eine quadratische Gleichung liefern. Da aber h_1 sehr klein im Verhältnis zu $2r$ ist, kann man angenähert statt des Wertes $(2r - h_1)$ einfach den Wert $2r$ setzen. Dann wird das Quadrat von h_1 vermieden, indem sich aus (3) ergibt:

$$h_1 = \frac{s_1^2}{4(2r - h_1)} = \backsim \frac{s_1^2}{4\cdot 2r},$$

$$(3a)\qquad h_1 = \backsim \frac{s_1^2}{8r}$$

$$= \frac{5{,}36}{80{,}0} = 0{,}067 \text{ m.}$$

Entsprechend die Bogenhöhen

$$h_2 = \frac{s_2^2}{8\,r} = \ldots; \quad h_3 = \ldots$$

Mit diesen angenäherten Werten h_1 usw. könnte man schließlich auch die genaueren Werte ausrechnen. Beispielsweise für h_1, indem man nach obiger Formel schreibt:

$$h_1 = \frac{s_1^2}{4\cdot(2\,r - 0{,}067)} = \frac{5{,}36}{4\cdot 19{,}933}.$$

Doch ist dies vollkommen überflüssig, da praktisch derselbe Wert wie früher herauskommt.

Vierte Aufgabe.

Der Stab O des Kranträgers Fig. 56 ist für die gezeichnete Laststellung zu berechnen!

Die Verteilung der Last P_1 auf die zugehörigen Knotenpunkte liefert:

$$P_1' = P_1'' = \frac{6{,}0}{2} = 3{,}0 \text{ t.}$$

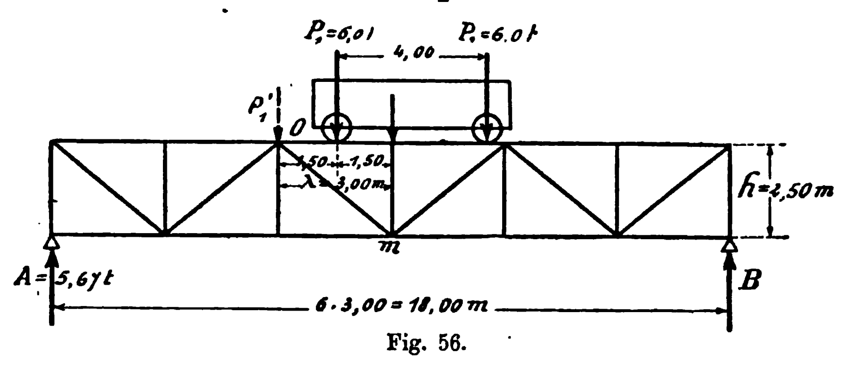


Fig. 56.

Hiermit ergibt sich für den Stab O die Spannkraft S':

$$S' = -\frac{M_m}{h} = -\frac{A\cdot 9{,}0 - P_1'\cdot 3{,}00}{h}$$

$$= -\frac{5{,}67\cdot 9{,}00 - 3{,}00\cdot 3{,}00}{2{,}50} = -16{,}8 \text{ t.}$$

Da die Belastung P und somit auch die Kräfte $P'(P'')$ rechtwinklig zum Stabe wirken, kommt durch die Kräfte $P'(P'')$ kein weiterer Betrag zu der Spannkraft S' hinzu (§ 18, I, Spezialfall). Die Kraft S' ist also die gesamte Spannkraft S, die in dem Stabe wirkt. Außerdem tritt nur noch das Biegungsmoment hinzu (Einzellast in der Mitte):

$$M = \frac{P\cdot\lambda}{4} = \frac{6000\cdot 300}{4} = 450000 \text{ cmkg.}$$

Zusatz: Wie bereits im vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde, kann man, falls die Zwischenbelastung *rechtwinklig* zum Stabe steht, das Fachwerk einfach so rechnen, als wenn zwischen Lasten und Fachwerk Längs- und Querträger vorhanden wären. [Nur muß das Biegungsmoment, das sonst die Längsträger aufnehmen würden, direkt dem betreffenden Fachwerkstabe zugeschrieben werden.] Bei *schräger* Belastung ist aber dieser einfache Rechnungsgang nicht zulässig, weil dann für die Spannkraft eines Stabes andere Werte herauskommen, je nachdem die Belastung durch Querträger übertragen wird oder aber direkt auf dem Stabe steht.

Fünfte Aufgabe.

Das in Fig. 57 gezeichnete Fachwerk ist zu berechnen!

Der Obergurt des vorliegenden Binders besteht aus kleinen Fachwerkscheiben, auf denen Lasten ruhen.

a) Zerlegung in Haupt- und Zwischensysteme. Stabkräfte S'.

Die Scheibenlasten werden zunächst auf die anliegenden Knotenpunkte verteilt und die Scheiben selbst durch einfache Stäbe ersetzt (Fig. 57b). Für dieses Fachwerk werden dann die Spannkräfte bestimmt. (Kräfteplan Fig. 57c, durch doppelte Kreise gekennzeichnet.)

Die Spannkräfte am Obergurt sind hierbei mit S_1' und S_2' bezeichnet, um anzudeuten, daß es noch nicht die endgültigen sind. Für die übrigen Stäbe dagegen ist der soweit gezeichnete Kräfteplan bereits endgültig, da diese Stäbe nichts mit den Scheiben zu tun haben.

b) Die endgültigen Spannkräfte der Scheiben.

Um die wirklichen Spannkräfte der zu den Scheiben gehörigen Stäbe zu erhalten, müssen letztere mit allen angreifenden Kräften betrachtet werden. Also mit den Lasten P, den Gegendrücken P' und P'' und den soeben gefundenen Kräften S' (Fig. 57d und e). Die Spannkräfte der auf diese Weise belasteten Scheiben sind ebenfalls graphisch bestimmt, und zwar wurden die betreffenden Kräftepolygone direkt in den bereits vorhandenen Kräfteplan hineingezeichnet: Für den Punkt *0* von Fig. 57d liegen im Kräfteplan Fig. 57c bereits gezeichnet vor die Kräfte S_1' und $P/2$ (nach oben zeigend), und es ergeben sich O_1 und U_3. Dann folgen aus Punkt *1* der Scheibe im Kräfteplan die Kräfte O_2 und V_3. Aus Punkt *2* folgt dann U_4 (Kontrolle). Entsprechend werden die zu

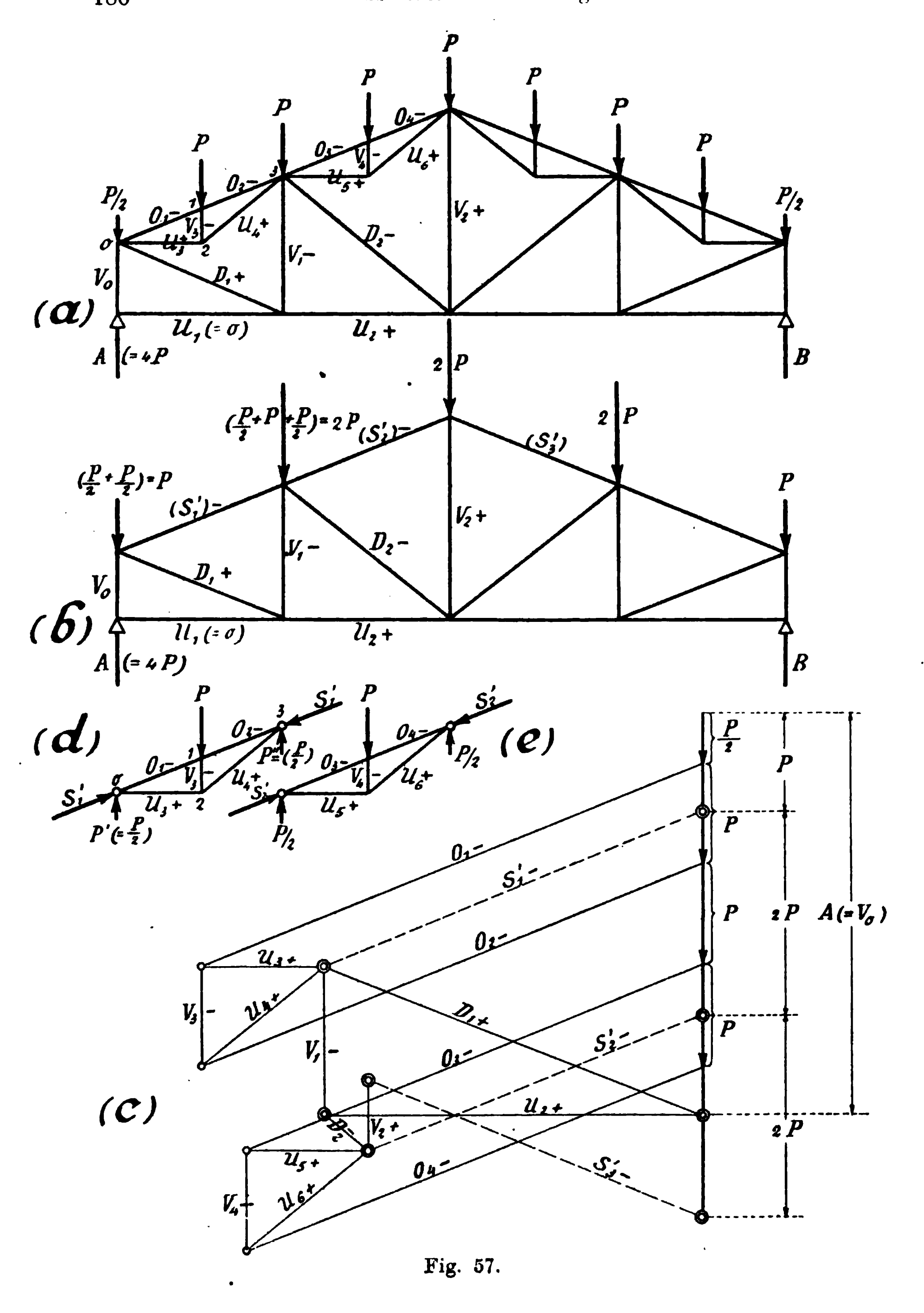


Fig. 57.

der zweiten Scheibe gehörigen Spannkräfte O_3, U_5, O_4, V_4 und U_6 in den großen Kräfteplan hineingezeichnet. Auf diese Weise ist jede endgültige Spannkraft des Binders bestimmt.

Wenn man die Zeichnung selber durchführt, wird man merken, daß alles an richtiger Stelle liegt. Sobald dann der ganze Kräfteplan fertig ist, kann man das ganze System (Fig. 57a) noch einmal von Punkt zu Punkt durchgehen, um den richtigen Kräfteverlauf zu kontrollieren.

Zusatz. Nachdem wir mit Hilfe der Fig. 57b die Spannkräfte D_1, V_1 und D_2 bestimmt hatten, hätten wir auch direkt zu dem eigentlichen System Fig. 57a zurückkehren können. Denn sobald diese drei Stabkräfte bekannt sind, läßt sich auch für Fig. 57a ohne Unterbrechung der Kräfteplan konstruieren. Man gelangt natürlich zu derselben Figur, wie vorhin bei Betrachtung der einzelnen Scheiben.

Übungsaufgabe. Auf den Binder Fig. 57a mögen die Lasten auf der einen Seite rechtwinklig zum Obergurt wirken. Sämtliche Spannkräfte sind zu finden!

Sechste Aufgabe.

Der in Fig. 58a dargestellte sog. doppelte Polonceau-Binder ist zu berechnen!

Das gezeichnete Fachwerk wird bekanntlich sehr viel zu Dachkonstruktionen verwendet. Wenn man es z. B. mittels Kräfteplan berechnen will, kommt man glatt bis zu Knoten *2*. Dann geht es nicht weiter, da sowohl bei Punkt *3* wie bei Punkt *4* mehr als zwei unbekannte Stabkräfte angreifen. Häufig hilft man sich in der Weise, daß man den Stab H nach der *Ritter*schen Methode berechnet (Schnitt α—α) und dann mit dem Kräfteplan am Punkt *4* weiter gelangt. Wir wollen jetzt aber einen anderen Weg einschlagen, der in der soeben vorgenommenen Methode der Zerlegung in Scheiben besteht.

a) Zerlegung in Haupt- und Zwischensysteme. Spannkräfte S'.

Wir denken uns also das Fachwerk in ein Hauptsystem und eingehängte Zwischensysteme (Scheiben) zerlegt. (Fig. 58b.) Hierbei erscheinen einzelne Stäbe als gespalten. Das schadet nichts, da wir durch Zusammenschieben des Hauptsystems und der Teilsysteme jederzeit die richtigen Kräfte des ursprünglichen Systems erhalten.

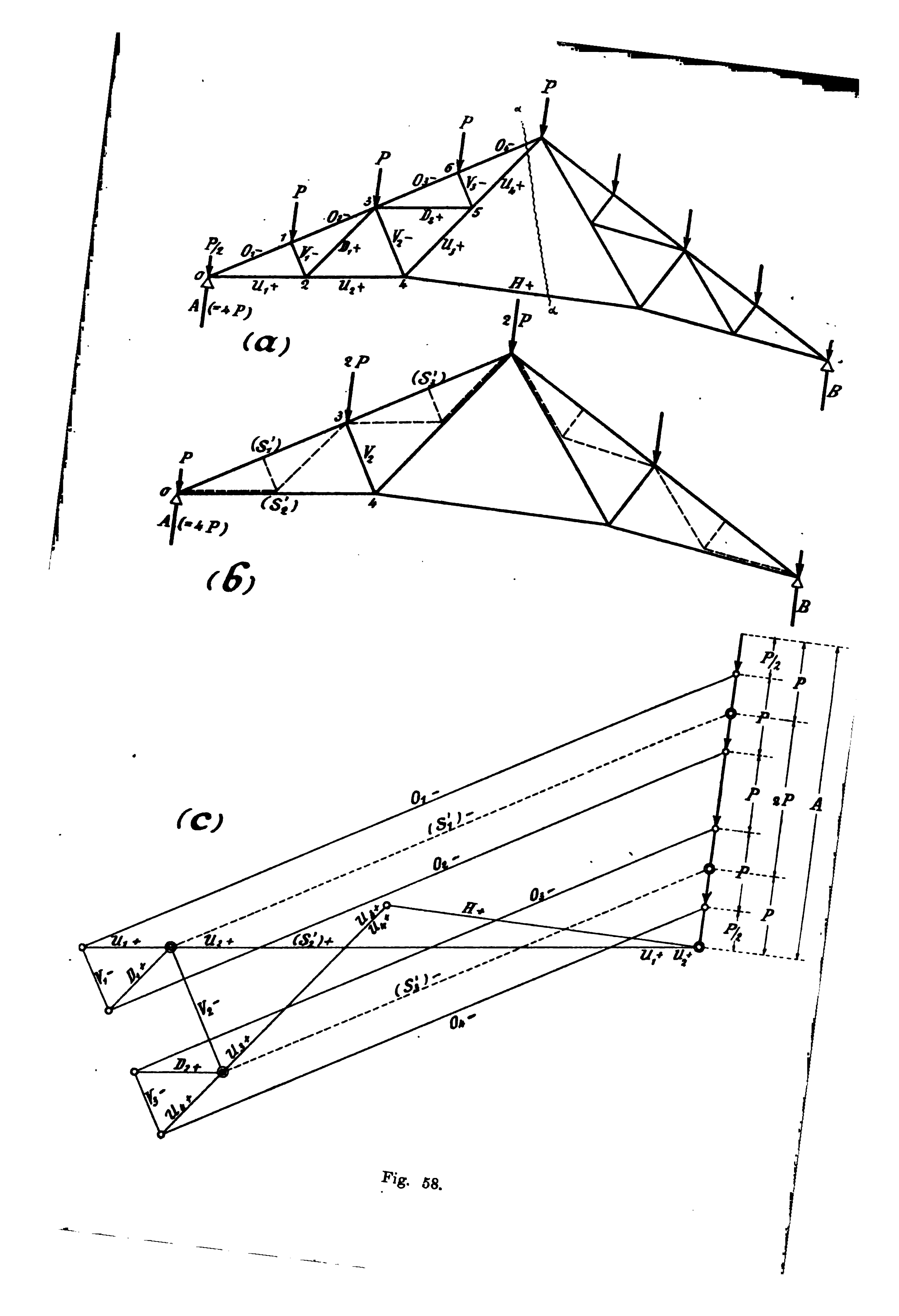


Fig. 58.

Zu dem zerlegten System Fig. 58b wurde nun ein Kräfteplan gezeichnet. Dieser liefert für die Stäbe U_2, U_3, V_2 und H des ursprünglichen Fachwerkes bereits die richtigen Werte, da diese Stäbe nichts mit den Scheiben gemeinsam haben.

b) Die endgültigen Spannkräfte für alle Stäbe.

Für die anderen Stäbe müßten nun die Scheiben einzeln betrachtet werden und ferner die Kräfte, die durch Spaltung eines Stabes entstanden sind, zusammengezählt werden. Dies erübrigt sich im vorliegenden Falle. Denn sobald V_2 oder H bekannt sind, kommen wir auch mit einem gewöhnlichen Kräfteplan sowohl bei Punkt *3* als bei Punkt *4* weiter. Sobald wir also diese Kräfte haben, gehen wir direkt zu dem ursprünglichen Fachwerk Fig. 58a zurück, fangen hier einen gewöhnlichen Kräfteplan bei Punkt *0* an und zeichnen diesen glatt zu Ende. Man wird finden, daß, sobald man an Punkt *3* kommt, die vorhin (aus Fig. 58b) bestimmte Kraft V_2 gerade so liegt, daß die anderen Kräfte direkt anschließen können.

Übungsaufgabe. Zeichne den Kräfteplan für den Fall, daß die Lasten P in Fig. 58a rechtwinklig zum Obergurt stehen!

§ 20.

Die wichtigsten Erscheinungsformen der statisch bestimmten Konstruktionen, ihre Berechnung und ihre Ausnahmefälle. Einiges über statisch unbestimmte Systeme.

Mit den bisherigen Untersuchungen ist die Theorie der st. best. Systeme zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Wir können jetzt jedes derartige Fachwerk berechnen und auch die möglichen Ausnahmefälle erkennen. Nun wollen wir die Formen, in denen st. best. Systeme hauptsächlich vorkommen, zusammenstellen, und mit den Hilfsmitteln der Theorie jede dieser Erscheinungsformen hinsichtlich der zweckmäßigsten Berechnung und der möglichen Ausnahmefälle besprechen. Diese Wiederholung wird dem Leser einen gewissen Rückblick über das gesamte Gebiet gewähren.

Nach dem Verlaufe der Stäbe haben wir die Fachwerke in „einfache Dreieckssysteme“ und in „nicht-einfache Systeme“ unterschieden. Ein anderer Gesichtspunkt für die Einteilung ergibt sich, wenn man nicht nur den inneren Aufbau, sondern das Tragwerk als Ganzes, d. h. Fachwerk und Auflager zusammen, betrachtet. Man erkennt dann, daß sich zwei Gruppen von statisch bestimmten Tragwerken ergeben:

I. Systeme, bei denen das Fachwerk an sich schon eine starre Scheibe bildet, die dann zu ihrer Unterstützung auf eine statisch bestimmte Lagerung gesetzt wird.

II. Systeme, bei denen das Fachwerk allein noch keine starre Konstruktion darstellt, sondern erst durch eine genügend hohe Anzahl von Auflagerkräften standfest gemacht wird.

Diese beiden Gruppen wollen wir jetzt genauer betrachten.

I. Statisch bestimmte Scheibe auf statisch bestimmter Lagerung.

Ein solches Tragwerk entsteht folgendermaßen: Die k Knotenpunkte, die zu einem Fachwerke vereint werden sollen, werden zunächst so miteinander verbunden, daß sie sich nicht mehr gegenseitig bewegen können (abgesehen von den kleinen Bewegungen infolge der Elastizität des Materials). Auf diese Weise entsteht aus den k Knotenpunkten eine *„starre Fachwerkscheibe"*. Damit nun diese Scheibe sich auch als Ganzes nicht bewegen kann, muß sie so gelagert werden, daß die Auflagerkräfte imstande sind, die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers zu erfüllen. Augenscheinlich entsteht auf diese Weise eine standsichere Gesamtkonstruktion.

Damit eine solche Konstruktion aber auch nicht statisch unbestimmt wird, müssen Auflagerkräfte und Stabkräfte je eine vorgeschriebene Anzahl von Unbekannten liefern. Zur Lagerung einer starren Scheibe sind *drei* Auflagerunbekannte nötig; denn drei Gleichgewichtsbedingungen müssen an einem Körper erfüllt sein. Insgesamt erfordern die k Knotenpunkte zu ihrer Gleichgewichtshaltung $u = 2k$ Kräfte. Da nun drei Kräfte bereits von den Auflagern geliefert werden, so bleiben für die Stäbe noch $(2k - 3)$ Kräfte zu liefern übrig. Diese Überlegung haben wir ja auch bereits in § 11, Absatz V, durchgeführt. Wir haben bei dieser Gruppe von statisch bestimmten Fachwerken also folgendes Schema:

Auf die Lager entfallen	3	Unbekannte,
„ „ Stäbe „	$(2k - 3)$	„
gesamt	$2k$	Unbekannte.

Diese Verteilung der Unbekannten muß also stets vorhanden sein, wenn durch Verbindung einer einfachen Fachwerkscheibe mit einer Lagerung von drei Unbekannten eine statisch bestimmte Gesamtkonstruktion herauskommen soll.

Im einzelnen ist nun zu den Unbekannten folgendes zu bemerken:

1. Die Auflagerkräfte

werden meistens dadurch geschaffen, daß ein festes und ein beweglisches Lager angeordnet wird. Seltener geschieht die Lagerung durch drei bewegliche Lager oder durch Auflagerstäbe.

Hinsichtlich der **Berechnung** ist zu bemerken, daß die Ermittlung der drei Auflagerunbekannten durch direkte Anwendung der drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik geschieht. (Ausführliches s. Band I, Abschnitt II.) Deshalb nennt man diese Lagerung „*statisch bestimmte Lagerung*". Derartig gelagerte Konstruktionen bezeichnet man wohl auch allgemein als „*äußerlich statisch bestimmt*". Wird insbesondere die Lagerung durch ein festes und ein bewegliches Lager erzielt, so nennt man die Konstruktion einen „einfachen Fachwerkbalken" oder „Fachwerkträger auf zwei Stützen".

Der **Ausnahmefall** (Beweglichkeit) tritt bei statisch bestimmter Lagerung dann auf, wenn die drei Lagerkräfte sich in *einem* Punkte schneiden. Durch diese falsche Anordnung wird die Lagerung beweglich (vgl. § 17, 5. Beispiel). Gleichbedeutend mit dem Schneiden in einem Punkte ist es, wenn die Lagerkräfte sämtlich miteinander parallel sind. Dann liegt nämlich der gemeinsame Schnittpunkt im Unendlichen.

Schließlich sei bei Besprechung der Auflager noch darauf hingewiesen, daß eine Lagerung mit weniger als drei Unbekannten die Gleichgewichtsbedingungen eines Körpers nicht befriedigt. Eine solche Konstruktion ist also beweglich; selbst wenn das Fachwerk an und für sich noch so starr wäre. Nur ausnahmsweise kann ein derartiges Tragwerk bei ganz bestimmter Lastrichtung in einem vorübergehenden, unsicheren Ruhezustand sein. Für die Praxis scheidet diese Lagerung mit nur zwei Auflagerunbekannten aus.

2. Die Scheibe

mit ihren $(2k-3)$ Stäben, die auf solch eine statisch bestimmte Lagerung gesetzt wird, kann auf verschiedene Weise gebildet werden:

a) Durch punktweisen zweistäbigen Anschluß.

Als Beispiel hierfür diene die Scheibe Fig. 1. Diese kann so entstanden gedacht werden: Zunächst werden *zwei* Punkte, *0* und *1*, durch einen Stab (S_1) miteinander verbunden. An diese beiden Punkte wird dann ein dritter Punkt, Punkt *3*, mittels zweier Stäbe (S_2 und S_3) angeschlossen. An das so gebildete Dreieck wird, wieder mittels zweier Stäbe, ein vierter Punkt festgelegt; usw.

Weil bei diesem Aufbau zum Anschlusse eines jeden Punktes mit Ausnahme der beiden ersten je *zwei* Stäbe erforderlich sind, spricht man vom „*zweistäbigen Anschluß*".

Man sieht nun sofort ein, daß dieser Anschluß der Forderung entspricht: Nichts zu viel, nichts zu wenig. Die so entstandene Fachwerkscheibe ist also statisch bestimmt. Zur Sicherheit soll dies auch noch mathematisch nachgewiesen werden: Hat die Scheibe k Knotenpunkte, so ergibt sich, entsprechend dem gezeigten Aufbau der Scheibe, die Anzahl der eingebauten Stäbe aus folgender Zusammenstellung:

Für die ersten	2 Punkte:		1 Stab,
„ „ übrigen $(k-2)$	„ :	$2 \cdot (k-2) = 2k - 4$	Stäbe,
gesamt für die k Punkte:		$(2k-3)$	Stäbe.

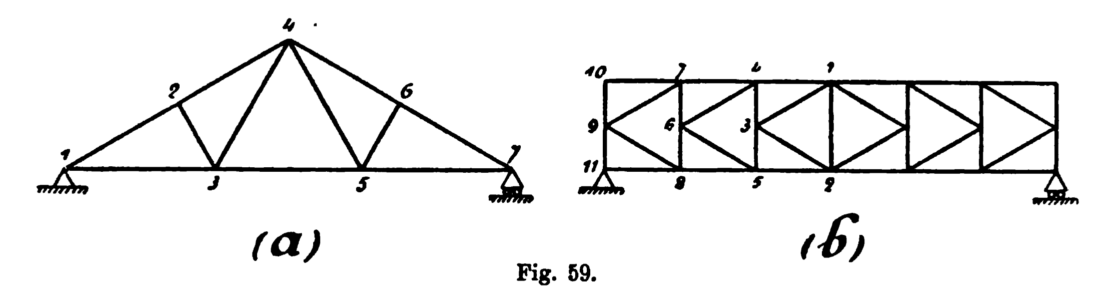


Fig. 59.

Man sieht also, daß ein solches, durch zweistäbigen Anschluß entstandenes Fachwerk tatsächlich die Anzahl von Stäben hat, die statischer Bestimmtheit entspricht.

In Fig. 59a und b sind weitere Beispiele für derartigen zweistäbigen Anschluß gezeichnet. Man kann leicht verfolgen, daß, von zwei Punkten *1* und *2* anfangend, jeder folgende Punkt durch zwei neue Stäbe angeschlossen ist.

Die Berechnung einer durch zweistäbigen Anschluß entstandenen Scheibe ist einfach. Wenn man mit dem zuletzt angeschlossenen Punkte anfängt, so hat man zunächst einen Punkt, an dem nur zwei Stäbe angreifen. Dann verfolgt man den Aufbau des Fachwerkes rückwärts und kommt auf diese Weise von Knotenpunkt zu Knotenpunkt mit immer nur je zwei unbekannten Stäben.

Der Ausnahmefall (bewegliches System) kann bei diesem Aufbau dadurch eintreten, daß die beiden Stäbe, die einen Punkt anschließen sollen, in einer Geraden liegen. Dann liegt ein Fall vor wie bei Fig. 43a.

b) Durch Verbindung zweier Teilscheiben zu einer Gesamtscheibe.

Diese Art des Zusammenschlusses von *k* Knotenpunkten mittels $(2k - 3)$ Stäben zu einer starren Scheibe ist in Fig. 60 dargestellt. Wenn man beispielsweise in Fig. 60a von den Punkten *1* und *2* ausgeht, kommt man mittels zweistäbigen Anschlusses zunächst bis Punkt *8*. Dann hört aber der zweistäbige Anschluß auf. Denn weder Punkt *6'* oder *7'* oder *5'* ist direkt durch zwei Stäbe mit den vorhergehenden Punkten verbunden.

Die Fig. 60a ist vielmehr auf folgende Weise entstanden zu denken. Zunächst sind die beiden Scheiben *1*—*8* (linke Scheibe) und *1'*—*8'* (rechte Scheibe) gebildet. Dann sind diese beiden

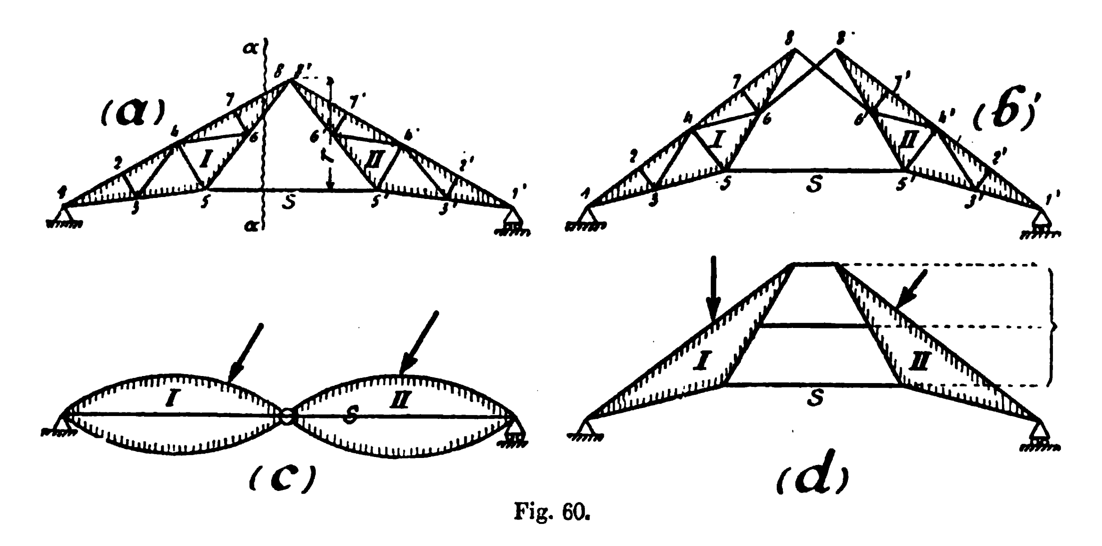


Fig. 60.

Scheiben in einem Punkte zusammengelegt (Punkt *8*, *8'*) und außerdem noch durch einen Stab verbunden (Stab *S*). Man sieht, daß auf diese Weise ein Fachwerk entsteht, das „nichts zu viel, nichts zu wenig“ hat, d. h. das statisch bestimmt ist. Mathematisch ergibt sich dies natürlich auch durch Abzählung der Stäbe und Knotenpunkte. Wir haben also das Resultat:

Zwei statisch bestimmte Scheiben ergeben durch Verbindung mittels eines gemeinsamen Knotenpunktes und eines besonderen Verbindungsstabes wiederum eine statisch bestimmte Scheibe.

Statt des Gelenkes kann man auch zwei Stäbe nehmen (Fig. 60b). Denn, wenn zwei Körper mit einem Gelenk aufeinander wirken, so treten an der Gelenkstelle zwei Unbekannte auf; nämlich Größe

und Richtung des Gelenkdruckes. Dieselbe Anzahl von Unbekannten liefern aber auch zwei Stäbe, so daß die Verbindung mittels zweier Stäbe tatsächlich gleichwertig ist der Verbindung mittels eines Gelenkes. Insgesamt braucht man also bei dieser Art des Zusammenschlusses 2 Stäbe (an Stelle des Gelenkes) + 1 Stab S = 3 Stäbe.

Es möge noch durch direkte Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen gezeigt werden, daß Fig. 60b eine statisch bestimmte Konstruktion ist. Wir haben zwei Scheiben. An jeder Scheibe müssen drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Im ganzen also sechs Gleichgewichtsbedingungen. In diesen sechs Gleichungen, die wir uns hintereinander angeschrieben denken wollen, sind folgende Unbekannte (widerstehende Kräfte): Erstens, die drei Unbekannten, die die Auflager liefern; zweitens, die drei Unbekannten, die die drei Verbindungsstäbe liefern. Also ebensoviel Unbekannte wie Gleichungen; d. h. die Konstruktion ist statisch bestimmt.

Aus dieser Darstellung folgt noch weiter: Selbst wenn die einzelnen Scheiben „innerlich statisch unbestimmt" sind, d. h. zuviel Stäbe haben, können die Auflager und die Verbindungsstäbe immer noch berechnet werden. Denn die Zahl „*6*" der Gleichungen und Unbekannten bleibt ja erhalten. Man hat dann den Fall, daß eine statisch unbestimmte Konstruktion bis zu einem gewissen Punkte berechnet werden kann, und dann fängt die eigentliche statische Unbestimmtheit an. Die beiden Scheiben können auch *vollwandig* sein. Dann würde man erst die Verbindungskräfte berechnen und schließlich jede Scheibe einzeln mit allen angreifenden Kräften vornehmen.

Wiederholend haben wir also an Fig. 60a und b die Regel abgeleitet: *Um zwei statisch bestimmte Teilscheiben zu einer statisch bestimmten Gesamtscheibe zu vereinen, sind drei Verbindungskräfte nötig. Letztere werden geliefert entweder durch ein Gelenk (zwei Unbekannte) und einen Stab oder durch drei Stäbe.*

Da in Fig. 60b zwei Stäbe gemeinsam wie ein Gelenk wirken, bezeichnet man den Schnittpunkt dieser beiden Stäbe als „*imaginäres Gelenk*". In der Tat spielt ein solcher Schnittpunkt auch bei der Berechnung dieselbe Rolle wie ein Gelenk.

Die Berechnung derartiger zusammengesetzter Konstruktionen ist nicht mehr so einfach wie beim zweistäbigen Anschluß. Das Fachwerk Fig. 60a wird meistens so berechnet, daß zunächst der Stab S bestimmt wird, und zwar aus der Momentengleichung für

den obersten Knotenpunkt. Aus dem Schnitte α—α ergibt sich nämlich nach *Ritter*:

$$S = + \frac{M_8}{r}.$$

Sobald dann S bestimmt ist, bietet die weitere Berechnung auch mittels Kräfteplan keine Schwierigkeit. Eine andere Berechnungsmethode wurde in § 19 als Beispiel gezeigt; weitere Methoden sind in § 22 erläutert. In Fig. 60b würde man S dadurch finden, daß man für den Schnittpunkt der Kräfte 6—$8'$ und $6'$—8 die Momentengleichung aufstellt. Man sieht hieraus, daß dieser Schnittpunkt tatsächlich die Rolle des Gelenkes von Fig. 60a spielt. Auch die beiden anderen Verbindungsstäbe in Fig. 60b ergeben sich direkt nach der *Ritter*schen Methode, indem man zwischen die Scheiben einen Schnitt legt und die Momente aufstellt.

Der **Ausnahmefall** würde bei Fig. 60a eintreten, wenn der Stab S durch den Gelenkpunkt geht. Dann wird $r = 0$, folglich $S = \infty$. Dieser Ausnahmefall ist in Fig. 60c dargestellt. Allerdings wird er selten vorkommen. Wohl aber wäre eine solche fehlerhafte Konstruktion nach Art Fig. 60d möglich. Hier geht wegen der Parallelität der Linien der Stab S ebenfalls durch das (imaginäre) Gelenk, nämlich durch den Schnittpunkt der beiden anderen Stäbe. Die Konstruktion wäre also genau so beweglich wie Fig. 60c.

c) Durch Verbindung beliebig vieler Teilscheiben zu einer Gesamtscheibe.

Die Anzahl der erforderlichen verbindenden Kräfte (Gelenkdrücke und einzelne Stäbe) kann man sich wie vorhin auf folgende Weise klarmachen. Da jede Scheibe im Ruhezustand sein soll, müssen an jeder Scheibe drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Sind insgesamt n Scheiben vorhanden, so stellt sich also die Gleichgewichtsforderung des ganzen Systems in Form von $3n$ Gleichungen dar. Daraus folgt, daß im ganzen $3n$ stützende Kräfte auf die Scheiben wirken müssen. Nun werden bei der angenommenen statisch bestimmten Lagerung von den Auflagern geliefert drei Kräfte. Es müssen also noch auf andere Weise geliefert werden: $3n - 3 = 3(n-1)$ Kräfte.

Diese Kräfte können durch Stäbe oder durch Gelenke geliefert werden. Ein Stab zählt als *eine* Unbekannte. Ein Gelenk zählt als mehrere Unbekannte. Stoßen nämlich in einem Gelenk x Scheiben zusammen (Fig. 61a), so ist für jede Scheibe unbekannt Größe und Richtung des Gelenkdruckes. Eigentlich sind also bei solch einem Gelenk $2x$ Unbekannte. Nun ergibt sich aber stets

der Gelenkdruck auf eine von diesen x Scheiben als die Resultierende der Drücke der anderen Scheiben. Diese eine Scheibe (die beliebig aus der Gruppe ausgewählt werden kann) darf also nicht mehr zu den Unbekannten gerechnet werden, da ja ihre Beanspruchung bereits durch die anderen Drücke mitbestimmt ist. Es bleiben also bei einem Gelenk mit insgesamt x Scheiben nur $(x-1)$ Scheiben übrig, für die der von dem Gelenke ausgehende Druck unbekannt ist. Jeder Druck enthält 2 Unbekannte (Größe und Richtung). Im ganzen weist also ein solches Gelenk von x Scheiben $2(x-1)$ Unbekannte auf.

Beispielsweise zählt ein Gelenk, an dem zwei Scheiben zusammenstoßen, $2(2-1)=2$ Unbekannte, wie wir ja auch schon vorhin bei Fig. 60a gesehen haben.

Häufig sind bei solchen Scheibenverbindungen außer den Scheiben auch einzelne Knotenpunkte vorhanden, die getrennt von den eigentlichen Scheiben liegen (z. B. Punkt *2* in Fig. 61e). Ist die Anzahl dieser isoliert liegenden Knotenpunkte k, so kommen noch $2k$ Gleichgewichtsbedingungen, also auch $2k$ neue erforderliche Unbekannte, hinzu. Insgesamt haben wir also die Zusammenstellung:

Um n Scheiben und k einzelne Knotenpunkte zu einer statisch bestimmten Gesamtscheibe zusammenzuschließen, sind $3n+2k$ stützende Kräfte erforderlich. Da nun bei statisch bestimmter Lagerung drei Kräfte durch die Auflager geliefert werden, so bleiben

$$(3n+2k-3)=[3(n-1)+2k]$$

erforderliche verbindende Kräfte.

Diese $3(n-1)+2k$ Kräfte müssen also von den verbindenden Stäben und Gelenken geliefert werden. Und zwar liefert ein Stab eine Unbekannte. Ein Gelenk liefert 2, 4, 6 usw. Unbekannte, je nachdem an diesem Gelenke 2, 3, 4 usw. Scheiben zusammenstoßen. Allgemein liefert ein Gelenk von x Scheiben $2(x-1)$ Kräfte für die Gleichgewichtsbedingungen.

In Fig. 61 sind einige Fälle von Scheibenverbindungen gezeichnet. Fig. 61b zeigt $n=3$ Scheiben. Zur Verbindung sind erforderlich $3(n-1)=3(3-1)=6$ Verbindungsunbekannte. Diese sind tatsächlich vorhanden in Gestalt von drei Gelenken, in denen je zwei Scheiben zusammenstoßen. In Fig. 61c sind ebenfalls drei Scheiben angenommen. Die sechs erforderlichen Verbindungskräfte sind jetzt aber durch sechs Stäbe geschaffen (S_3 und S_4 gehen an der Kreuzungsstelle glatt aneinander vorbei). Man sieht auch hier, daß je zwei Stäbe wie ein Gelenk wirken. Der Kreuzungs-

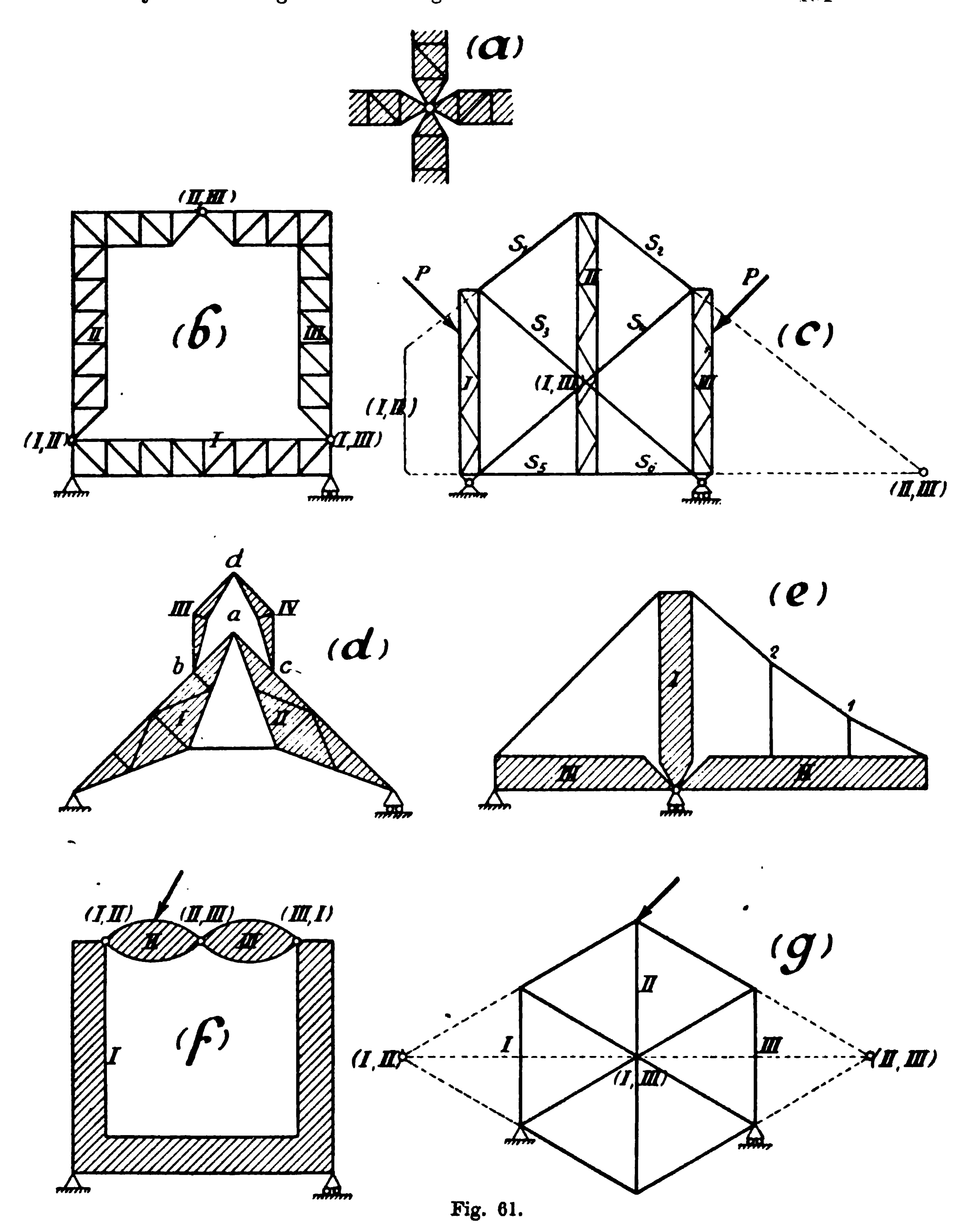


Fig. 61.

punkt von S_3 und S_4 stellt das imaginäre Gelenk zwischen den Scheiben *I* und *III* dar, der Schnittpunkt von S_2 und S_6 das Gelenk zwischen *II* und *III*, und der Schnittpunkt von S_1 und S_5 das Gelenk (*III*). Eine Verbindung von vier Scheiben zeigt Fig. 61d. Hier sind somit an verbindenden Kräften erforderlich $3(4-1)=9$. Vorhanden sind vier Gelenke $a \ldots d$ (in denen je zwei Scheiben zusammenstoßen) und eine Stabkraft $= 4 \cdot 2 + 1 = 9$; also ausreichend.

Eine Verbindung von Scheiben mit einzelnen Knotenpunkten zeigt Fig. 61e. Hier sind drei Scheiben und zwei Knotenpunkte. Also erforderlich $3(3-1)+2 \cdot 2 = 10$ Unbekannte. Diese werden geliefert durch ein Gelenk, an dem drei Scheiben zusammenstoßen, und durch 6 Stäbe: $2(3-1)+6=10$. Hierbei sei darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn ein einzelner Knotenpunkt als Auflagerpunkt genommen wird, er natürlich genau so wie ein anderer Punkt mitzuzählen ist.

Die Berechnung derartiger Scheibenverbindungen geschieht häufig zweckmäßig in der Weise, daß man zunächst die in den Gelenken und Verbindungsstäben wirkenden Kräfte ermittelt. Es handelt sich ja um Fachwerke, deren einzelne Glieder durch Scheiben gebildet werden. Wie in den letzten Paragraphen gezeigt wurde, verteilt man die Belastung dieser Scheiben auf die angrenzenden Knotenpunkte und kann dann die Scheiben als einfache Stäbe einführen. Auf diese Weise wird solch ein Scheibenfachwerk in ein einfaches Stabfachwerk verwandelt. Übrigens erleichtert diese Umwandlung auch die Entscheidung hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

In manchen Fällen kann man die Gelenkdrücke auch sofort angeben. Beispielsweise in Fig. 61d lassen sich die Drücke in b und c leicht angeben, indem man die obere Scheibenverbindung betrachtet. (Näheres s. „Dreigelenkbogen", Abschnitt IV dieses Buches.) Dann bleibt nur noch der untere, einfache Teil zu berechnen.

Bei solchen Scheibenverbindungen kommt es häufig vor, daß einige der Scheiben vollwandig sind. Die Berechnung wird aber hierdurch nicht aufgehalten. Denn die Zwischenlast dieser Scheiben wird einfach auf die anliegenden Knotenpunkte verteilt, die Scheiben selbst zunächst als einfache Stäbe behandelt und nachher mit allen angreifenden Kräften besonders betrachtet (§ 18).

Wenn derartige Konstruktionen aus vielen Scheiben unregelmäßig zusammengesetzt sind, kann die Berechnung natürlich recht

umständlich werden. In der Praxis kommen solche Fälle ja selten vor. Doch sei daran erinnert, daß wir mittels der Ersatzstabmethode jede Konstruktion so umgestalten können, daß sie der Berechnung zugänglich wird.

Ausnahmefälle kommen häufig vor. Bei einer Verbindung von drei Scheiben mittels dreier Gelenke dann, wenn die drei Gelenke in einer Geraden liegen. Dieser Fall von augenscheinlicher Beweglichkeit ist in Fig. 61f dargestellt. Bei der angenommenen Belastung sind die oberen Scheiben nicht im Gleichgewicht zu halten, sondern es liegt (begrenzte) Beweglichkeit vor. Nicht so augenscheinlich, aber in derselben Weise zu erklären ist die Beweglichkeit der Fig. 61g. Die Scheiben (die hier in einfache Stäbe übergegangen sind) sind wiederum mit *I*, *II*, *III* bezeichnet. Die Gelenke sind ebenfalls entsprechend Fig. 61f genannt. Sie sind jetzt zwar imaginäre Gelenke, da an Stelle eines wahren Gelenkes je zwei Verbindungsstäbe getreten sind. Hinsichtlich seiner statischen Wirkung ist es aber gleichgültig, ob ein Gelenk reell oder imaginär ist. Wir sehen somit, daß das System Fig. 61g eine Verbindung von drei Scheiben darstellt, deren Gelenke in einer Geraden liegen. Es ist also genau so beweglich, wie Fig. 61f. Durch diese Betrachtung des Sechseckes als Kombination dreier Scheiben mit sechs Verbindungsstäben bzw. drei imaginären Gelenken haben wir eine interessante andere Ableitung des bereits in § 17, 6. Beispiel, gefundenen Satzes erhalten: Ein Sechseck ist dann beweglich, wenn die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Ober- und Untergurtseiten und der Schnittpunkt der Diagonalen in einer Geraden liegen.

Mit dieser Betrachtung wollen wir die Untersuchung über starre Scheiben abschließen.

II. Innerlich bewegliche Scheibe auf statisch überbestimmter Lagerung.

Die zweite Gruppe von statisch bestimmten Systemen umfaßt solche, bei denen das eigentliche Fachwerk in sich noch beweglich ist. Als Beispiel diene Fig. 62a. Der linke und der rechte Teil dieses Fachwerkes können sich, wenn man von den Auflagern absieht, gegeneinander bewegen, da der mittelste Knotenpunkt als Gelenk wirkt. Dadurch aber, daß vier Auflagerunbekannte vorhanden sind, erfüllt die ganze Konstruktion trotzdem die Bedingung $u = 2k$ der statischen Bestimmtheit.

Bei dieser Gruppe von statisch bestimmten Konstruktionen ge-

schieht die Verteilung der $u = 2k$ Unbekannten also nach folgendem Schema:

Auf die Lager entfallen mehr	als	3 Unbekannte,
„ „ Stäbe „ weniger	„	$(2k - 3)$ „
	gesamt	$2k$ Unbekannte.

Für jede Auflagerunbekannte, die über die Zahl 3 hinausgeht, muß also eine Stabkraft bzw. eine verbindende Kraft (falls mehrere Scheiben verbunden sind) fehlen. Und umgekehrt muß für jede Bewegungsmöglichkeit des eigentlichen Fachwerkes eine Auflagerkraft mehr hinzukommen. Man kann auch so sagen: Für jedes Mal, daß die Scheibe weniger als starr ist, muß eine Auflagerunbekannte hinzukommen. Was die Scheibe zu wenig hat, müssen die Auflager um so mehr haben.

Die wichtigsten Beispiele für diese Konstruktionen sind der *Dreigelenkbogen* und der *Gerbersche Träger* (Fig. 62a und b). Der erstere hat zwei feste Lager, also vier Auflagerunbekannte. Dafür fehlt aber der Scheibe ein Stab zur Starrheit. Was die Auflager zu viel haben, hat also die Scheibe zu wenig, so daß die Konstruktion als Ganzes statisch bestimmt geblieben ist. Beim *Gerber*träger haben wir fünf Auflagerunbekannte. Dafür sind zwei Gelenke, so daß die Konstruktion zwei Bewegungen ausführen kann. Die Anzahl der Lagerkräfte übertrifft also eine statisch bestimmte Lagerung um ebensoviel, wie Stabkräfte zur Starrheit der Scheibe fehlen. Das Mehr an den Auflagern ist ausgeglichen durch ein Weniger an Stäben, so daß die Gesamtheit die Bedingung $u = 2k$ erfüllt.

Die Berechnung beim Dreigelenkbogen geschieht in der Weise, daß man zunächst die gewöhnlichen drei Auflagerbedingungen aufstellt. Ferner hat man die Bedingung, daß die Momentensumme für das Mittelgelenk gleich Null ist. Hierdurch erhält man vier Gleichungen zur Berechnung von vier Auflagerunbekannten. Die weitere Berechnung der Scheiben ist dann ohne Schwierigkeiten (Näheres s. Abschnitt IV dieses Buches). Beim *Gerber*träger geht man bekanntlich so vor, daß zunächst die eingehängten Träger berechnet und dann deren Auflagerdrücke als äußere Lasten für den mittleren Träger eingeführt werden (s. Band I, 12. Vortrag; Band II, Abschnitt III). Bei komplizierten Tragwerken kann man auch so vorgehen, daß man mittels der Ersatzstabmethode so viel Auflagerkräfte als Störungskräfte entfernt und dafür innere Kräfte anbringt, daß schließlich ein System mit statisch bestimmter Lagerung zu behandeln ist.

Ein **Ausnahmefall** tritt beim Dreigelenkbogen dann ein, wenn das Mittelgelenk in der Verbindungslinie der beiden Seitengelenke liegt. Beim *Gerber*träger ist ein Ausnahmefall möglich, wenn man etwa statt der reellen Gelenke durch Anordnung von zwei Gelenkstäben imaginäre Gelenke schafft, und zufällig die drei Stützkräfte eines eingehängten Teiles durch ein und denselben Punkt gehen (Fig. 62c). In anderen Fällen lassen sich die Ausnahmefälle nicht von vornherein angeben, sondern müssen im Laufe der Rechnung als solche erkannt werden.

Zusammenfassung.

Die statisch bestimmten Tragwerke haben wir in die beiden Gruppen eingeteilt:

I. Solche, bei denen eine starre Scheibe auf eine statisch bestimmte Lagerung gesetzt ist,

II. solche, bei denen das Fachwerk an sich noch beweglich ist.

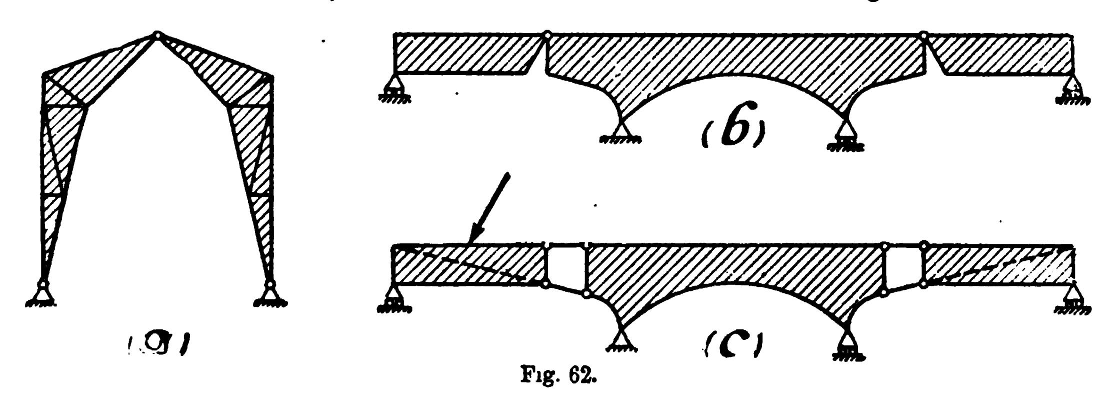


Fig. 62.

Zu der Gruppe I ist zu bemerken:

Die Anzahl der Auflagerunbekannten ist *stets* 3; die Anzahl der Stäbe ist *stets* $(2k - 3)$. Die Verbindung dieser $(2k - 3)$ Stäbe zu einer starren Scheibe kann geschehen:

a) durch zweistäbigen Anschluß,

b) durch Verbindung von Teilscheiben untereinander.

Im letzteren Falle sind, falls die Gesamtkonstruktion aus n Scheiben und k isolierten Knotenpunkten besteht, insgesamt an Unbekannten erforderlich $3n + 2k$. Da die Auflager drei Unbekannte liefern, so bleiben von den Verbindungskräften noch übrig zu liefern:

$$3(n-1) + 2k\,.$$

Bei der Aufzählung derselben ist ein Stab als *eine* Unbekannte, ein Gelenk als 2, 4, 6 usw. Unbekannte zu nehmen, je nachdem an diesen Gelenken 2, 3, 4 usw. Scheiben zusammenstoßen. Allgemein, bei x Scheiben, also $2(x-1)$ Unbekannte.

Gruppe II. Hier sind mehr als drei Auflagerunbekannte und dafür weniger als $(2k-3)$ Stäbe vorhanden. Und zwar besteht folgende Wechselbeziehung: Für jede Kraft, die als Auflagerkraft hinzugekommen ist, kann eine Kraft im Innern des Fachwerkes fehlen. Hat eine solche Konstruktion n Scheiben und k einzelne Knotenpunkte, so müssen zur Erhaltung des Gleichgewichts eines jeden Teiles im ganzen (d. h. *einschließlich* der Auflagerkräfte) natürlich wieder vorhanden sein: $3n + 2k$ Stütz- und Verbindungskräfte.

Sowohl bei Gruppe I wie bei II gibt es eine Anzahl von Ausnahmefällen, die wir vorhin genauer untersucht haben.

III. Einiges über statisch unbestimmte Systeme.

Nach dem Vorhergehenden ist es leicht, einzusehen, wie statisch unbestimmte Konstruktionen entstehen können. Augenscheinlich wird sich da folgende Einteilung ergeben:

I. Eine statisch bestimmte Scheibe [mit gerade $(2k-3)$ Stäben] wird auf eine Lagerung gesetzt, die *mehr* als drei Unbekannte hat. (Beispiel: Träger auf vier Stützen, Fig. 63a; Bogen mit zwei Kämpfergelenken, Fig. 63b.) Der Träger ist innerlich statisch bestimmt, da er gerade so viel Stäbe hat, wie zum Zusammenhalt der k Knotenpunkte erforderlich sind. Äußerlich ist er statisch unbestimmt, da er mehr Auflagerkräfte hat, als erforderlich sind. Deshalb fängt die Schwierigkeit der Berechnung schon bei den Auflagern an. Man nennt solche Systeme „*äußerlich statisch unbestimmt*".

II. Eine statisch unbestimmte Fachwerkscheibe wird auf eine statisch bestimmte Lagerung gesetzt. Das Fachwerk hat mehr als $(2k-3)$ Stäbe, ist also innerlich überstarr. Die Lagerung dagegen ist statisch bestimmt. (Beispiel: Der „Zweigelenkbogen mit Zugband", Fig. 63c; biegungsfester Balken, der außerdem noch durch Hängekonstruktion verstärkt ist, Fig. 63d). Die Auflager lassen sich mit den Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Häufig auch ein Teil der Stäbe. (In Fig. 63c die ersten vier Stäbe an jedem Auflager.) Dann aber fängt die statische Unbestimmtheit an, und man kommt mit den Gleichgewichts-

bedingungen allein nicht weiter. Man nennt die Konstruktion „*innerlich statisch unbestimmt*".

III. Eine bereits innerlich statisch unbestimmte Scheibe wird auf eine Lagerung gesetzt, die auch noch statisch unbestimmt ist. (Beispiel: Zweigelenkbogen mit festen Kämpfern und Zugstange.) „*Innerlich und äußerlich statisch unbestimmt.*"

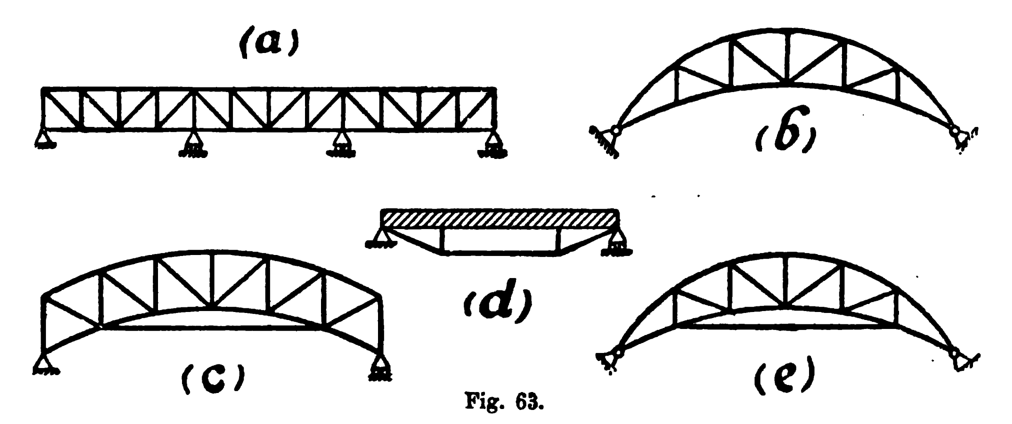


Fig. 63.

Je nachdem man ein, zwei usw. Kräfte entfernen müßte, um die Konstruktion statisch bestimmt zu machen, nennt man sie „einfach", „zweifach" usw. statisch unbestimmt.

§ 21.

Allgemeine Wiederholung des 2. Vortrages.

In diesem Vortrage haben wir die allgemeine Theorie der Fachwerke durchgenommen. Die Untersuchungen bezogen sich hauptsächlich: I. auf die Einteilung der Fachwerke, II. auf ihre Berechnung, III. auf die möglichen Ausnahmefälle.

I. Einteilung (§ 11—12).

Die Gleichgewichtsforderung eines Fachwerkes mit k Knotenpunkten stellt sich mathematisch in Gestalt von $2k$ Gleichungen 1ten Grades dar. Bezeichnet u die gesamte Anzahl der widerstehenden Kräfte (Auflager- und innere Kräfte), so sind die drei Fälle möglich

1) $u = 2k$: Statisch bestimmt;

2) $u > 2k$: Statisch unbestimmt;

3) $u < 2k$: Bewegliche, unbrauchbare Konstruktion.

Nur die ersteren Systeme interessieren uns an dieser Stelle.

II. Berechnung (§ 13—15).

Die allgemeine Methode — Aufstellung der $2k$ analytischen Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Punkte — muß stets zum Ziele führen, ist aber sehr umständlich. Für die Praxis kommen in Betracht die Methoden von *Cremona*, *Ritter* und *Culmann*. Schwierige Systeme müssen jedoch erst durch die *Ersatzstabmethode* den obigen Verfahren zugänglich gemacht werden.

III. Ausnahmefälle (§ 16—17).

Nicht alle statisch bestimmten Konstruktionen sind indessen starr. Es gibt auch Ausnahmefälle (bewegliche Systeme). Das mathematische Kennzeichen hierfür besteht darin, daß die Gleichungen, auf die sich die Berechnung eines jeden Systems reduziert, für die Unbekannten keine endlichen Werte liefern (Nennerdeterminante = 0). Diese Gleichungen können nach irgendeiner analytischen Methode aufgestellt werden. (Direkte Anschreibung der Gleichgewichtsbedingungen einzelner Punkte oder Fachwerkteile, nach *Ritter*, in schwierigen Fällen am besten mittels Ersatzstabmethode.) Geht irgendeine (analytische oder graphische) Berechnungsmethode glatt zu Ende, d. h. liefert sie für alle Kräfte bestimmte endliche Werte, so ist dies eine nachträgliche Bestätigung dafür, daß das System nicht beweglich ist.

IV. Besondere Untersuchungen.

Besondere Besprechung bedurften noch Konstruktionen, bei denen die Lasten außerhalb der Knotenpunkte wirken, und solche, bei denen einzelne Glieder als größere, zusammengesetzte Scheiben ausgebildet sind. Beide Gruppen lassen sich nach gemeinsamen Gesichtspunkten in einfache Stabverbindungen mit Belastung nur in den Knotenpunkten überführen. Die allgemein in § 20 vorgenommene Zusammenstellung schließlich gibt einen Überblick über den verschiedenartigen Aufbau der Fachwerke, vom einfachen zweistäbigen Anschlusse bis zur komplizierten Scheibenverbindung.

§ 22.

Sammlung von Aufgaben zu Abschnitt I.

Im folgenden ist eine Reihe von Aufgaben, wie sie in der Praxis vorkommen, zusammengestellt und manche Bemerkungen hinsichtlich der Berechnung angeknüpft. Dem Leser werde empfohlen, die Lösung selbständig zu versuchen, und namentlich bei den einzelnen Aufgaben außer dem gewählten Rechnungsgang auch die anderen Methoden zur Anwendung zu bringen.

Erste Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 64 ist zu berechnen.

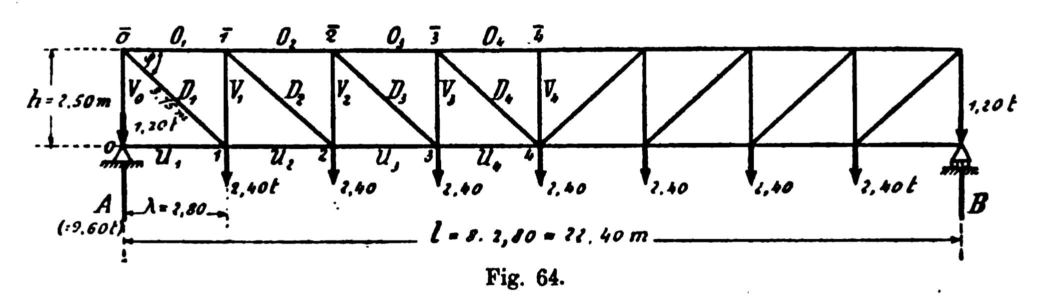


Fig. 64.

Tabelle I.

Kraft-summen Q (t)	Feld-weiten λ (m)	Mo-mente M (mt)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D = +Q\frac{1}{\sin\varphi}$	Vertikalen $V = -Q$ (t)
$A =$ 9,60					$\left[\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{3,75}{2,50} = 1,50\right]$	
(1,20)		$M_0 = 0,00$		$U_1 =$ 0,00		
$Q_{0-1} = +8,40$	2,80	(+23,52)			$D_1 = +8,40 \cdot 1,50 = +12,60$	$V_0 = -8,40$
(2,40)		$M_1 = 23,52$	$O_1 = -\frac{23,52}{2,50} = -9,41$	$U_2 = +\frac{23,52}{2,50} = +9,41$		
$Q_{1-2} = +6,00$	2,80	(+16,80)			$D_2 = +6,00 \cdot 1,50 = +9,00$	$V_1 = -6,00$
(2,40)		$M_2 = 40,32$	$O_2 = -\frac{40,32}{2,50} = -16,13$	$U_3 = +\frac{40,32}{2,50} = +16,13$		
$Q_{2-3} = +3,60$	2,80	(+10,08)			$D_3 = +3,60 \cdot 1,50 = +5,40$	$V_2 = -3,60$
(2,40)		$M_3 = 50,40$	$O_3 = -\frac{50,40}{2,50} = -20,16$	$U_4 = +\frac{50,40}{2,50} = +20,16$		
$Q_{3-4} = +1,20$	2,80	(+3,36)			$D_4 = +1,20 \cdot 1,50 = +1,80$	$V_3 = -1,20$
		$M_4 = 53,76$	$O_4 = -\frac{53,76}{2,50} = -21,50$			$[V_4 = 0,0]$

[Zur Kontrolle: $M_4 = 2,40\left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right)2,80 = 53,76$]

Zusatz: *Abgeänderte Berechnung der Momente.*

Bei der Ermittlung der Momente M geht man bei gleichen Feldweiten λ bisweilen noch etwas anders vor. Man berechnet dann nämlich nicht direkt die Werte M, sondern Hilfswerte $\frac{M}{\lambda}$. Deren Ausrechnung ergibt sich durch folgendes Schema:

$$M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda\,; \quad \text{folglich} \quad \frac{M_1}{\lambda} = \frac{M_0}{\lambda} + Q_{0-1} = Q_{0-1}\,,$$

$$M_2 = M_1 + Q_{1-2} \cdot \lambda\,; \quad ,, \quad \frac{M_2}{\lambda} = \frac{M_1}{\lambda} + Q_{1-2} = Q_{0-1} + Q_{1-2}\,,$$

$$M_3 = M_2 + Q_{2-3} \cdot \lambda\,; \quad ,, \quad \frac{M_3}{\lambda} = \frac{M_2}{\lambda} + Q_{2-3} = Q_{0-1} + Q_{1-2} + Q_{2-3}\,.$$

usw.

Für einen Knotenpunkt m ist also der betreffende Wert

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\frac{M_m}{\lambda} = Q_{0-1} + Q_{1-2} + Q_{2-3} + \dots + Q_{(m-1)-m}\,.}$$

In Worten: *Der Quotient „Moment : Feldweite" für irgendeinen Knotenpunkt ist gleich der Summe aller Kraftsummen vom Trägerende bis zu dem betreffenden Knotenpunkt.*

Sobald dann dieser Hilfswert ausgerechnet ist, multipliziert man ihn mit λ und hat dann das gesuchte Moment. Auf diese Weise erreicht man bei der Berechnung der Momente wohl eine kleine Vereinfachung gegen früher.

Die Formel (I) gilt aber, wie die obige Entwicklung zeigt, nur dann, wenn alle Felder dieselbe Länge λ haben. Bisweilen kommt der Fall vor, daß das erste Feld eine besondere Feldweite λ_1 hat, während die anderen Felder alle dieselben Weiten λ haben. Für diesen Fall läßt sich das obere Schema in einiger Umformung auch noch verwenden:

$$M_1 = 0 + Q_{0-1} \cdot \lambda_1\,; \quad \text{folglich} \quad \frac{M_1}{\lambda} = 0 + Q_{0-1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} = Q_{0-1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda}\,,$$

$$M_2 = M_1 + Q_{1-2} \cdot \lambda\,; \quad ,, \quad \frac{M_2}{\lambda} = \frac{M_1}{\lambda} + Q_{1-2} = Q_{0-1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} + Q_{1-2}\,,$$

$$M_3 = M_2 + Q_{2-3} \cdot \lambda\,; \quad ,, \quad \frac{M_3}{\lambda} = \quad \dots \quad = Q_{0-1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} + Q_{1-2} + Q_{2-3}\,.$$

Allgemein also für diesen Fall (mit anormaler erster Feldweite):

$$\text{(Ia)} \qquad \boxed{\frac{M_m}{\lambda} = Q_{0-1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} + Q_{1-2} + Q_{2-3} + \dots + Q_{(m-1)-m}\,.}$$

Falls mehrere Feldweiten verschieden sind, hat diese Berechnung aber keinen Zweck mehr. Dann berechnet man stets direkt die Momente M wie in Tabelle I.

Um nun aus den Hilfswerten $\frac{M}{\lambda}$ die Gurtsäbe zu bestimmen, müssen jene mit λ multipliziert werden, um die Momente M zu erhalten; und dann durch h dividiert werden, um aus M die Gurtkräfte zu erhalten. Diese Multiplikation mit λ und Division durch h wird man natürlich zweckmäßig auf einmal vornehmen, indem man mit dem Faktor $\frac{\lambda}{h}$ multipliziert; gemäß dem Schema:

$$\text{(II)} \qquad O(U) = \frac{M}{h} = \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{h}.$$

In der folgenden Tabelle II ist die Berechnung auf diese Weise durchgeführt: Aus den Kraftsummen Q sind durch aufeinanderfolgende Addition zunächst die Hilfswerte $\frac{M}{\lambda}$ bestimmt. Aus diesen dann durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{\lambda}{h}$ die Gurtstäbe. Schließlich die Füllungsstäbe in gewöhnlicher Weise aus den Werten Q. Bei Parallelträgern mit gleichen Feldweiten spart man auf diese Weise gegenüber der Tabelle I etwas an Schreibarbeit.

Tabelle II.

Querkräfte Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	Gurtstäbe (t) $U,\ O = \pm \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{h} = \pm \frac{M}{\lambda}\,1{,}12$	Diagonalen (t) $D = Q \cdot \frac{1}{\sin\varphi} = Q \cdot 1{,}50$	Vertikalen (t) $V = -Q$
$[A = 9{,}60]$	$\frac{M_0}{\lambda} = 0{,}00$	$U_1 = 0{,}0$		$[V_4 = 0{,}0]$
$Q_{0-1} = +8{,}40$	$\frac{M_1}{\lambda} = 8{,}40$	$U_2,\ O_1 = \pm\ 8{,}40 \cdot 1{,}12 = \pm 9{,}41$	$D_1 = +8{,}40 \cdot 1{,}50 = +12{,}60$	$V_0 = -8{,}40$
$Q_{1-2} = +6{,}00$	$\frac{M_2}{\lambda} = 14{,}40$	$U_3,\ O_2 = \pm 14{,}40 \cdot 1{,}12 = \pm 16{,}13$	$D_2 = +6{,}00 \cdot 1{,}50 = +9{,}00$	$V_1 = -6{,}00$
$Q_{2-3} = +3{,}60$	$\frac{M_3}{\lambda} = 18{,}00$	$U_4,\ O_3 = \pm 18{,}00 \cdot 1{,}12 = \pm 20{,}16$	$D_3 = +3{,}60 \cdot 1{,}50 = +5{,}40$	$V_2 = -3{,}60$
$Q_{3-4} = +1{,}20$	$\frac{M_4}{\lambda} = 19{,}20$	$O_4 = -19{,}20 \cdot 1{,}12 = -21{,}50$	$D_4 = +1{,}20 \cdot 1{,}50 = +1{,}80$	$V_3 = -1{,}20$

Übungsaufgabe: Man berechne das System für dieselbe Belastung, aber am Obergurte wirkend.

Zweite Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 65 mit abwechselnd geneigten Diagonalen ist zu berechnen!

Nach der in der vorigen Aufgabe erläuterten Methode mit den Hilfswerten $M : \lambda$ ist die Berechnung in der folgenden Tabelle durchgeführt:

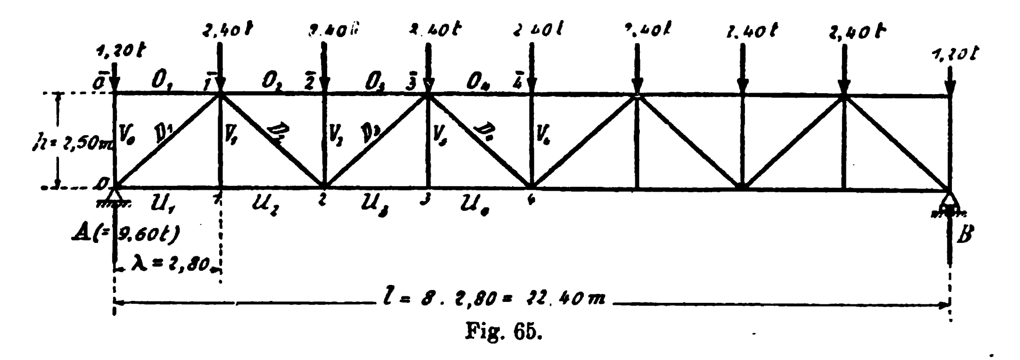


Fig. 65.

Querkräfte Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	Gurtstäbe (t) $O,\ U = \mp \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{h} = \mp \frac{M}{\lambda} \cdot 1{,}12$	Diagonalen (t) $D = \pm Q \frac{1}{\sin \varphi} = \pm Q \cdot 1{,}50$	Vertikalen
$[A = 9{,}60]$	$\frac{M_0}{\lambda} = 0{,}00$	$O_1 = 0{,}0$		
$Q_{0-1} = +8{,}40$	$\frac{M_1}{\lambda} = 8{,}40$	$U_1,\ U_2 = +\ 8{,}40 \cdot 1{,}12 = +9{,}41$	$D_1 = -8{,}40 \cdot 1{,}50 = -12{,}60$	$V_0 = -1{,}20$
$Q_{1-2} = +6{,}00$	$\frac{M_2}{\lambda} = 14{,}40$	$O_2,\ O_3 = -14{,}40 \cdot 1{,}12 = -16{,}13$	$D_2 = +6{,}00 \cdot 1{,}50 = +9{,}00$	$V_1,\ V_2 = 0{,}00$
$Q_{2-3} = +3{,}60$	$\frac{M_3}{\lambda} = 18{,}00$	$U_3,\ U_4 = +18{,}00 \cdot 1{,}12 = +20{,}16$	$D_3 = -3{,}60 \cdot 1{,}50 = -5{,}40$	$V_3,\ V_4 = -2{,}40$
$Q_{3-4} = +1{,}20$	$\frac{M_4}{\lambda} = 19{,}20$	$O_4 = -19{,}20 \cdot 1{,}12 = -21{,}50$	$D_4 = +1{,}20 \cdot 1{,}50 = +1{,}80$	

Übungsaufgabe: Man berechne das System für Belastung am Untergurt.

Dritte Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 66 ist zu berechnen!

Dieses sog. „k-förmige System" findet namentlich bei Windverbänden vielfach Verwendung. Wenn man von der mittleren Vertikalen ausgeht, erkennt man, daß es durch zweistäbigen Anschluß aufgebaut ist. Allerdings sind die Stäbe nicht im einfachen Dreieckverband angeordnet, sondern es kommen auch Polygone mit vier Knotenpunkten vor (Polygon *2—3—5—4* usw.). Immerhin ist infolge des zweistäbigen Anschlusses die Berechnung einfach.

1. Um einen **Kräfteplan** zu zeichnen, fängt man bei Punkt *0* an und geht die Knotenpunkte in der Reihenfolge *0—1—2* usw. durch. Am mittelsten Knotenpunkte erscheinen allerdings drei unbekannte Kräfte. Da kann man sich helfen, indem man von der rechten Seite anfängt, die Kraft U_5 bestimmt und schließlich auch die mittelste Vertikale, als den letzten unbekannten Stab,

findet. (Bei symmetrischer Belastung und Anordnung ist natürlich $U_5 = U_4$.) Auf die sich aus dem Kräfteplan ergebenden Vorzeichen der Stäbe sei besonders hingewiesen (Fig. 66a, rechte Seite).

2. Die **Rittersche Methode** erfordert einige Überlegung.

a) Um den Gurtstab O_m zu berechnen, würde man zunächst den Schnitt α—α legen. Dieser Schnitt trifft aber im ganzen

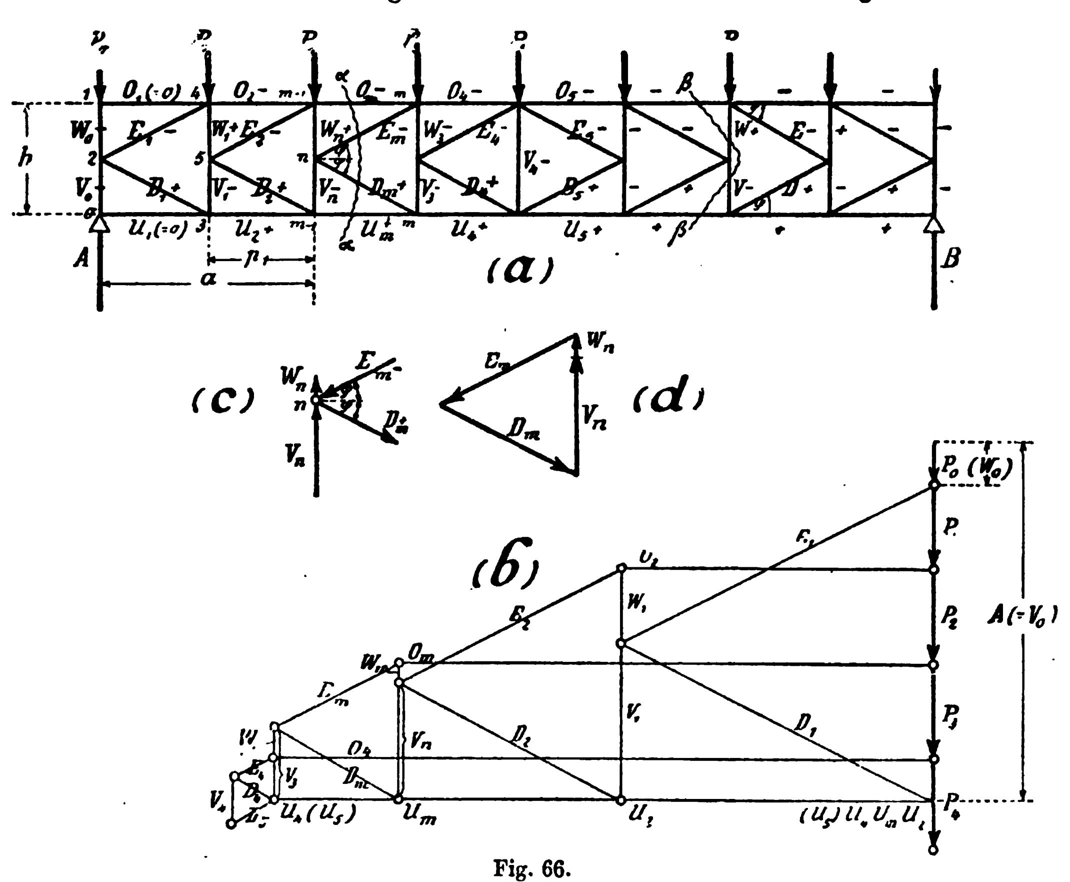


Fig. 66.

vier unbekannte Stäbe. Es läßt sich also anscheinend keine Momentengleichung derart aufstellen, daß die anderen vom Schnitte getroffenen Stäbe herausfallen und nur der gesuchte Stab O_m als einzige Unbekannte übrigbleibt. Wenn man aber den mittleren Punkt n mit seinen vier Kräften betrachtet, so ergeben sich gewisse Beziehungen, die sich bei der Berechnung verwerten lassen. Aus dem Gleichgewicht des Punktes n (Fig. 66c) folgt nämlich, daß die Resultierende der beiden Diagonalkräfte D_m und E_m stets in der Linie der Vertikalkräfte V_n und W_n liegen muß. Denn

die Diagonalkräfte müssen an diesem Punkte den Vertikalkräften das Gleichgewicht halten. Da nun die Resultierende der letzteren in der Vertikallinie durch den Punkt n geht (Fig. 66c), so muß es auch die Resultierende der Diagonalkräfte tun. Noch deutlicher vielleicht ist übrigens aus dem zu dem Knoten n gezeichneten Kräftepolygon (Fig. 66d) zu erkennen, daß die Resultierende von D_m und E_m vertikal geht. Und zwar natürlich durch den Punkt n, da dies ja der Schnittpunkt von D_m und E_m ist.

Diese Erkenntnis ermöglicht uns nun die einfache Berechnung des Stabes O_m: Wir legen den Schnitt und stellen von sämtlichen angreifenden Kräften die Momentengleichung in bezug auf den Knotenpunkt $m-1$ auf. Denn wie soeben gezeigt wurde, geht die Resultierende von D_m und E_m durch diesen Punkt hindurch. Sie ergibt also kein Moment, und folglich ergeben auch die Kräfte D_m und E_m zusammengenommen kein Moment für diesen Punkt. Da auch die Kraft U kein Moment ergibt, so ist bei dieser Wahl des Bezugspunktes tatsächlich erreicht, daß von den vier Stabkräften nur die eine gesuchte Kraft O_m in der Momentengleichung zurückgeblieben ist:

$$(A - P_0)\,a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot 0 + O \cdot h = 0\,.$$

(Die Kraft O ist, da unbekannt, zunächst als Zug angenommen.) Hiermit ergibt sich für die Spannkraft O die untenstehende Formel (I). Entsprechend ist dann die Formel für U aufzustellen.

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M_{m-1}}{h}\,, \\[2mm] U = +\dfrac{M_{\overline{m-1}}}{h}\,. \end{cases}$$

Wir haben also das Resultat: **Bei dem k-förmigen Träger ist eine Gurtkraft gleich dem Moment für den vorhergehenden Knotenpunkt der gegenüberliegenden Gurtung, dividiert durch die Trägerhöhe.**

b) Für die **Diagonalen** ergibt sich aus dem Schnitte α—α (Fig. 66a und c):

$$D_m \cdot \sin\varphi + E_m \cdot \sin\varphi = (A - P_0 - P_1 - P_2)\,, \qquad = Q_{(m-1)-m}\,,$$

[Querkraft des Feldes $(m-1)$—m]

$$(D_m + E_m) = Q_{(m-1)-m} \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\,.$$

Wie nun aber aus dem Gleichgewicht des Knotens n folgt (Kräftepolygon Fig. 66a), sind die Spannkräfte der an einem Punkte n

angreifenden beiden Diagonalen stets **gleich groß und entgegengesetzt gerichtet**. Jede derselben hat also die Hälfte des oben angegebenen Wertes, und zwar erhält bei positiver Querkraft die linkssteigende Diagonale Zug, die rechtssteigende Druck. Allgemein ergibt sich also:

$$\text{(II)} \qquad D_m\,,\ E_m = \pm\frac{1}{2}\,Q_{(m-1)-m}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\,. \qquad \begin{bmatrix} + \text{ für linkssteigend} \\ - \text{ ,, rechts ,,} \end{bmatrix}$$

Hierin gilt das positive Vorzeichen für die linkssteigende, das negative für die rechtssteigende Diagonale. Die Querkraft ist natürlich ebenfalls mit Vorzeichen einzusetzen.

c) Die **Vertikalen** ergeben sich aus dem Gleichgewicht ihrer Endknotenpunkte: Es ist (Fig. 66a rechte Seite), wenn man D und E zunächst als Zug einführt:

$$V = -D\cdot\sin\varphi\,, \qquad W = -E\cdot\sin\varphi - P\,.$$

Mit Berücksichtigung der oberen Ausdrücke für D und E folgt hieraus:

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} V &= \mp\frac{1}{2}\,Q_{(m-1)-m} && [-, \text{ falls die angreifende Diagonale linkssteigend}], \\ W &= \pm\frac{1}{2}\,Q_{(m-1)-m} - P && [+, \text{ falls die angreifende Diagonale rechtssteigend}]. \end{aligned} \right.$$

Die oberen Vorzeichen bei Q gelten für die linke Trägerhälfte, die unteren für die rechte. Der Wert $Q_{(m-1)-m}$ ist stets die Kraftsumme desjenigen Feldes, in dem die an V und W angreifenden Diagonalen liegen. Die Summe $V+W$ ist natürlich gleich der Querkraft des Feldes, das von dem zu V, W gehörigen Schnitte β—β getroffen wird (Fig. 66a, rechte Seite). Somit sind sämtliche Spannkräfte auch analytisch bestimmt.

Übungsaufgabe: Beweise, daß bei Belastung am **Untergurt** ist:

$$V = \mp\frac{1}{2}\,Q + P\,; \qquad W = \pm\frac{1}{2}\,Q\,.$$

Vierte Aufgabe.

Der Träger Fig. 67 mit einem geneigten Gurt ist zu berechnen!

Die Neigung des Obergurtes beträgt nur 1:10. Die Berechnung wird aber zeigen, daß trotz dieser Geringfügigkeit die Diagonalen und Vertikalen ganz anders ausfallen als bei dem ähnlich gebauten Träger Fig. 64. Es ist also nicht zulässig, den vorliegenden Träger etwa angenähert als Parallelträger zu behandeln. Die Berechnung muß vielmehr so geschehen wie für Träger mit einem geraden und einem gekrümmten Gurt (§ 8, 6. Aufgabe).

Die zur Berechnung erforderlichen geometrischen Angaben sind jetzt direkt in die Zeichnung einzutragen.

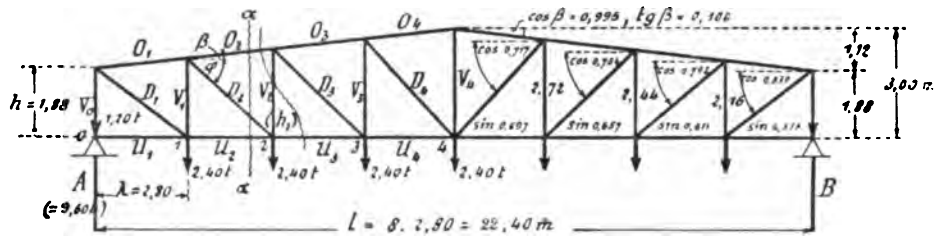


Fig. 67.

Tabelle I.

Kraft-summen Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	Momente M $\left(M=\frac{M}{\lambda}\cdot 2{,}80\right)$ (mt)	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O=-\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U=+\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D=\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o}-\frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t) $V=-D\sin\varphi+2{,}40$
$(A=9{,}60)$	$\frac{M_0}{\lambda}=0{,}00$	$M_0=0{,}00$	$\frac{M_0}{h_0}=0{,}0$		$U_1=0{,}0$		$[V_0=-Q_{0-1}=-8{,}40]$
$Q_{0-1}=+8{,}40$	$\frac{M_1}{\lambda}=8{,}40$	$M_1=23{,}52$	$\frac{M_1}{h_1}=+10{,}9$	$O_1=-11{,}0$	$U_2=+10{,}9$	$D_1=\frac{1}{0{,}830}(10{,}9-0{,}0)=+13{,}1$	$V_1=-13{,}1\cdot 0{,}558+2{,}4=-4{,}9$
$Q_{1-2}=+6{,}00$	$\frac{M_2}{\lambda}=14{,}40$	$M_2=40{,}32$	$\frac{M_2}{h_2}=+16{,}5$	$O_2=-16{,}6$	$U_3=+16{,}5$	$D_2=\frac{1}{0{,}792}(16{,}5-10{,}9)=+7{,}1$	$V_2=-7{,}1\cdot 0{,}611+2{,}4=-2{,}0$
$Q_{2-3}=+3{,}60$	$\frac{M_3}{\lambda}=18{,}00$	$M_3=50{,}40$	$\frac{M_3}{h_3}=+18{,}5$	$O_3=-18{,}6$	$U_4=+18{,}5$	$D_3=\frac{1}{0{,}754}(18{,}5-16{,}5)=+2{,}7$	$V_3=-2{,}7\cdot 0{,}657+2{,}4=+0{,}7$
$Q_{3-4}=+1{,}20$	$\frac{M_4}{\lambda}=19{,}20$	$M_4=53{,}76$	$\frac{M_4}{h_4}=+17{,}9$	$O_4=-18{,}0$		$D_4=\frac{1}{0{,}717}(17{,}9-18{,}5)=-0{,}8$	$V_4=+2\frac{M_4}{h_4}\operatorname{tg}\beta=+8{,}6$

Zusatz 1. In der Formel für die Vertikalen ist es mitunter bequemer, statt des $\sin\varphi$ den $\operatorname{tg}\varphi$ zu haben. Der $\operatorname{tg}\varphi$ ist nämlich direkt aus der Trägerhöhe h und der Feldweite λ zu berechnen, während der sin. erst aufgeschlagen werden muß. Dann benutzen wir die in § 7 b, Formel (Vc), angegebene Umformung von V:

$$V=-\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{M_o}{h_o}-\frac{M_u}{h_u}\right)\pm P$$

$$=-\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{M_o}{h_o}-\frac{M_u}{h_u}\right)+2{,}40.$$

Der vorkommende Klammerausdruck ist bereits in der Kolonne für die Diagonalen angeschrieben, so daß man ihn nur noch mit $\operatorname{tg}\varphi$ zu multiplizieren hat, um V zu erhalten.

Auch von solch einer kleinen Vereinfachung kann man gelegentlich Gebrauch machen.

Zusatz 2. ***Andere Berechnung des Fachwerkes.***

Da im vorliegenden Falle der Untergurt die Neigung $\gamma = 0$ und der Obergurt eine **konstante** Neigung β hat, können die Vertikalen auch recht gut nach der Formel (Va) von § 7b berechnet werden:

$$V_m = -Q + \frac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)\,.$$

Beispielsweise würde sich hiernach für V_2 von Fig. 67 ergeben:

$$\text{(I)} \qquad V_2 = -Q_{2-3} + \frac{M_2}{h_2}\operatorname{tg}\beta\,.$$

Die obige Formel ist aus der Gleichgewichtsbedingung $R_y = 0$ entstanden. Das Glied $\frac{M_2}{h_2}\operatorname{tg}\beta \left(= \frac{M_2}{h_2 \cos\beta}\sin\beta\right)$ stellt die Vertikalprojektion der vom Schnitte getroffenen **Gurtkraft** dar. Während beim Parallelträger V_2 direkt gleich $-Q_{2-3}$ wäre, kommt hier das obige Glied aus der Gurtkraft hinzu. Die obige Formel (I) gibt also deutlich den Unterschied zwischen dem vorliegenden System und einem Parallelträger an.

Auch für die Diagonalen kann man in diesem Falle auf die Kraftsumme Q zurückgreifen. Nur muß man den Betrag, mit dem die **Gurtkräfte** auch in vertikaler Richtung wirken, berücksichtigen. Dann würde sich beispielsweise für D_2 aus dem Schnitt α—α ergeben (die Stabkraft O_2 zunächst als Zug eingeführt):

$$D_2 \cdot \sin\varphi_2 = Q_{1-2} + O_2 \cdot \sin\beta\,.$$

Setzt man nun für O_2 den richtigen Wert ein, so folgt:

$$\text{(II)} \qquad D_2 = \frac{1}{\sin\varphi_2}\left(Q_{1-2} - \frac{M_2}{h_2}\operatorname{tg}\beta\right).$$

Die Formeln (I) und (II) stehen natürlich miteinander in dem Zusammenhang: $V = -D \cdot \sin\varphi + P$.

Tabelle II.

Querkräfte Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	Momente M (mt)	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D_m = \frac{1}{\sin\varphi}\left[Q_{(m-1)-m} - \frac{M_m}{h_m}\operatorname{tg}\beta\right]$	Vertikalen (t) $V_m = -Q_{m-(m+1)} + \frac{M_m}{h_m}\operatorname{tg}\beta$
$A\,(= 9{,}60)$	$\frac{M_0}{\lambda} = 0{,}00$	$M_0 = 0{,}00$	$\frac{M_0}{h_0} = 0{,}0$		$U_1 = 0{,}0$		$[V_0 = -Q_{0-1} = -8{,}40]$
$Q_{0-1} = +8{,}40$	$\frac{M_1}{\lambda} = 8{,}40$	$M_1 = 23{,}52$	$\frac{M_1}{h_1} = +10{,}9$	$O_1 = -11{,}0$	$U_2 = +10{,}9$	$D_1 = \frac{1}{0{,}558}(8{,}40 - 1{,}09) = +13{,}1$	$V_1 = -6{,}00 + 1{,}09 = -4{,}9$
$Q_{1-2} = +6{,}00$	$\frac{M_2}{\lambda} = 14{,}40$	$M_2 = 40{,}32$	$\frac{M_2}{h_2} = +16{,}5$	$O_2 = -16{,}6$	$U_3 = +16{,}5$	$D_2 = \frac{1}{0{,}611}(6{,}00 - 1{,}65) = +7{,}1$	$V_2 = -3{,}60 + 1{,}65 = -2{,}0$
$Q_{2-3} = +3{,}60$	$\frac{M_3}{\lambda} = 18{,}00$	$M_3 = 50{,}40$	$\frac{M_3}{h_3} = +18{,}5$	$O_3 = -18{,}6$	$U_4 = +18{,}5$	$D_3 = \frac{1}{0{,}657}(3{,}60 - 1{,}85) = +2{,}7$	$V_3 = -1{,}20 + 1{,}85 = +0{,}7$
$Q_{3-4} = +1{,}20$	$\frac{M_4}{\lambda} = 19{,}20$	$M_4 = 53{,}76$	$\frac{M_4}{h_4} = +17{,}9$	$O_4 = -18{,}0$		$D_4 = \frac{1}{0{,}697}(1{,}20 - 1{,}79) = -0{,}8$	$\left[V_4 = +2\frac{M_4}{h_4}\operatorname{tg}\beta = +3{,}6\right]$

In der vorstehenden Tabelle II ist die Berechnung der Konstruktion auch nach diesen Formeln durchgeführt.

Übungsaufgabe: Berechne das System für eine gleichmäßig verteilte Belastung $g = 0{,}80$ t pro m am Obergurt.

Fünfte Aufgabe.

Der in Fig. 68 gezeichnete Träger mit einer gleichmäßig verteilten Last $g = 2{,}00$ t/m ist zu berechnen!

(Vgl. § 8, 6. Aufgabe.) Die Knotenpunkte der oberen Gurtung mögen auf einer Parabel liegen. Man nennt das System einen „Halbparabelträger" („Parabelträger" siehe Fig. 78).

Gegeben: $l = 8\lambda = 8 \cdot 4{,}00 = 32{,}00$ m; Stich der Parabel $f = 2{,}40$ m; Endvertikale $h_0 = 2{,}20$ m; Belastung $g = 2{,}00$ t/m.

Tabelle I: Geometrische Angaben.

Knotenpunkt	Parabelordinaten $y_m = \frac{4f}{l^2}x(l-x) = \frac{4 \cdot 2{,}40}{8^2 \cdot \lambda^2} m\lambda(8-m)\lambda$, $y_m = 0{,}15\,m(8-m)$	Trägerhöhen $h_m = h_0 + y_m$ (m)	Neigungswinkel			
			Obergurt		Diagonalen	
0	$y_0 = 0{,}00$	$h_0 = 2{,}20$				
1	$y_1 = 0{,}15 \cdot 1 \cdot 7 = 1{,}05$	$h_1 = 3{,}25$	$\cos\beta_1 = 0{,}967$	$\sin\beta_1 = 0{,}254$	$\cos\varphi_1 = 0{,}876$	$\sin\varphi_1 = 0{,}482$
2	$y_2 = 0{,}15 \cdot 2 \cdot 6 = 1{,}80$	$h_2 = 4{,}00$	$\cos\beta_2 = 0{,}983$	$\sin\beta_2 = 0{,}185$	$\cos\varphi_2 = 0{,}776$	$\sin\varphi_2 = 0{,}631$
3	$y_3 = 0{,}15 \cdot 3 \cdot 5 = 2{,}25$	$h_3 = 4{,}45$	$\cos\beta_3 = 0{,}994$	$\sin\beta_3 = 0{,}113$	$\cos\varphi_3 = 0{,}707$	$\sin\varphi_3 = 0{,}707$
4	$y_4 = 0{,}15 \cdot 4 \cdot 4 = 2{,}40$	$h_4 = 4{,}60$	$\cos\beta_4 = 0{,}999$	$\sin\beta_4 = 0{,}038$	$\cos\varphi_4 = 0{,}669$	$\sin\varphi_4 = 0{,}743$

Tabelle II: Spannkräfte.

Knotenpunkt	Momente (mt) $M_m = \frac{g}{2}x(l-x) = \frac{2{,}0}{2} m\lambda(8-m)\lambda = 16\,m(8-m)$	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t) $V = -D\sin\varphi + P$ $[P = 2{,}0 \cdot \lambda = 8{,}0$ t$]$
0	$M_0 = 0$	$\frac{M_0}{h_0} = 0{,}0$		$U_1 = +\,0{,}0$		$[V_0 = -(32{,}0 - 4{,}0) = -28{,}0]$
1	$M_1 = 16 \cdot 1 \cdot 7 = 112$	$\frac{M_1}{h_1} = 34{,}5$	$O_1 = -35{,}7$	$U_2 = +34{,}5$	$D_1 = \frac{1}{0{,}876}(34{,}5 - 0{,}0) = +39{,}4$	$V_1 = -39{,}4 \cdot 0{,}482 + 8{,}0 = -11{,}0$
2	$M_2 = 16 \cdot 2 \cdot 6 = 192$	$\frac{M_2}{h_2} = 48{,}0$	$O_2 = -48{,}8$	$U_3 = +48{,}0$	$D_2 = \frac{1}{0{,}776}(48{,}0 - 34{,}5) = +17{,}4$	$V_2 = -17{,}4 \cdot 0{,}631 + 8{,}0 = -3{,}0$
3	$M_3 = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$	$\frac{M_3}{h_3} = 53{,}9$	$O_3 = -54{,}2$	$U_4 = +53{,}9$	$D_3 = \frac{1}{0{,}707}(53{,}9 - 48{,}0) = +8{,}4$	$V_3 = -8{,}4 \cdot 0{,}707 + 8{,}0 = +2{,}1$
4	$M_4 = 16 \cdot 4 \cdot 4 = 256$	$\frac{M_4}{h_4} = 55{,}7$	$O_4 = -55{,}8$		$D_4 = \frac{1}{0{,}669}(55{,}7 - 53{,}9) = +2{,}7$	$[V_4 = -2O_4 \sin\beta_4 = +4{,}2]$

Kontrolle: Aus dem durch eine Vertikale V_1 gelegten Schnitte ergibt sich die Beziehung:

$$V_1 = -(Q_{1-2} + O_1 \sin\beta_1)\,.$$

Die Querkraft Q eines Feldes ist bei gleichmäßiger Belastung einfach auszurechnen durch das Produkt aus Belastung pro Längeneinheit mal Abstand von Feldmitte bis Trägermitte (Band I, § 64). Hiernach ergeben sich folgende Werte für die Vertikalen:

$$V_1 = -(2{,}0 \cdot 10{,}0 - 85{,}7 \cdot 0{,}254) = -(20{,}0 - 9{,}0) = -11{,}0$$
$$V_2 = -(2{,}0 \cdot 6{,}0 - 48{,}8 \cdot 0{,}185) = -(12{,}0 - 9{,}0) = -8{,}0$$
$$V_3 = -(2{,}0 \cdot 2{,}0 - 54{,}2 \cdot 0{,}113) = -(4{,}0 - 6{,}1) = +2{,}1\,.$$

Durch die Werte V sind auch die Werte D und hierdurch weiterhin $M:h$ usw. kontrolliert, so daß in der ganzen Rechnung

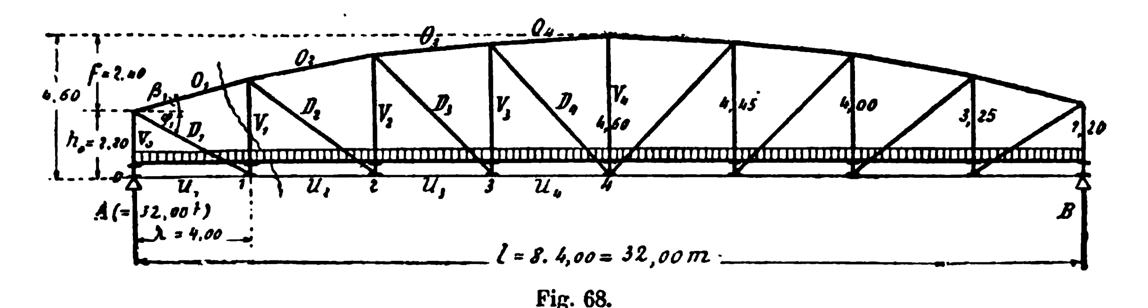


Fig. 68.

kaum ein Fehler sein kann. [O_4 könnte man noch kontrollieren, indem man es mit D_4 in Beziehung bringt:

$$D_4 \sin\varphi_4 = Q_{3-4} + O_4 \cdot \sin\beta_4\,.]$$

Übungsaufgabe: Berechne das System für folgende, am Untergurt angreifende Knotenpunktslasten: $P_0 = 4{,}00\,\text{t}, P_1 \ldots = 8{,}00\,\text{t}$.

Sechste Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 69 mit Auskragung ist zu berechnen!

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{4{,}20 \cdot 6{,}5\,\lambda}{5\,\lambda} + \frac{7{,}00}{2} = 5{,}46 + 3{,}50 = 8{,}96\,\text{t} \\ B &= -\frac{4{,}20 \cdot 1{,}5\,\lambda}{5\,\lambda} + \frac{7{,}00}{2} = -1{,}26 + 3{,}50 = 2{,}24\,\text{t} \end{aligned}\right\} A + B = 11{,}20\,\text{t}.$$

[Hinsichtlich der Vorzeichen von D und V in der folgenden Tabelle vgl. § 7a, b.] 'ig. 19.]

Querkräfte Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	Gurtstäbe (t) $O, U = \mp \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{h} = \mp \frac{M}{\lambda} \cdot 1{,}06$	Diagonalen (t) $D = Q \cdot \frac{1}{\sin \varphi} = Q \cdot 1{,}45$	Vertikalen (t) $V = Q$ $[V = -P]$
$Q_{0-1} = -0{,}70$	$\frac{M_1}{\lambda} = -0{,}70$	$O_1, O_2 = -(-0{,}70) \cdot 1{,}06 = +0{,}7$	$D_1 = +(-0{,}70) \cdot 1{,}45 = -1{,}0$	$V_1, V_8 = -1{,}4$ $V_3 = -9{,}0$
$Q_{1-2} = -2{,}10$	$\frac{M_2}{\lambda} = -2{,}80$	$O_3, U_1 = \mp(-2{,}80) \cdot 1{,}06 = \pm 3{,}0$	$D_2 = -(-2{,}10) \cdot 1{,}45 = +3{,}1$	$V_6 = -2{,}2$
$Q_{2-3} = -3{,}50$	$\frac{M_3}{\lambda} = -6{,}30$	$U_2, U_3 = +(-6{,}30) \cdot 1{,}06 = -6{,}7$	$D_3 = -(-3{,}50) \cdot 1{,}45 = +5{,}1$	$V_2 = +(-3{,}50) = -3{,}5$
$Q_{3-4} = +4{,}06$	$\frac{M_4}{\lambda} = -2{,}24$	$O_4, U_4 = \mp(-2{,}24) \cdot 1{,}06 = \pm 2{,}4$	$D_4 = +(+4{,}06) \cdot 1{,}45 = +5{,}9$	$V_4 = -(+4{,}06) = -4{,}1$
$Q_{4-5} = +2{,}66$	$\frac{M_5}{\lambda} = +0{,}42$	$O_5, U_5 = \mp(+0{,}42) \cdot 1{,}06 = \mp 0{,}5$	$D_5 = +(+2{,}66) \cdot 1{,}45 = +3{,}9$	$V_5 = -(+2{,}66) = -2{,}7$
$Q_{5-6} = +1{,}26$	$\frac{M_6}{\lambda} = +1{,}68$	$O_6, O_7 = -(+1{,}68) \cdot 1{,}06 = -1{,}8$	$D_6 = +(+1{,}26) \cdot 1{,}45 = +1{,}8$	
$Q_{6-7} = -0{,}14$	$\frac{M_7}{\lambda} = +1{,}54$	$O_8, U_6 = \mp(+1{,}54) \cdot 1{,}06 = \mp 1{,}6$	$D_7 = -(-0{,}14) \cdot 1{,}45 = +0{,}2$	
$Q_{7-8} = -1{,}54$	$\frac{M_8}{\lambda} = 0{,}00$	$U_7 = 0{,}0$	$D_8 = -(-1{,}54) \cdot 1{,}45 = +2{,}2$	$V_7 = +(-1{,}54) = 1{,}5$

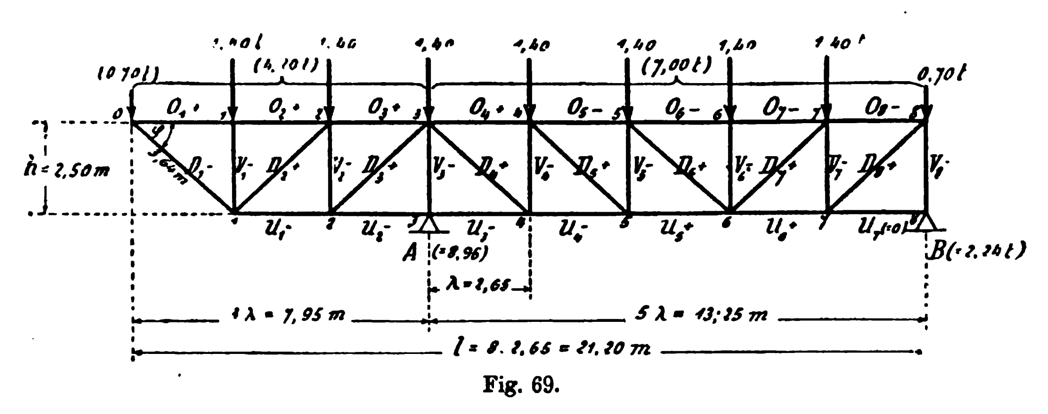


Fig. 69.

Übungsaufgabe: Man führe die Berechnung mit (ungleich großen) Knotenpunktslasten durch.

Siebente Aufgabe.

Der Kragträger Fig. 70 ist zu berechnen!

Die Knotenpunkte der unteren Gurtung mögen auf Kreisbögen von demselben Radius liegen. Sehnenlänge im mittleren Teile $l = 21{,}60$ m; Höhe der Auflagervertikalen $h_2 = 4{,}50$ m; Stich des Bogens $f = 2{,}40$ m. Hiermit ergeben sich der Radius des Bogens und die Ordinaten der einzelnen Punkte (Band I; § 55, Tabelle B):

$$r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{21{,}60^2}{8 \cdot 2{,}40} + \frac{2{,}40}{2} = \frac{466{,}56}{19{,}20} + 1{,}20 = 25{,}50\,\text{m},$$

$$r - f = 25{,}50 - 2{,}40 = 23{,}10\,\text{m},$$

$$y_3 = \sqrt{25{,}50^2 - 7{,}20^2} - 23{,}10 = \sqrt{598{,}41} - 23{,}10 = 1{,}36\,,$$

$$y_4 = \sqrt{25{,}50^2 - 3{,}60^2} - 23{,}10 = \sqrt{637{,}29} - 23{,}10 = 2{,}14\,.$$

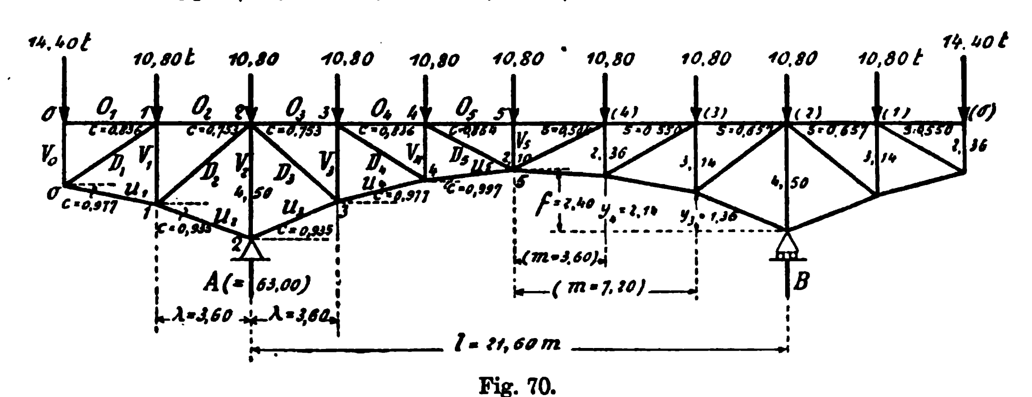
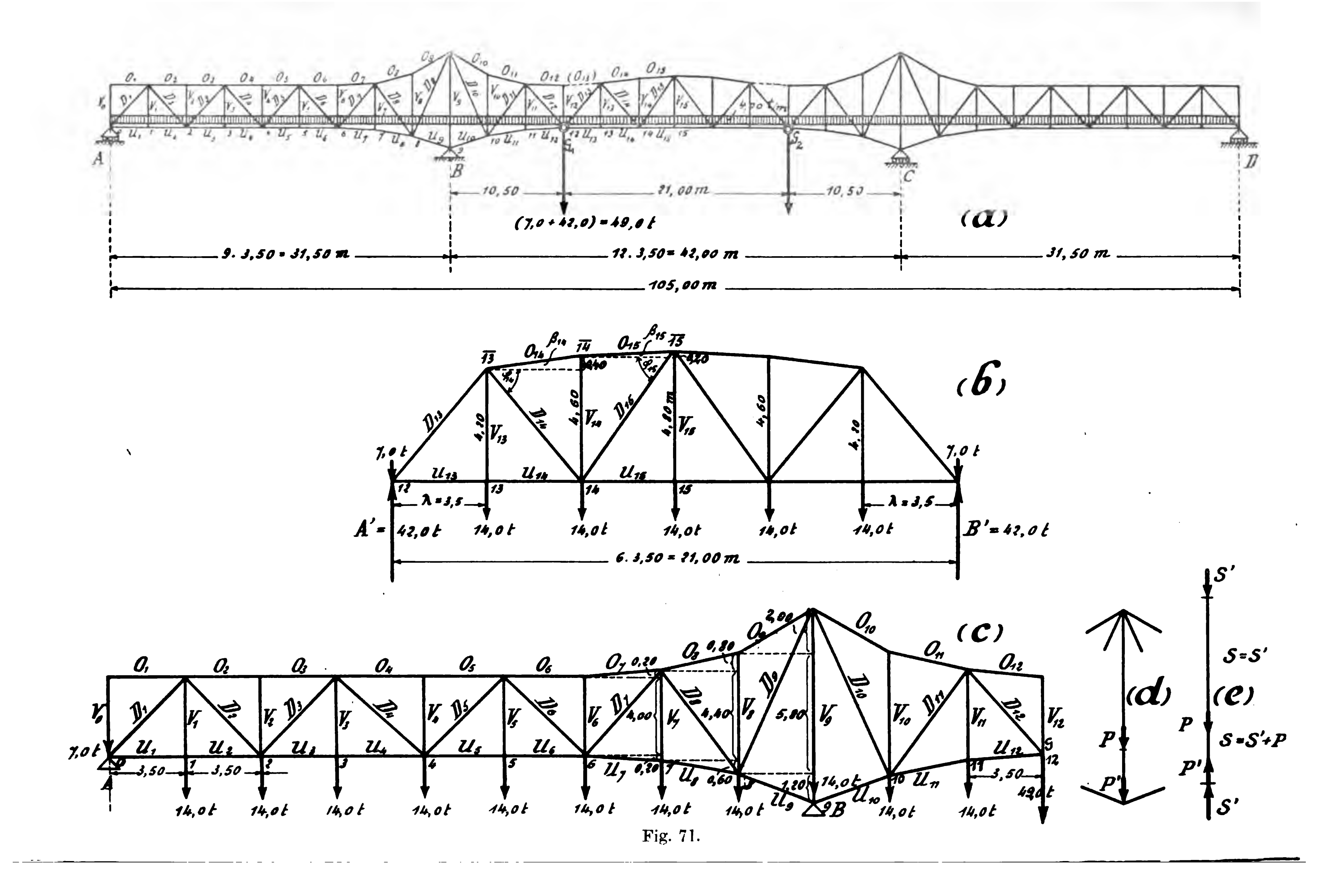


Fig. 70.

Hiermit ist das System festgelegt. Die zur Berechnung erforderlichen Angaben wurden hierauf direkt in die Zeichnung eingetragen („c“ = cosinus; „s“ = sinus).

Querkräfte Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$	Momente M (mt)	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$	Diagonalen (t) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t) $V = -D\sin\varphi - P$
$[A = 63{,}0]$		$M_0 = 0{,}0$	$\frac{M_0}{h_0} = 0{,}0$	$O_1 = 0{,}0$			$[V_0 = -14{,}4;\ V_8 = -10{,}8]$
$Q_{0-1} = -14{,}4$	$\frac{M_1}{\lambda} = -14{,}4$	$M_1 = -51{,}8$	$\frac{M_1}{h_1} = -16{,}5$	$O_2 = +16{,}5$	$U_1 = -16{,}9$	$D_1 = \frac{1}{0{,}836}(\ 0{,}0 + 16{,}5) = +19{,}7$	$V_1 = -(19{,}7 \cdot 0{,}550 + 10{,}8) = -21{,}6$
$Q_{1-2} = -25{,}2$	$\frac{M_2}{\lambda} = -39{,}6$	$M_2 = -142{,}6$	$\frac{M_2}{h_2} = -31{,}7$		$U_2,\ U_3 = -33{,}9$	$D_2 = \frac{1}{0{,}753}(-16{,}5 + 31{,}7) = +20{,}1$	$V_2 = -A - (U_2 + U_3)\sin\gamma_{2,3} = -30{,}0$
$Q_{2-3} = +27{,}0$	$\frac{M_3}{\lambda} = -12{,}6$	$M_3 = -45{,}4$	$\frac{M_3}{h_3} = -14{,}5$	$O_3 = +14{,}5$	$U_4 = -14{,}8$	$D_3 = \frac{1}{0{,}753}(-14{,}5 + 31{,}7) = +22{,}0$	
$Q_{3-4} = +16{,}2$	$\frac{M_4}{\lambda} = +3{,}6$	$M_4 = +13{,}0$	$\frac{M_4}{h_4} = +5{,}5$	$O_4 = -5{,}5$	$U_5 = +5{,}5$	$D_4 = \frac{1}{0{,}836}(\ +5{,}5 + 14{,}5) = +23{,}9$	$V_3 = -(23{,}9 \cdot 0{,}550 + 10{,}8) = -23{,}9$
$Q_{4-5} = +5{,}4$	$\frac{M_5}{\lambda} = +9{,}0$	$M_5 = +32{,}4$	$\frac{M_5}{h_5} = +15{,}4$	$O_5 = -15{,}4$		$D_5 = \frac{1}{0{,}864}(+15{,}4 - \ 5{,}5) = +11{,}5$	$V_4 = -(11{,}5 \cdot 0{,}504 + 10{,}8) = -16{,}6$

Zur Kontrolle berechnen wir die V auch noch aus den Querkräften und den Vertikalkomponenten der Gurtkräfte bzw. aus dem Gleichgewicht des anderen Endpunktes (V_8):



(a)
A
B
C
D
10,50
21,00 m
10,50
(7,0 + 42,0) = 49,0 t
9 . 3,50 = 31,50 m
12 . 3,50 = 42,00 m
31,50 m
105,00 m
(b)
7,0 t
λ = 3,5
A' = 42,0 t
B' = 42,0 t
14,0 t
6 . 3,50 = 21,00 m
(c)
(d)
(e)
S = S'
S = S' + P

Fig. 71.

$$V_1 = +Q_{1-2} - U_1 \sin\gamma_1 = -25{,}2 + 16{,}9 \cdot 0{,}212 = -21{,}6\,,$$
$$V_2 = -(D_2 + D_3) \sin\varphi_{2,3} - 10{,}8 = -39{,}0\,,$$
$$V_3 = -Q_{2-3} - U_4 \sin\gamma_4 = -27{,}0 + 14{,}8 \cdot 0{,}212 = -23{,}9\,,$$
$$V_4 = -Q_{3-4} - U_5 \sin\gamma_5 = -16{,}2 - 5{,}5 \cdot 0{,}072 = -16{,}6\,.$$

In der ganzen Berechnung dürfte kaum ein Fehler sein. Natürlich ist die analytische Berechnung genauer als ein Kräfteplan (§ 6, 4. Aufgabe).

Zusatz: Will man das Einschreiben der $\sin\varphi$ in die Systemfigur sparen, so arbeite man bei der Berechnung der Vertikalen statt mit $D \cdot \sin\varphi$ mit:

$$\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right) \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Der tg der Neigungswinkel ist direkt durch die Trägerhöhen und die Feldweite gegeben. Der Klammerausdruck ist bereits bei der Berechnung der Diagonalen zusammengestellt. (Vgl. 4. Aufgabe dieses Paragraphen.)

Übungsaufgabe: Der Untergurt von Fig. 70 liege auf Parabeln. Das System ist zu berechnen!

Achte Aufgabe.

Der Gerbersche Fachwerkträger Fig. 71 ist für eine gleichmäßig verteilte Belastung von $g = 4{,}00$ t/m zu berechnen!

I. Geometrische Angaben.

Die Konstruktion besteht aus zwei überkragenden Balken, die die Außenöffnungen überbrücken und je 10,50 m in die Mittelöffnung hineinragen, und aus einem eingehängten Träger von 21,00 m in der Mittelöffnung. Die Gelenke sind mit G_1 und G_2 bezeichnet. Damit sie auch als Gelenke wirken, wird bei jedem Gelenk der (aus Schönheitsrücksichten eingezogene) gegenüberliegende Obergurtstab als sog. „Blindstab" ausgeführt, d. h. er wird nicht vernietet, sondern beweglich angeschlossen, so daß er nicht als Konstruktionsteil wirkt.

Der Kragträger (Fig. 71a und c) verläuft mit seinem Untergurt vom linken Auflager aus die ersten sechs Felder horizontal. Dann senkt er sich pro Feld um 0,20 m, 0,60 m und 1,20 m bis zum Auflager B. Der Obergurt des Kragträgers verläuft ebenfalls auf sechs Felder horizontal und hebt sich dann pro Feld um 0,20 m, 0,80 m und 2,00 m bis zur Auflagervertikalen bei B. Die überkragenden Felder des Kragträgers sind symmetrisch zu den seitlichen. Der eingehängte Träger (Fig. 71a und b) hat horizon-

talen Untergurt, während der Obergurt nach der Mitte zu um 0,40 m und 0,20 m steigt.

Durch diese Systemangaben sind die Höhen und Neigungswinkel festgelegt. Letztere werden am besten so bestimmt, daß man aus der Steigung des Stabes und der Feldweite zunächst den tg bestimmt, diese Zahl festhält und in den trigonometrischen Tabellen sofort den cos (und sin) nachschlägt. In der folgenden Tabelle sind für das ganze System alle erforderlichen geometrischen Angaben zusammengestellt.

Ordnungs-nummer	Träger-höhe h	Neigungswinkel		
		Obergurt	Untergurt	Diagonalen
0	4,0			
1	4,0	$\frac{1}{\cos\beta} = 1{,}000$	$\frac{1}{\cos\gamma} = 1{,}000$	$\frac{1}{\cos\varphi} = 1{,}519$
2	4,0	1,000	1,000	1,519
3	4,0	1,000	1,000	1,519
4	4,0	1,000	1,000	1,519
5	4,0	1,000	1,000	1,519
6	4,0	1,000	1,000	1,519
7	4,4	1,002	1,002	1,562
8	5,8	1,026	1,015	1,744
9	9,0	1,152	1,057	2,440
10	5,8	1,152	1,057	2,440
11	4,4	1,026	1,015	1,744
12	4,0	1,002	1,002	1,562
13	4,2	1,002	1,000	1,562
14	4,6	1,007	1,000	1,562
15	4,8	1,002	1,000	1,697

II. Belastungen und Auflagerdrücke.

Die Belastung besteht aus einer gleichmäßig über den ganzen Träger verteilten Last $g = 4{,}00$ t/m. Knotenlasten für den Kragträger (Fig. 71c):

Punkt *0*: $P = 4{,}00 \cdot \frac{1}{2} 3{,}50 = 7{,}00$ t,

„ *1—11*: $P = 4{,}00 \cdot 3{,}50 = 14{,}00$ t.

Der Auflagerdruck des eingehängten Trägers ist (Fig. 71 b):

$$A' = 4,0 \cdot \frac{21,00}{2} = 42,00 \text{ t.}$$

Im Gelenkpunkte G des Kragträgers wirkt also auf diesen eine Belastung:

$$P = 7,00 + 42,00 = 49,00 \text{ t.}$$

Sämtliche Knotenpunktslasten werden an der unteren Gurtung angenommen, da hier die Fahrbahn liegt.

Auflagerdruck des eingehängten Trägers

$$A' = B' = 42,00 \text{ t.}$$

Auflagerdrücke A und B des Kragträgers (Fig. 71 a und c):

$$A = 4,00 \cdot \frac{31,50}{2} - \left[4,00 \cdot 10,50 \cdot \frac{10,50}{2} + 42,00 \cdot 10,50\right] \frac{1}{31,50}$$
$$= 63,00 - 21,00$$
$$= 42,00 \text{ t,}$$

$$B = 4,00 \cdot \frac{31,50}{2} + \left[4,00 \cdot 10,50\left(31,50 + \frac{10,50}{2}\right) + 42,00(31,50 + 10,50)\right] \frac{1}{31,50}$$
$$= 168,00 \text{ t.}$$

$$\left[\text{Kontrolle: } A + B = 42,00 + 168,00 = 4,00 \cdot \frac{105,00}{2}.\right]$$

III. Stabkräfte des eingehängten Trägers (Fig. 71 b).

Der eingehängte Träger ist ein einfacher Fachwerkbalken auf zwei Stützen und wird wie jeder andere berechnet.

Kraft-summen Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	$\frac{M}{h}\left(=\frac{M}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{h}\right)$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t) $V_{13,15} = +P$; $V_{14} = \frac{M_{14}}{h_{14}}(\text{tg}\,\beta_{14} - \text{tg}\,\beta_{15})$
$[A' = +42,0]$	$\frac{M_{12}}{\lambda} = 0,0$	$\frac{M_{12}}{h_{12}} = +0,0$	$[O_{13}$ blind$]$			$V_{13} = +14,0$
$Q_{12-13} = +35,0$	$\frac{M_{13}}{\lambda} = +35,0$	$\frac{M_{13}}{h_{13}} = +29,2$		$U_{13} = +29,2$ $U_{14} = +29,2$	$D_{13} = 1,562(0,0 - 29,2) = -45,6$	
$Q_{13-14} = +21,0$	$\frac{M_{14}}{\lambda} = +56,0$	$\frac{M_{14}}{h_{14}} = +42,6$	$O_{14} = -42,9$ $O_{15} = -42,7$		$D_{14} = 1,562(42,6 - 29,2) = +21,0$	$V_{14} = +42,6\left(\frac{0,4 - 0,2}{3,5}\right) = +2,4$
$Q_{14-15} = +7,0$	$\frac{M_{15}}{\lambda} = +63,0$	$\frac{M_{15}}{h_{15}} = +45,9$		$U_{15} = +45,9$	$D_{15} = 1,697(42,6 - 45,9) = -5,7$	$V_{15} = +14,0$

IV. Stabkräfte der Kragträger (Fig. 71 c).

Der Kragträger ist von Punkt *0—6* ein einfacher Parallelträger und geht dann in einen Träger mit gekrümmten Gurtungen über.

Kraftsummen Q (t)	Werte $\frac{M}{\lambda}$ (t)	$\frac{M}{h}\left(=\frac{M}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{h}\right)$ (t)	Obergurt (t) $O=-\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U=+\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}$	Diagonalen (t) $D_{1-6}=\pm Q\frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{1}{\sin\varphi}=1{,}829\right]$ $D_{7-12}=\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o}-\frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen (t)
$[A=42{,}0]$	$\frac{M_0}{\lambda}=0{,}0$	$\frac{M_0}{h_0}=0{,}0$	$O_1=0{,}0$			$V_{0,2,4}=0{,}0$
$Q_{0-1}=+35{,}0$	$\frac{M_1}{\lambda}=+85{,}0$	$\frac{M_1}{h_1}=+80{,}6$		U_1, $U_2=+80{,}6$	$D_1=-85{,}0\cdot1{,}829=-46{,}5$	$V_{1,3,5}=+14{,}0$
$Q_{1-2}=+21{,}0$	$\frac{M_2}{\lambda}=+56{,}0$	$\frac{M_2}{h_2}=+49{,}0$	O_2, $O_3=-49{,}0$		$D_2=+21{,}0\cdot1{,}829=+27{,}9$	
$Q_{2-3}=+7{,}0$	$\frac{M_3}{\lambda}=+68{,}0$	$\frac{M_3}{h_3}=+55{,}1$		U_3, $U_4=+55{,}1$	$D_3=-7{,}0\cdot1{,}829=-9{,}8$	
$Q_{3-4}=-7{,}0$	$\frac{M_4}{\lambda}=+56{,}0$	$\frac{M_4}{h_4}=+49{,}0$	O_4, $O_5=-49{,}0$		$D_4=-7{,}0\cdot1{,}829=-9{,}8$	
$Q_{4-5}=-21{,}0$	$\frac{M_5}{\lambda}=+85{,}0$	$\frac{M_5}{h_5}=+80{,}6$		U_5, $U_6=+80{,}6$	$D_5=+21{,}0\cdot1{,}829=+27{,}9$	
$Q_{5-6}=-85{,}0$	$\frac{M_6}{\lambda}=0{,}0$	$\frac{M_6}{h_6}=0{,}0$	O_6, $O_7=0{,}0$		$D_6=-85{,}0\cdot1{,}829=-46{,}5$	$V_6=+O_7\cdot\sin\beta_7$ $=0{,}0$
$Q_{6-7}=-49{,}0$	$\frac{M_7}{\lambda}=-49{,}0$	$\frac{M_7}{h_7}=-89{,}0$		U_7 $=-89{,}0\cdot1{,}002$ $=-89{,}1$ U_8 $=-89{,}0\cdot1{,}015$ $=-89{,}6$	$D_7=1{,}562\,(0{,}0+89{,}0)$ $=+60{,}9$	$V_7=+P+\frac{M_7}{h_7}(-\mathrm{tg}\,\gamma_7+\mathrm{tg}\,\gamma_8)$ $=14{,}0-89{,}0\left(\frac{-0{,}2+0{,}6}{8{,}5}\right)$ $=+9{,}5$
$Q_{7-8}=-63{,}0$	$\frac{M_8}{\lambda}=-112{,}0$	$\frac{M_8}{h_8}=-67{,}6$	O_8 $=+67{,}6\cdot1{,}028$ $=+69{,}4$ O_9 $=+67{,}6\cdot1{,}152$ $=+77{,}9$		$D_8=1{,}744\,(-67{,}6+89{,}0)$ $=-49{,}9$	$V_8=+\frac{M_8}{h_8}(\mathrm{tg}\,\beta_8-\mathrm{tg}\,\beta_9)$ $=-67{,}6\left(\frac{0{,}8-2{,}0}{3{,}5}\right)=+23{,}2$
$Q_{8-9}=-77{,}0$	$\frac{M_9}{\lambda}=-189{,}0$	$\frac{M_9}{h_9}=-78{,}5$		U_9 $=-78{,}5\cdot1{,}057$ $=-77{,}7$ U_{10} $=-78{,}5\cdot1{,}057$ $=-77{,}7$	$D_9=2{,}440\,(-67{,}6+78{,}5)$ $=+14{,}4$	$V_9=(-B+P)$ $+\frac{M_9}{h_9}(-\mathrm{tg}\,\gamma_9-\mathrm{tg}\,\gamma_{10})$ $=(-168{,}0+14{,}0)$ $+78{,}5\cdot2\cdot\frac{1{,}2}{3{,}5}=-108{,}6$
$Q_{9-10}=+77{,}0$	$\frac{M_{10}}{\lambda}=-112{,}0$	$\frac{M_{10}}{h_{10}}=-67{,}6$	$O_{10}=+77{,}9$ $O_{11}=+69{,}4$		$D_{10}=+14{,}4$	$V_{10}=V_8=+23{,}2$
$Q_{10-11}=+63{,}0$	$\frac{M_{11}}{\lambda}=-49{,}0$	$\frac{M_{11}}{h_{11}}=-89{,}0$		$U_{11}=-89{,}6$ $U_{12}=-89{,}1$	$D_{11}=-49{,}9$	$V_{11}=V_7=+9{,}5$
$Q_{11-12}=+49{,}0$	$\frac{M_{12}}{\lambda}=0{,}0$	$\frac{M_{12}}{h_{12}}=0{,}0$	$O_{12}=0{,}0$		$D_{12}=+60{,}9$	$V_{12}=0{,}0$

Zusatz. Bei den Vertikalen V_7—V_{11} wäre noch zu beachten, daß die Belastung nicht direkt in den unteren Knotenpunkten, sondern etwas darüber angreift. Für die Vertikale V_9 z. B. ist in dem unteren Teil (vom Knotenpunkt B bis zur Fahrbahn) die Spannkraft nur von der Kraft B und den Stäben U_9 und U_{10} abhängig; also:

$$V_9 = -B + \frac{M_9}{h_9}(-\text{tg}\gamma_9 - \text{tg}\gamma_{10})$$
$$= -117{,}6 \text{ t} .$$

Für den oberen Teil (über der Fahrbahn) ist, wie in der Tabelle ausgerechnet:

$$V_9 = -103{,}6 \text{ t} .$$

[Der Unterschied beträgt eben die Knotenpunktslast.]

Prinzipiell erledigen wir die Frage nach § 18 (Belastung zwischen den Knotenpunkten; vgl. auch Fig. 54): Die Zwischenlast P wird nach einem Endpunkt, z. B. Punkt *9* übertragen, so daß aus ihr eine Knotenpunktslast P' entsteht (Fig. 71 d). Hierfür ist die Spannkraft der Vertikalen V_9 gleich: $S' = -103{,}6$ (Tabelle). Nun finden wir die wirkliche Stabkraft S des Stabes, indem wir ihn mit der Hilfskraft S', der umgekehrten Kraft P' und der gegebenen Last P aufzeichnen (Fig. 71 e). Dann ergibt sich

für den unteren Teil: $S = -(S' + P') = -(103{,}6 + 14{,}0) = -117{,}6$ t,

für den oberen Teil: $S = -S' = -103{,}6$ t .

In derselben Weise kann man für jede der Vertikalen V_7—V_{11} die Untersuchung korrekt durchführen. Für den unteren Teil ist zu den Spannkräften aus der Tabelle (Werte S') immer noch ein Druck von 14,0 t hinzuzufügen. Für den oberen Teil sind die Werte S' direkt die endgültigen Spannkräfte.

Übungsaufgabe: Der Leser nehme die Belastung $g = 3{,}0$ t/m an und führe die Berechnung des Fachwerkes selbständig durch.

Neunte Aufgabe.

Der allgemeine Unterschied zwischen Belastung am Obergurt und am Untergurt ist klarzustellen!

Wir wollen annehmen, bei einem Fachwerke wäre sowohl im Obergurt wie im Untergurt Belastung. Für die graphische Untersuchung (Kräfteplan) entstehen hierdurch keine Schwierigkeiten. Für die analytische Untersuchung ist es jedoch, wenigstens für die Berechnung der Vertikalen, bequemer, die Belastung nur an einem Gurt zu haben.

Dies ist leicht zu erreichen. Wir verlegen z. B. jede Last P vom Obergurt als Knotenpunktslast P' nach dem Untergurt, haben somit nur Belastung am Untergurt und berechnen hierfür die Hilfskräfte S'. Letztere sind dann bereits für alle Stäbe außer den Vertikalen die endgültigen. Bei den Vertikalen ergeben sich

die endgültigen Stabkräfte S, indem man zu den S' noch die umgedrehten $P'(=P)$ hinzufügt (vgl. Fig. 71e), so daß entsteht

$$S = S' + (-P) .$$

Man kann also willkürlich für die Berechnung die Belastung vom Obergurt nach dem Untergurt verlegen. Nur muß man dann bei den Vertikalen zu der berechneten Spannkraft noch einen Betrag $(-P)$ hinzufügen, um die wirklich vorhandene Stabkraft zu erhalten.

Bei Verlegung von unten nach oben muß man $(+P)$ hinzufügen.

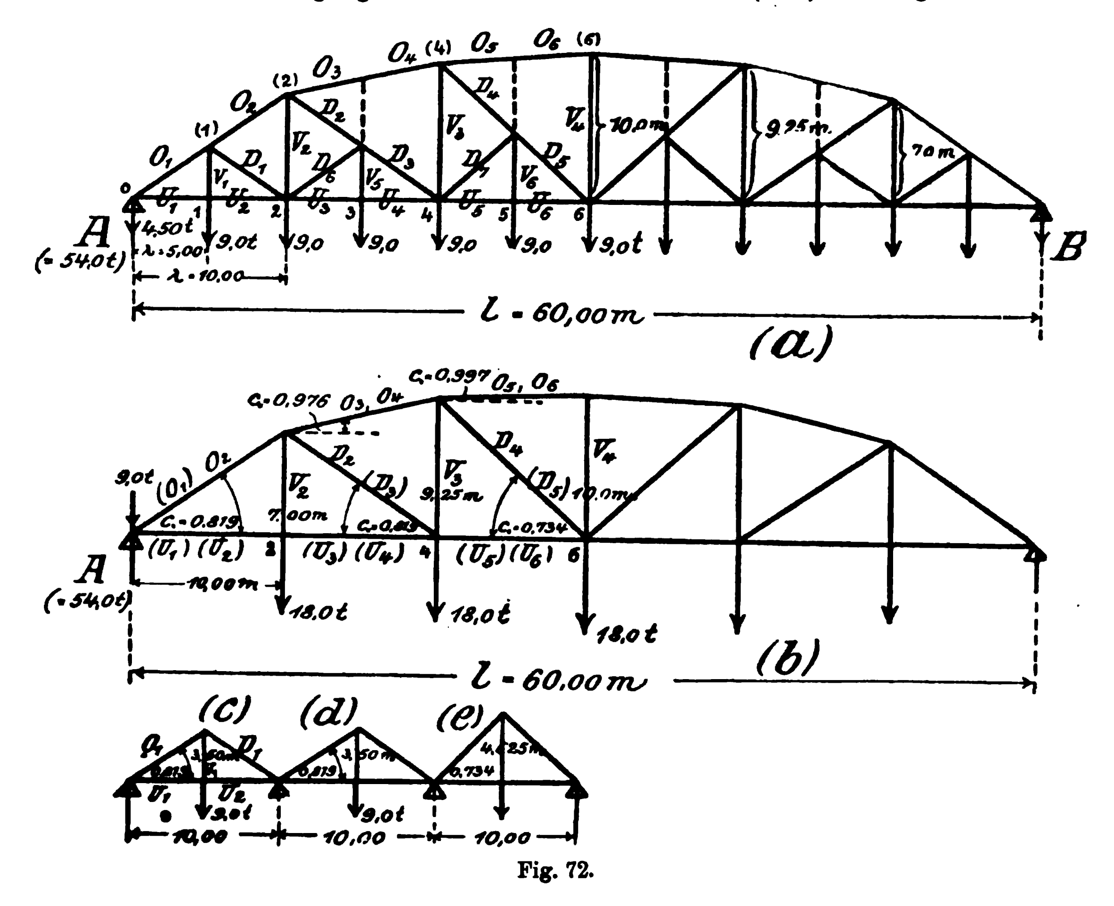


Fig. 72.

Zehnte Aufgabe.

Das Fachwerk Fig. 72 mit scheibenförmigen Gliedern ist zu berechnen!

(Vgl. § 18, II; § 19, sechste Aufgabe.) Das Grundsystem ist in Fig. 72b mit den durch die Verteilung sich ergebenden Knoten-

punktslasten dargestellt; die Zwischensysteme in Fig. 72c—e. Die Spannkräfte des ursprünglichen Systems Fig. 72a ergeben sich, indem man Grund- und Zwischensysteme zunächst für sich berechnet und dann wieder zusammenschiebt. In den folgenden Tabellen ist diese Berechnung durchgeführt. Von den Zwischensystemen ist der Einfachheit wegen nur Fig. 72c berechnet.

Grundsystem (Fig. 72b)					
Moment M (mt)	$\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h}\frac{1}{\cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$	Diagonalen (t) $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	Vertikalen $V_3 = +P - D\sin\varphi$ $V_4 = 2\frac{M}{h}\cdot\operatorname{tg}\beta$
$M_0 = 0{,}0$	$\frac{M_0}{h_0} = 0.0$				
$M_2 = 450{,}0$	$\frac{M_2}{h_2} = 64{,}8$	$(O_1)\,O_2 = -78{,}5$	$(U_{1,2,3,4}) = +64{,}8$		$V_2 = +18{,}0$
$M_4 = 720{,}0$	$\frac{M_4}{h_4} = 77{,}8$	$O_3, O_4 = -79{,}7$	$U_5(U_6) = +77{,}8$	$D_2(D_3) = +16{,}5$	$V_3 = 18{,}0 - 9{,}5 = +8{,}5$
$M_6 = 810{,}0$	$\frac{M_6}{h_6} = 81{,}0$	$O_5, O_6 = -81{,}4$		$D_4(D_5) = +4{,}4$	$V_4 = +12{,}1$

Zwischensystem [Moment $M = \frac{9{,}0\cdot 10{,}0}{4} = 22{,}5$ mt]	Endgültige Stabkräfte (t)
$U_1, U_2 = +\frac{22{,}5}{8{,}5} = +6{,}4$	$O_1 = -78{,}5 - 7{,}9 = -86{,}4$ $O_2 = -78{,}5$; $O_3, O_4 = -79{,}7$; $O_5, O_6 = -81{,}4$
$O_1 = -\frac{22{,}5}{8{,}5\cdot 0{,}819} = -7{,}9$	$U_1, U_2, U_3, U_4 = +64{,}8 + 6{,}4 = +70{,}7$ $U_5, U_6 = +77{,}8 + 6{,}4 = +84{,}2$
$D_1 = -7{,}9$	$D_1, D_6, D_7 = -7{,}9$ $D_2 = +16{,}5$; $D_4 = +4{,}4$ $D_3 = +16{,}5 - 7{,}9 = +8{,}6$; $D_5 = +4{,}4 - 7{,}9 = -3{,}5$
$V_1 = +9{,}0$	$V_1, V_5, V_6 = +9{,}0$ $V_2 = +18{,}0$; $V_3 = +8{,}5$; $V_4 = +12{,}1$

Übungsaufgabe: Zeichne für Fig. 72 einen zusammenhängenden Kräfteplan!

Elfte Aufgabe.

Die beiden Fachwerke Fig. 73a und b sind zu untersuchen!

An dieses Beispiel möge eine besondere Betrachtung zu der allgemeinen Regel:

$$\text{Gurtstab} = \frac{\text{Biegungsmoment für gegenüberl. Knotenp.}}{\text{Abstand } r}$$

geknüpft werden. Es gibt nämlich Ausnahmefälle, selbst bei einfachen Dreieckfachwerken, in denen diese Regel nicht gilt.

Fig. 73a zeigt zunächst ein gewöhnliches Dreieckfachwerk in üblicher Stabanordnung. Hier ergibt sich der Gurtstab O_m in bekannter Weise:

$$\text{(I)} \qquad O_m = -\frac{A \cdot a - P_1 p_1}{r_o}.$$

Der Zähler auf der rechten Seite ist bekanntlich identisch mit dem Biegungsmoment M_m eines vollwandigen Balkens an der Stelle m, der die Lasten P_1 usw. zu tragen hätte (Fig. 73c):

$$\text{(II)} \qquad M_m = A \cdot a - P_1 p_1 .$$

Ist M_m vielleicht durch eine Formel ausgedrückt oder ist für M_m irgendeine Regel aufgestellt, so gilt diese auch für den obigen Zählerausdruck von O_m; denn beide Ausdrücke bieten ja keinen mathematischen Unterschied. Deshalb schreiben wir auch:

$$\text{(Ia)} \qquad O_m = -\frac{M_m}{r_o}.$$

So weit ist alles wie gewöhnlich.

Anders ist es bei dem Fachwerke Fig. 73b. Hier ist die Stabkraft O_m zunächst wieder ausgedrückt durch:

$$\text{(III)} \qquad O_m = -\frac{A \cdot a - P_1 \cdot p_1}{r_o}.$$

Jetzt ist aber der Zählerausdruck durchaus nicht dasselbe, wie das Biegungsmoment M_m eines einfachen Balkens mit denselben Lasten und an derselben Stelle m. Denn das letztere würde lauten (Fig. 73d):

$$\text{(IV)} \qquad M_m = A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 ,$$

da bei dem vollwandigen Balken zu dem Biegungsmomente M_m auch noch die Kraft P_2 gehört. Der Unterschied zwischen dem Zählerausdrucke von Formel (III) und dem Ausdrucke (IV) ist augenscheinlich dadurch zustande gekommen, daß der Bezugspunkt des Stabes O bereits seitlich von den Kräften liegt, zwischen denen der zugehörige Schnitt hindurchgeht. In solchen Fällen darf also nicht für O_m einfach das Biegungsmoment M_m der Stelle m eingesetzt werden.

Daß dieser Unterschied auch praktische Folgen hat, sieht man z. B. bei Belastung mit gleichmäßig verteilter Last (Fig. 73e und f). Für Fig. 73e könnte man einfach die bekannte Formel für das Biegungsmoment M_m eines gleichmäßig belasteten vollwandigen Balkens benutzen:

$$M_m = \frac{g}{2} x_m (l - x_m) ,$$

und würde also direkt hinschreiben:

$$O = -\frac{g}{2}\frac{x_m(l - x_m)}{r_o}.$$

Für Fig. 73f dürfte man nicht das Biegungsmoment M_m des entsprechend belasteten vollwandigen Balkens nehmen, da, wie

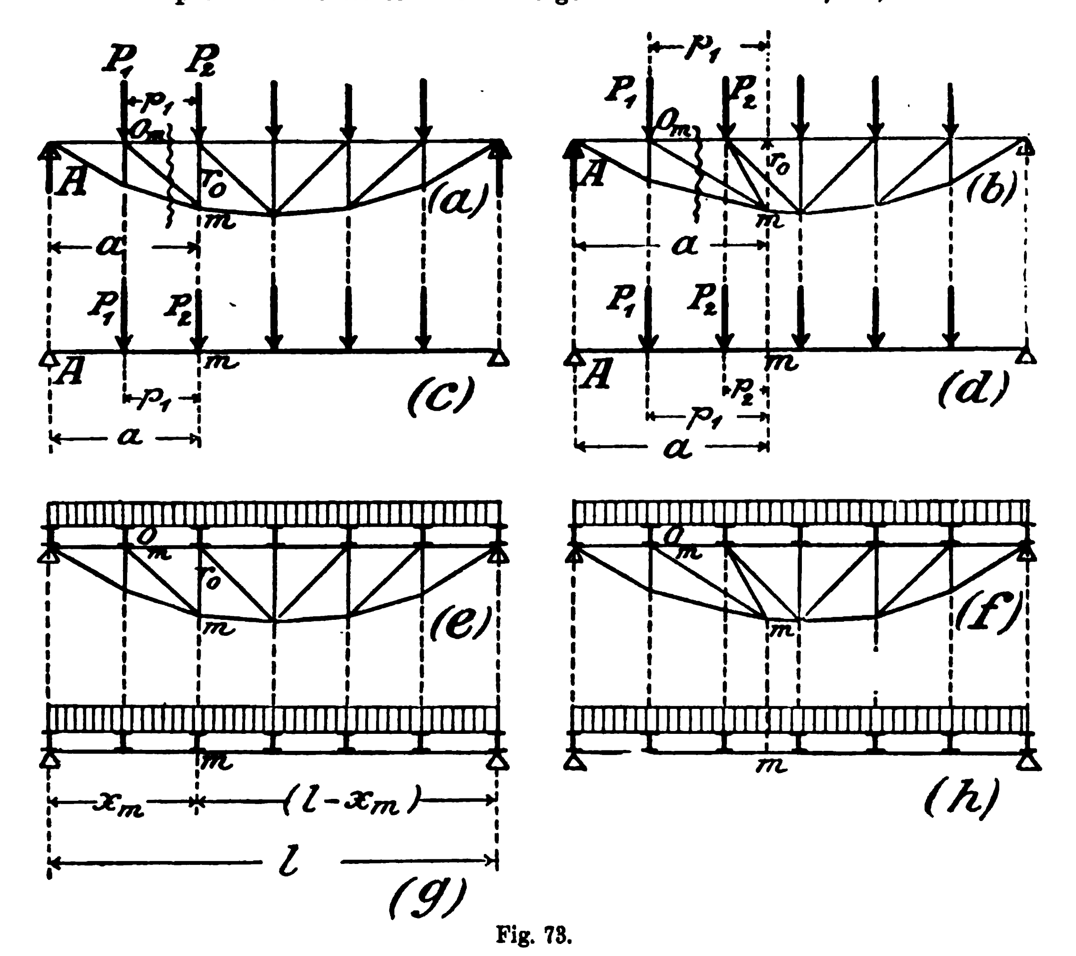


Fig. 73.

vorhin bei den Einzellasten gezeigt, dieser Schnitt ein anderes Moment hat als den Zählerausdruck in der Formel für O_m. Man müßte vielmehr die Knotenpunktlasten bestimmen und mit diesen weiterarbeiten (vgl. auch Abschnitt II, § 45, II).

Die allgemeine Regel: „Ein Gurtstab eines Dreieckfachwerkes ist gleich dem gewöhnlichen Biegungsmoment des gegenüberliegenden Knotenpunktes, dividiert durch das Lot r“, muß also dahin

eingeschränkt werden: „vorausgesetzt, daß dieser Knotenpunkt zwischen denselben Lasten liegt, wie der zu dem betreffenden Stabe gehörige Schnitt".

Die obigen Untersuchungen erlangen namentlich bei der Berechnung ansteigender Fachwerke eine praktische Bedeutung. Hierauf werden wir in Abschnitt II, § 45 genauer eingehen.

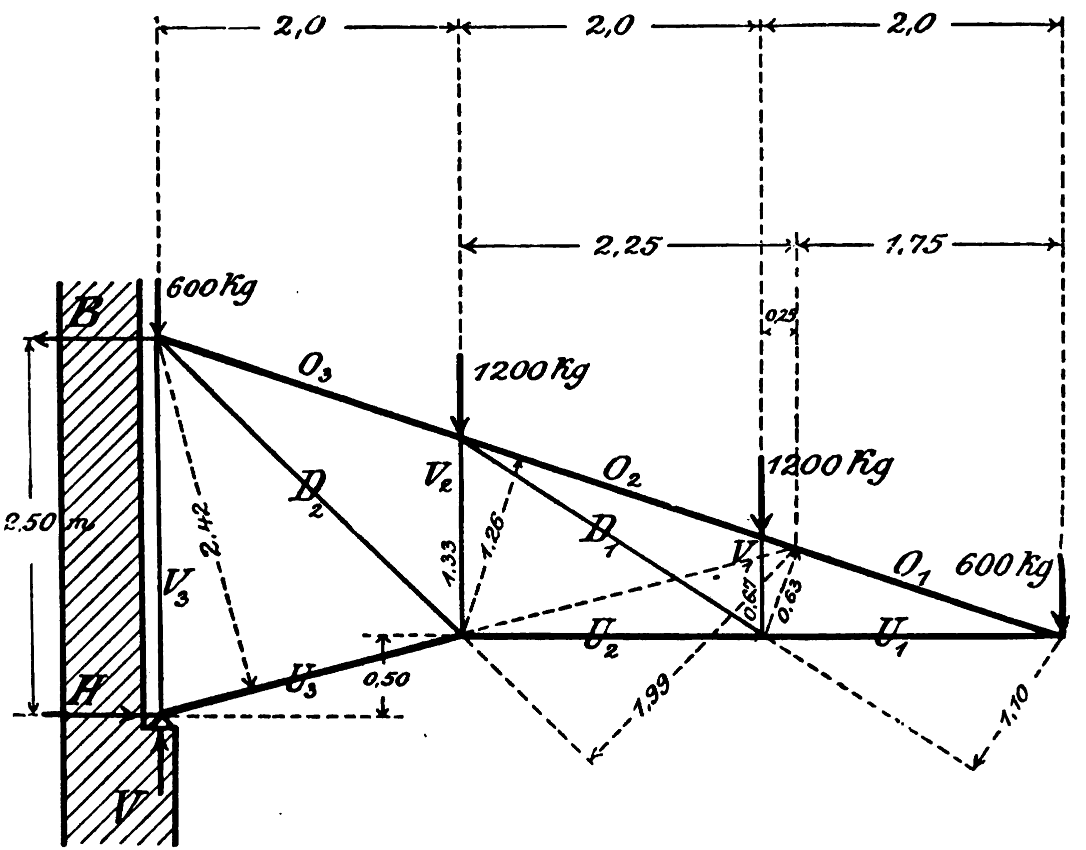


Fig. 74.

Zwölfte Aufgabe.

Das Kragdach Fig. 74 ist zu berechnen!

Auflagerkräfte:

$$V = (600 + 1200 + 1200 + 600) = 3600 \text{ kg},$$

$$H = 3600 \frac{(2{,}0 + 1{,}0)}{2{,}5} = 4320 \text{ kg},$$

$$B = 4320 \text{ kg}.$$

Die Berechnung geschehe nach der ursprünglichen *Ritter*schen Methode. Die Lote r sind aus der Zeichnung abzugreifen.

$$O_1, O_2 = +\frac{600 \cdot 2{,}0}{0{,}63} = +1900 \text{ kg},$$

$$O_3 = +\frac{600 \cdot 4{,}0 + 1200 \cdot 2{,}0}{1{,}26} = +3800 \text{ kg},$$

$$U_1 = -\frac{600 \cdot 2{,}0}{0{,}67} = -1800 \text{ kg},$$

$$U_2 = -\frac{600 \cdot 4{,}0 + 1200 \cdot 2{,}0}{1{,}33} = -3600 \text{ kg},$$

$$U_3 = -\frac{3600 \cdot 3{,}0}{2{,}42} = -4500 \text{ kg},$$

$$D_1 = +\frac{1200 \cdot 2{,}0}{1{,}10} = +2200 \text{ kg},$$

$$D_2 = \frac{-600 \cdot 1{,}75 + 1200\,(0{,}25 + 2{,}25)}{1{,}99} = +1000 \text{ kg},$$

$$V_1 = -1200 \text{ kg},$$

$$V_2 = -\frac{1200\,(2{,}0 + 4{,}0)}{4{,}0} = -1800 \text{ kg},$$

$$V_3 = -V + \frac{H \cdot 0{,}50}{2{,}00} = -2500 \text{ kg}.$$

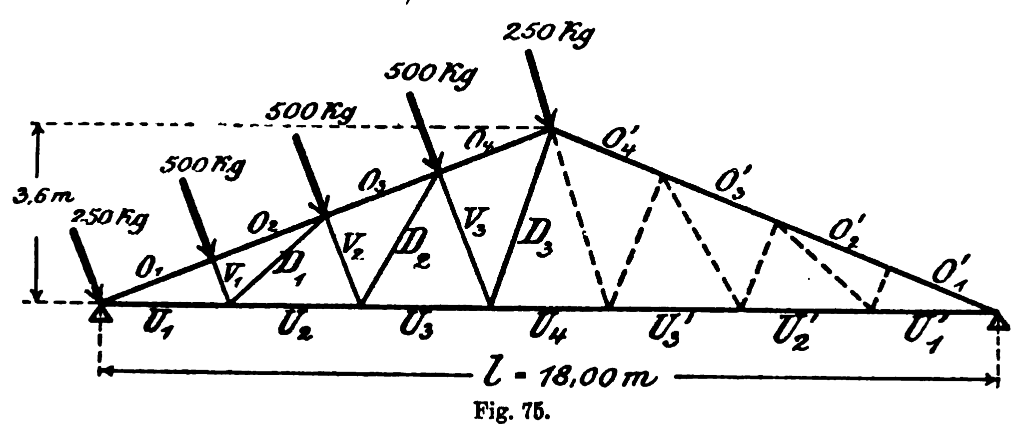


Fig. 75.

Übungsaufgabe: Der Leser berechne in derselben Weise den Binder Fig. 75.

Dreizehnte Aufgabe.

Das System Fig. 76 ist zu berechnen!

Wenn man das vorliegende System mittels Kräfteplan bestimmen will, kommt man glatt bis Knoten *3*. Dann aber stößt

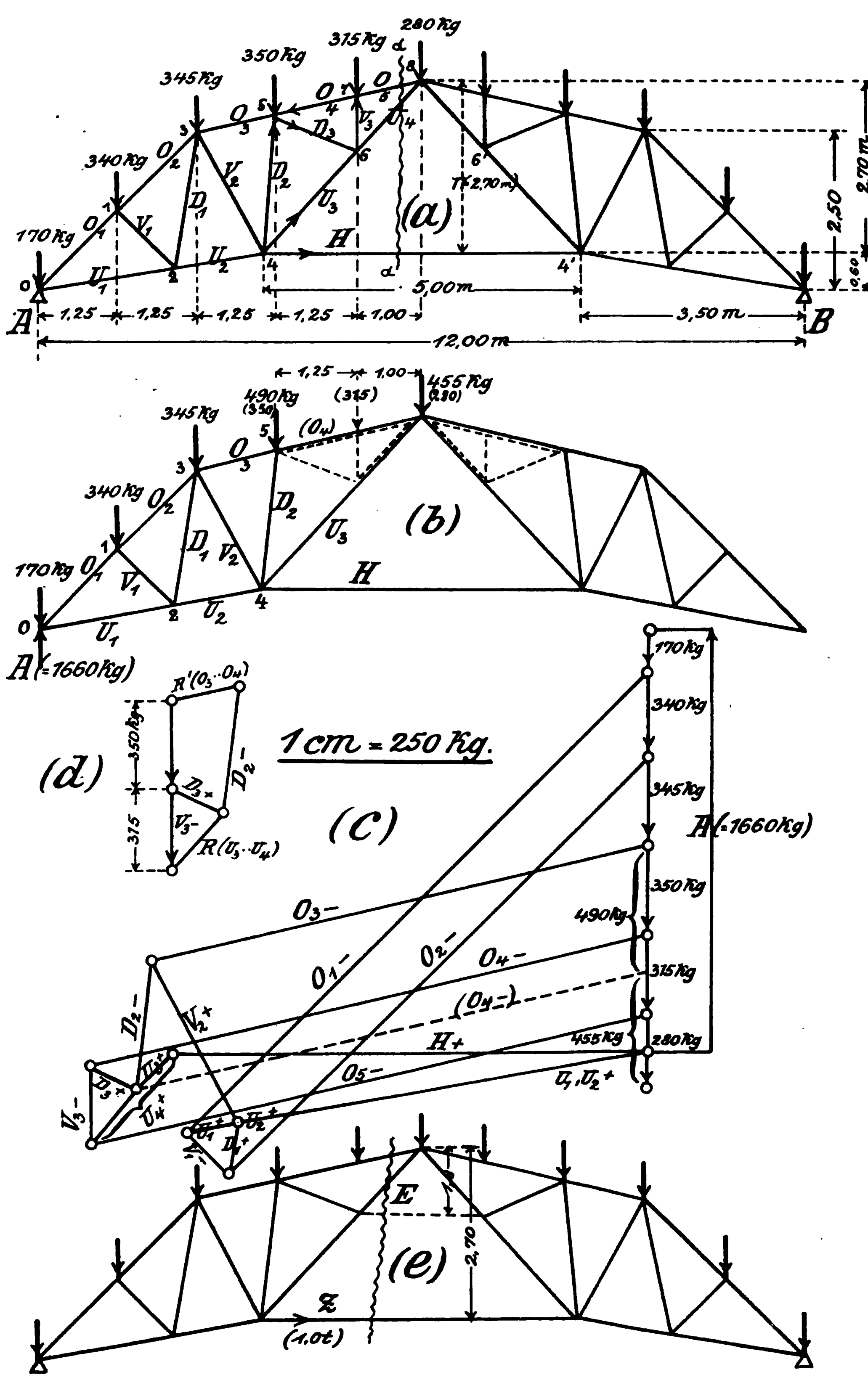


Fig. 76.

man sowohl bei Knoten *4* wie bei Knoten *5* auf mehr als zwei unbekannte Stäbe. Dies rührt daher, weil das Fachwerk nicht nur aus Dreiecken zusammengesetzt ist, sondern auch ein Polygon *4—6—8—6′—4′* mit fünf Knotenpunkten enthält. Letzteres ist also im statischen Sinne ein Fünfeck, wodurch die ganze Konstruktion zu einer „nicht einfachen" wird.

Man kann die Berechnung nach verschiedenen Methoden durchführen, die wir ja zum Teil auch schon durchgenommen haben.

Erste Lösung.

Wir bestimmen die Stabkraft H auf analytischem Wege. Aus dem Schnitte $\alpha—\alpha$ ergibt sich:

$$H = +\frac{M_8}{r}.$$

Das Moment M_8 kann man am einfachsten durch Zerlegung in Kräftepaare berechnen, da für die untersuchte Stelle die Querkraft gleich Null ist:

$$M_8 = 170 \cdot 0{,}0 + 340 \cdot 1{,}25 + 345 \cdot 2{,}50 + 350 \cdot 3{,}75 + 315 \cdot 500 + \frac{280}{2} \cdot 6{,}00$$
$$= 5000 \text{ mkg}.$$

[Besteht die Belastung aus indirekt wirkender, gleichmäßig verteilter Last, z. B. Dachlast auf Pfetten, so kann man auch direkt mit dieser verteilten Belastung rechnen, da für einen Belastungspunkt das Moment bei indirekter Belastung gleich dem ist be direkter Belastung.]

Aus M_8 folgt dann für den Stab H:

$$H = +\frac{5000}{2{,}70} = +1850 \text{ kg}.$$

Sobald aber H bekannt ist, kann man den Kräfteplan an Punkt *4* fortsetzen und glatt zu Ende zeichnen.

Zweite Lösung.

Wir zerlegen das Fachwerk in Grundsystem und eingehängte Zwischensysteme (Fig. 76b). Die Last von 315 kg, die das Zwischensystem trägt, muß nach dem Hebelgesetz auf die angrenzenden Knotenpunkte übertragen werden. Hierdurch entstehen die neuen Knotenlasten (für die linke Binderseite gezeichnet):

im Punkte *5*: $P = 350 + \frac{315 \cdot 1{,}00}{2{,}25} = 350 + 140 = 490$ kg,

„ „ *8*: $P = 280 + 175 = 455$ kg.

Der Kräfteplan wird nun zweckmäßig in folgender Weise gezeichnet: Wir tragen die äußeren Kräfte von Fig. 76b auf (Fig. 76c) und erledigen zunächst die Knoten *0—3*. Dann nehmen wir Knoten *5* des Grundsystems vor. (Knotenlast 490 kg.) Das zu diesem Knotenpunkt gezeichnete Kräftepolygon liefert u. a. die Spannkraft D_2, und zwar ist diese Spannkraft bereits die endgültige, da ja der Stab D_2 in Fig. 76b nichts mit dem Zwischenfachwerk zu tun hat. Sobald wir aber erst D_2 kennen, verzichten wir auf die ganze Zerlegung und kehren zu dem ursprünglichen System zurück, da wir jetzt sowohl bei Knoten *4* als auch bei *5* glatt weiter kommen.

Die Zerlegung in Grund- und Zwischensystem haben wir also nur vorübergehend gebraucht, um die Kraft D_2 zu bestimmen. Im Kräfteplan ist nur eine Hilfslinie nötig, nämlich die Hilfsgröße S' des Stabes O_4.

Dritte Lösung.

Wir suchen uns von den folgenden Knotenpunkten einen solchen heraus, an dem sich eine Kraft direkt bestimmen läßt. Mitunter lassen sich nämlich an einigen Knotenpunkten einzelne Stäbe direkt angeben, ohne daß man das übrige System zu kennen braucht. Solch ein Knotenpunkt ist in Fig. 76a der Punkt *7*. Hier ergibt sich (aus der Gleichung $R_y = 0$ oder durch Aufzeichnen des Kräftepolygons Fig. 76d) zunächst die Stabkraft $V_3 = -315$ kg. Nun gehen wir zu Punkt *6*. An diesem greifen außer der soeben ermittelten Kraft V_3 die drei unbekannten Stabkräfte D_3, U_3 und U_4 an. Der Umstand aber, daß zwei von diesen Kräften, nämlich U_3 und U_4, in einer Geraden liegen, ermöglicht uns, die dritte Kraft (D_3) zu bestimmen: Wir denken uns die beiden Kräfte U_3 und U_4 durch ihre Resultierende R ersetzt. Die Lage dieser Resultierenden können wir angeben; sie muß mit der Richtung U_3, U_4 zusammenfallen. Wir haben jetzt also am Punkte *6* außer der bekannten Kraft V_3 nur *zwei* unbekannte Kräfte, D_3 und R. Da die Richtungen dieser beiden Kräfte bekannt sind, finden wir ihre Größen, indem wir das zu dem Punkte *6* gehörige Kräftepolygon ziehen (Fig. 76d). Somit ist D_3 bestimmt.

Am Punkte *5* ist dieselbe Rechnung. Wir haben hier zwar außer O_4 noch *drei* Stabkräfte, nämlich O_3, O_4 und D_2. Da aber zwei von diesen Stäben in einer Geraden liegen, können wir die Richtung angeben, die die Resultierende R' dieser beiden

Stäbe hat (zusammenfallend mit der Stabrichtung O_3, O_4). Um ferner die Größen von R' und D_2 zu finden, reihen wir zunächst die bereits bekannten Kräfte D_3 und 350 kg aneinander (Fig. 76d), ziehen die Parallelen zu den Richtungen von D_2 und R' und finden somit die Größe dieser Kräfte.

Durch diese Zwischenbetrachtung haben wir also die Spannkraft D_2 gefunden. Nun können wir einen Kräfteplan zeichnen, indem wir, sobald wir an Punkt *4* oder *5* kommen, die vorhin bestimmte Kraft D_2 als bekannte Kraft einfügen.

Diese Methode besteht also darin, daß an einem Punkte mit *drei* unbekannten Stabkräften, von denen aber *zwei in einer Geraden liegen*, die dritte Kraft direkt durch Aufzeichnen des zu dem Punkte gehörigen Kräftepolygons gefunden werden kann.

Vierte Lösung.

Als nie versagendes Mittel bei nicht-einfachen Systemen sei an die *Ersatzstabmethode* erinnert. In Fig. 76e würde man den Stab Z als Störungsstab nehmen und dafür einen Ersatzstab E einfügen (Fig. 76e). Die Gleichung zur Berechnung von Z lautet dann:

$$E = E_0 + Z \cdot E_{Z=1} = 0\,,$$

$$Z = -\frac{E_0}{E_{Z=1}}\,.$$

Die Spannkraft E_0 (Spannkraft im Ersatzstabe, falls nur die äußeren Lasten wirken) kann z. B. mittels Kräfteplan bestimmt werden, da das Ersatzfachwerk ein einfaches Dreieckfachwerk ist. Es würde sich ergeben (man zeichne den Plan):

$$E_0 = +4240 \text{ kg.}$$

Der Wert $E_{Z=1}$ (Spannkraft im Ersatzstabe, falls nur der Störungsstab, und zwar in der Größe $= 1{,}0$, wirkt) würde sich mittels eines anderen Kräfteplanes oder direkt nach *Ritter* ergeben:

$$E_{Z=1} = -\frac{1{,}0 \cdot 2{,}70}{1{,}18} = -2{,}29 \text{ kg} \quad (\text{für } Z = 1{,}0 \text{ kg}).$$

Somit folgt schließlich für Z:

$$Z = -\frac{+4240}{-2{,}29} = +1850 \text{ kg.}$$

Sobald aber Z bestimmt ist, läßt sich die weitere Berechnung ohne Schwierigkeit durchführen.

Wie man sieht, ist bei diesem Beispiele die Ersatzstabmethode die umständlichste. Ihr Wert beginnt eben erst dann, wenn andere Hilfsmittel versagen.

Außer den angegebenen Lösungen gibt es noch ein Dutzend anderer, die auf den verschiedensten Kunstgriffen beruhen. Die Aufzählung dürfte unnötig sein.

Vierzehnte Aufgabe.

Der Binder Fig. 77 ist zu berechnen!

Das System besteht aus einer unteren, durch zweistäbigen Anschluß aufgebauten Scheibe, an die der obere Teil ebenfalls zweistäbig angeschlossen ist. Infolge dieses korrekten Aufbaues läßt sich für das Ganze auch ein einfacher Kräfteplan zeichnen.

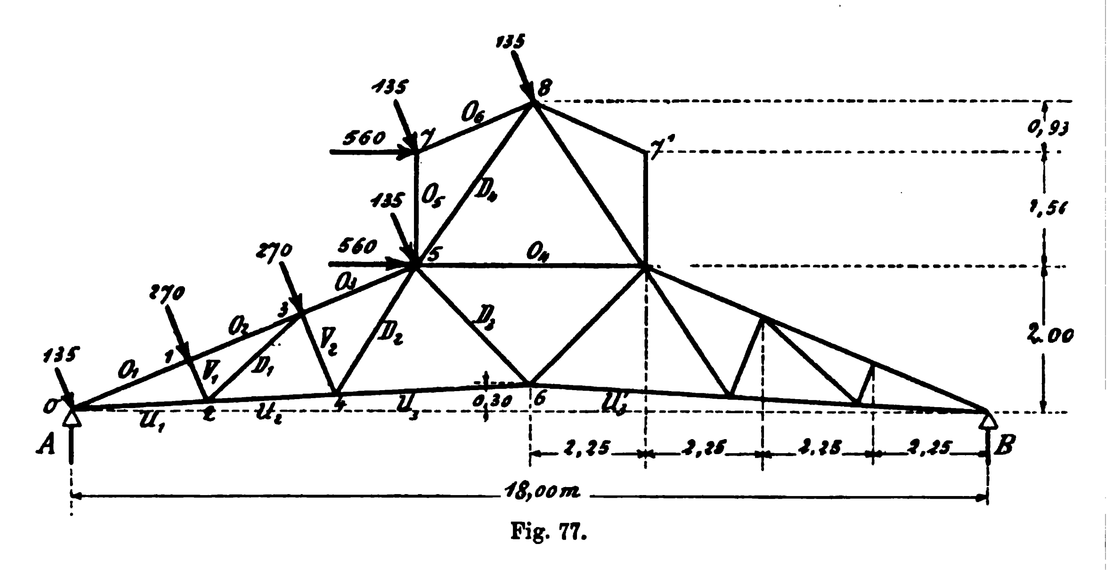


Fig. 77.

Allerdings kommt man, von dem Punkte *0* ausgehend, an den Knoten *5* und *6* nicht weiter. Dann läßt man aber den unteren Teil sein und geht zu dem Aufbau über. Hier kann man der Reihe nach die Punkte *7*, *7'* und *8* erledigen. Dadurch hat man dann die Stäbe O_5 und D_4 gefunden und kann an Punkt *5* des unteren Teiles weitergehen.

Bei derartigen Konstruktionen mit zweistäbigem Anschlusse kann man stets eine solche Reihenfolge der Knotenpunkte ausfindig machen, daß an jedem derselben nur zwei unbekannte Kräfte auftreten.

Übungsaufgabe: Man zeichne nach den obigen Erklärungen den Kräfteplan auf. Natürlich beginnt man mit dem Polygon der äußeren Kräfte und geht dann erst zu den einzelnen Knotenpunkten über.

Fünfzehnte Aufgabe.

Der Parabelträger Fig. 78a ist für eine gleichmäßig verteilte Last von q kg pro m Grundlinie zu berechnen!

Besonders interessant ist die Berechnung der Diagonalen bei diesem Belastungsfalle. Die Formel lautet bekanntlich:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right].$$

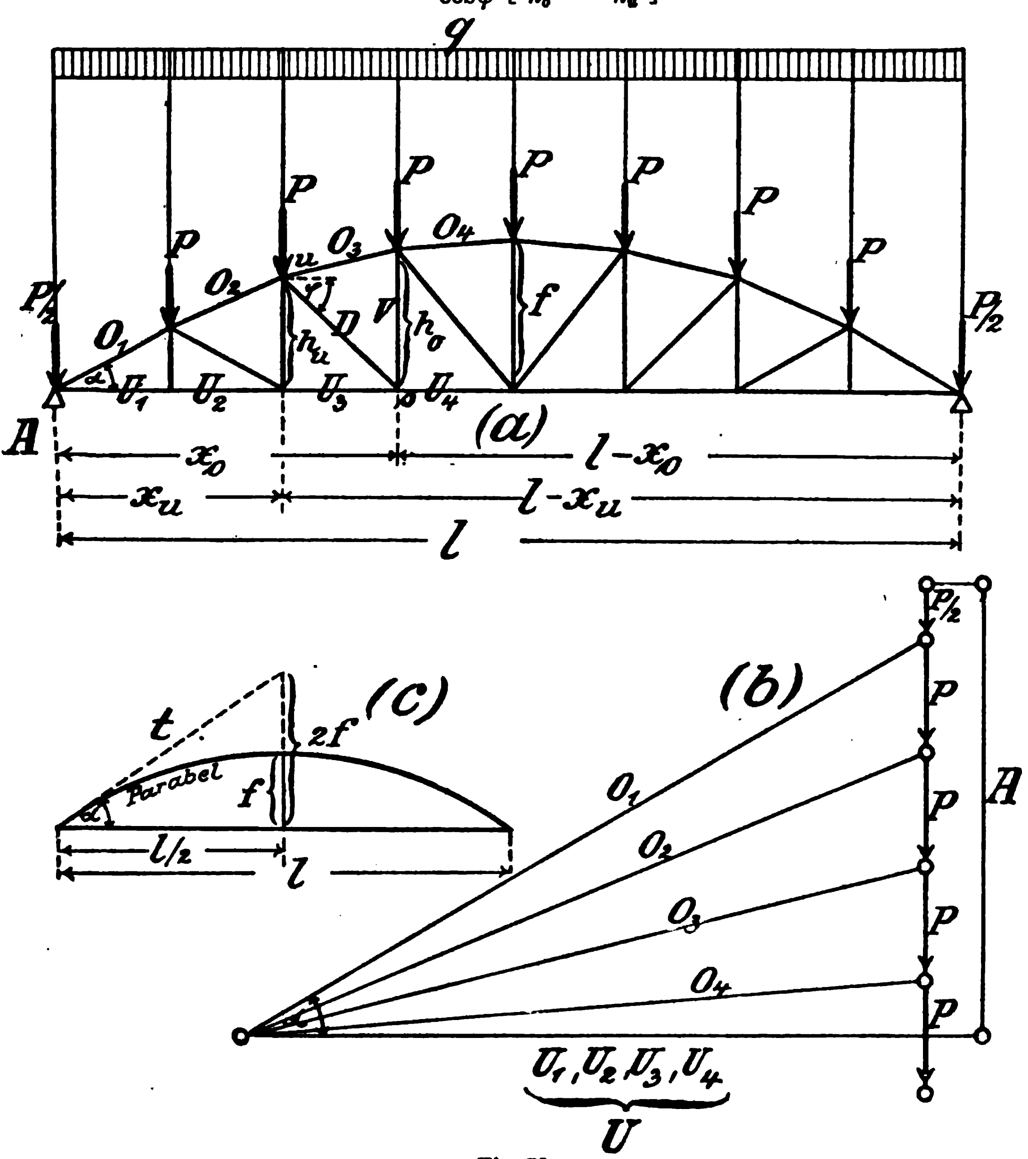


Fig. 78.

Nun sei im vorliegenden Fall die Spannweite l, der Stich f, die Belastung pro lfd. m (in der Länge gemessen) q. Dann sind (Fig. 78 a)

$$M_o = \frac{q}{2} x_o(l - x_o)\,, \qquad M_u = \frac{q}{2} x_u(l - x_u)\,;$$

$$h_o = \frac{4f}{l^2} x_o(l - x_o)\,, \qquad h_u = \frac{4f}{l^2} x_u(l - x_u)\,.$$

Setzt man nun diese Werte in die obige Formel für D ein, so hebt sich bei der Division von $M_o : h_o$ das Glied $x_o(l - x_o)$ fort, entsprechend bei $M_u : h_u$ das Glied $x_u(l - x_u)$, und es bleibt übrig:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{\frac{q}{2}}{\frac{4f}{l^2}} - \frac{\frac{q}{2}}{\frac{4f}{l^2}}\right] = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot 0\,,$$

$$\text{(I)} \qquad D = 0\,.$$

Die Diagonalen sind also bei dem vorliegenden Belastungsfalle spannungslos. Aus dem Gleichgewicht der unteren Knotenpunkte folgt dann sofort, daß auch die Vertikalen spannungslos sind:

$$\text{(Ia)} \qquad V = 0\,.$$

Insgesamt haben wir also:

Bei einem Parabelträger mit gleichmäßiger Belastung des Obergurtes sind Diagonalen und Vertikalen spannungslos.

Hängt die gleichmäßige Belastung am Untergurt, so erhalten die Vertikalen je die betreffende Knotenpunktslast. Die Diagonalen sind auch in diesem Falle spannungslos.

In Fig. 78b ist zu dem Fachwerk Fig. 78a der Kräfteplan gezeichnet. Auch in diesem zeigt sich natürlich, daß Diagonalen und Vertikalen gleich Null werden. Ferner lassen sich aus dem Kräfteplan noch folgende Aussagen ablesen (Fig. 78a und b):

1) Alle Untergurte erhalten die gleiche Spannung, nämlich

$$\text{(II)} \qquad U = +\frac{A - P/2}{\mathrm{tg}\cdot\alpha}$$ [α = Neigungswinkel des ersten Obergurtstabes].

2) Die größte Spannung im Obergurt tritt am Auflager auf und ist:

$$\text{(III)} \qquad O_1 = -\frac{A - P/2}{\sin\alpha}\,.$$

Schließlich wollen wir uns zur Berechnung des Neigungswinkels α einer Parabel noch die mathematische Regel merken: Die Tan-

gente t einer Parabel an ihrem Auflagerpunkte schneidet die Symmetrieachse im Abstande $2f$ von der Sehne (Fig. 78c). Also ist:

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2f}{l/2} = \frac{4f}{l}.$$

Ein solches Parabelfachwerk mit feststehender gleichmäßiger Belastung wird also einfach in der Weise berechnet, daß man zunächst aus der Spannweite l und dem Stich f den Winkel α bestimmt und dann nach den Formeln (II) und (III) die Spannkräfte hinschreibt.

Sechzehnte Aufgabe.

Bei dem Fachwerk Fig. 79 ist der Stab H analytisch zu bestimmen!

Für den Stab H läßt sich kein Schnitt angeben, der nur durch drei Stäbe geht. Es werden vielmehr außer der Kraft H

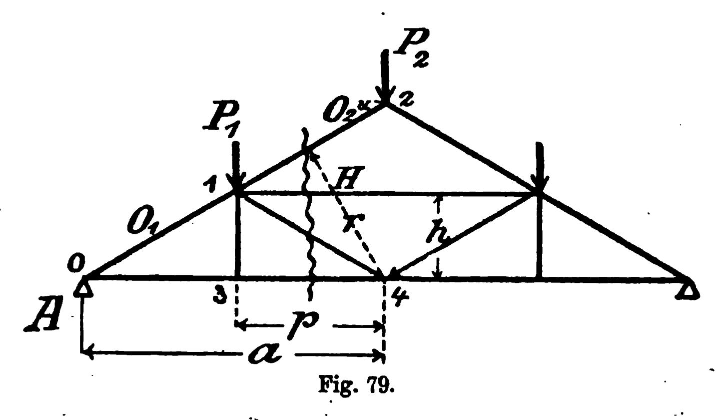


Fig. 79.

immer mindestens noch drei andere unbekannte Stäbe getroffen. Infolgedessen ist es nicht möglich, die Momentengleichung so aufzustellen, daß sämtliche anderen Stäbe aus der Gleichung herausfallen und nur der Stab H als einzige Unbekannte übrigbleibt. Trotzdem läßt sich auch in diesem Falle die Kraft H nach der *Ritter*schen Methode ermitteln, nur muß man einen kleinen Umweg einschlagen:

Zunächst bestimmen wir den Stab O_2. Er ergibt sich am einfachsten aus dem Gleichgewicht des Knotens 2: $O_2 = -\frac{1}{2}\frac{P_2}{\sin\alpha}$.

Jetzt ist also O_2 als bekannte Kraft anzusehen (genau so wie die Lasten P), und wir finden H, indem wir für den Punkt 4 die Momentengleichung aufstellen:

$$H \cdot h + A \cdot a - P_1 \cdot p + O_2 \cdot r = 0.$$

[Hierin ist O_2 zunächst als Zugstab eingeführt und nachher also mit seinem richtigen Vorzeichen einzusetzen.] Aus der Gleichung folgt dann:

$$H = \frac{1}{h}(-A \cdot a + P_1 \cdot p_1 - O_2 r) .$$

Zusatz: Die *Ritter*sche Methode läßt sich also auch dann anwenden, wenn der betreffende Schnitt mehr als drei Stäbe trifft. Nur muß dann durch Zwischenrechnung gesorgt werden, daß schließlich nur drei unbekannte Stäbe übrigbleiben. Mitunter trifft es sich, daß ein zur Bestimmung eines Stabes X gelegter Schnitt zwar noch mehrere andere Stäbe trifft, diese letzteren aber zufällig alle durch ein und denselben Punkt gehen. Dann wird dieser Punkt natürlich als Bezugspunkt genommen und hierdurch eine Momentengleichung erhalten, in der nur die eine gesuchte Stabkraft X vorkommt.

Siebzehnte Aufgabe.

Die Stütze Fig. 80 ist zu berechnen!

Die Stütze wird genau so berechnet wie jeder andere Parallelträger. Um den Stab R in Fig. 80 zu finden, wird der Schnitt α—α gelegt und Punkt r als Bezugspunkt einer Momentengleichung genommen (Stab R als Zug eingeführt):

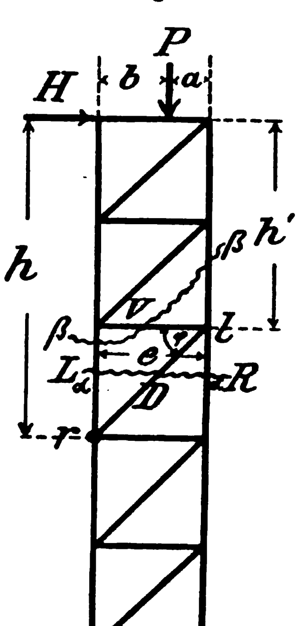


Fig. 80.

$$R \cdot e + H \cdot h + P \cdot b = 0 ,$$

$$R = \frac{1}{e}(-H \cdot h - P \cdot b) ,$$

$$\text{(I)} \qquad R = -\frac{H \cdot h}{e} - \frac{P \cdot b}{e} .$$

Entsprechend ergibt sich:

$$L = \frac{1}{e}(H \cdot h' - P \cdot a) ,$$

$$\text{(Ib)} \qquad L = +\frac{H \cdot h'}{e} - \frac{P \cdot a}{e} .$$

Die Diagonalen D und die Vertikalen V folgen aus der Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$:

$$\text{(II)} \qquad D = +\frac{H}{\cos\varphi} , \qquad \text{[Schnitt } \alpha\text{—}\alpha\text{]}$$

$$\text{(III)} \qquad V = -H . \qquad \text{[Schnitt } \beta\text{—}\beta\text{]}$$

Sind die Kräfte über die ganze Stütze verteilt, so muß natürlich zu jedem Schnitte die Horizontal-Kraftsumme H und die Momentensumme M berechnet werden. Hierbei geht man in bekannter Weise so vor, daß man zunächst die Kraftsummen nacheinander entwickelt und aus diesen die Momentensummen M, bzw. die Hilfswerte $\frac{M}{\lambda}$.

Achtzehnte Aufgabe.

Die Gerüste Fig. 81a, b und c sind zu untersuchen!

a) Gerüst Fig. 81a. Es handelt sich besonders um die Stäbe $S_1 \ldots S_4$. Aus Punkt *1* folgt, daß der Stab $S_1 = 0$ wird. Denn hier laufen drei Stäbe zusammen, von denen zwei in einer Ge-

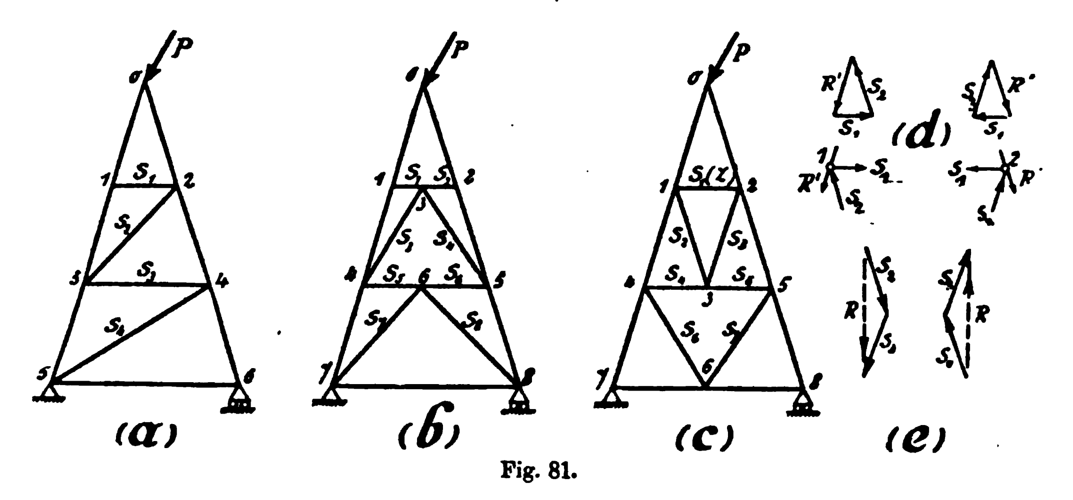


Fig. 81.

raden liegen. Da nun der Punkt selber unbelastet ist, muß der dritte Stab gleich Null sein (§ 6, sechste Aufgabe). Somit ist S_1 erledigt.

Daraus folgt weiter, daß auch $S_2 = 0$ ist. Denn am Knotenpunkt *2* fällt $S_1 = 0$ fort, so daß derselbe Fall vorliegt wie bei Knoten *1*.

In entsprechender Weise ergibt sich, daß $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$ ist. Bei dem Gerüst Fig. 81a sind also sämtliche Füllungsstäbe gleich Null, vorausgesetzt, daß die Knotenpunkte *1* .. *4* unbelastet sind. Die Last P an der Spitze wird vielmehr nur von den beiden schrägen Pfosten aufgenommen. [Die Füllungsstäbe dienen nur zur Einschränkung der Knicklänge.]

b) Gerüst Fig. 81b. Zunächst ist ersichtlich, daß $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ ist. Aber auch S_3 und S_4 sind gleich Null. Denn der

Knoten *3* stellt einen Punkt dar, der durch zwei Kräfte beansprucht ist, nämlich S_3 und S_4. (S_1 und S_2 sind gleich Null.) Zwei Kräfte können aber nur dann einen Punkt im Gleichgewicht halten, wenn sie in ein und derselben Geraden liegen. Andernfalls müssen sie beide gleich Null sein, falls der Punkt im Ruhezustand sein soll, da sich sonst eine Resultierende ergeben würde. Aus dem Ruhezustand des Punktes *3* folgt also, daß die beiden Kräfte S_3 und S_4, da sie nicht in einer Geraden liegen, beide gleich Null sein müssen. In derselben Weise ergibt sich, daß $S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0$ ist. Also auch bei der Anordnung Fig. 81b sind die Füllungsstäbe spannungslos, vorausgesetzt, daß die Last nur an der Spitze angreift.

c) Gerüst Fig. 81c. Auch hier sind sämtliche Füllungsstäbe spannungslos. Der Beweis hierfür ist allerdings etwas umständlicher. Wir wollen ihn in folgender Weise indirekt führen: Zunächst nehmen wir an, der Füllungsstab S_1 wäre nicht gleich Null, sondern hätte einen bestimmten Wert. Aus diesem angenommenen Wert von S_1 ergeben sich dann bestimmte Werte für S_2 und S_3. Nun zeigt es sich aber, daß S_2 und S_3 diese Werte auf keinen Fall haben können, da sonst der Punkt *3* nicht im Gleichgewicht sein könnte. Daraus folgt aber, zurückschließend, daß die Annahme über den Stab S_1 falsch war; d. h. dieser Stab hat in Wirklichkeit keine Spannung, sondern ist gleich Null.

Dieser indirekte Beweis ist in Fig. 81d und e durchgeführt. Wäre S_1 nicht gleich Null, sondern z. B. eine Zugkraft von irgendeiner Größe, so würde dieser Stab nach Fig. 81d auf seine Knotenpunkte *1* und *2* wirken. Aus dem Gleichgewicht der Punkte *1* und *2* folgen dann aber sofort auch für die Stäbe S_2 und S_3 bestimmte Spannungen. Und zwar zeigen die zu den Punkten *1* und *2* gezeichneten Kräftepolygone, — und das ist das wichtigste —, daß die Stäbe S_2 und S_3 gleiche Vorzeichen haben. In Fig. 81d z. B. hat sich für beide Stäbe Druck ergeben. (Hätten wir für S_1 eine bestimmte Druckkraft angenommen, so hätte sich für S_2 und S_3 Zug ergeben.)

Nun gehen wir zu Punkt *3*. Hier greifen S_2 und S_3 und ferner S_4 und S_5 an. Die ersten beiden mögen zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden. Da S_2 und S_3, wie vorhin gezeigt ist, gleiche Vorzeichen haben, ergeben sie eine Resultierende, die nicht horizontal geht. (Vgl. Fig. 81e, wo S_2 und S_3 für die beiden Fälle, beide Zug oder beide Druck, zusammengesetzt sind.) Andererseits folgt aber aus dem Gleichgewicht des Punktes *3*,

daß S_2 und S_3 eine horizontal verlaufende Resultierende haben müßten, da ja auch die beiden anderen Stäbe, die S_2 und S_3 das Gleichgewicht halten müssen, horizontal verlaufen. Wir haben also den Widerspruch, daß die beiden Stäbe S_2 und S_3 eine Resultierende ergeben würden, die gemäß dem Gleichgewicht des Punktes *3* unmöglich ist. Da nun die Rechnung selber richtig ist, muß die Annahme, auf der sich die Rechnung aufbaut, falsch sein; d. h. wir dürfen für den Stab S_1 keine Spannkraft annehmen, sondern müssen ihn gleich Null setzen. Wenn wir dieses tun, dann ist auch S_2 und S_3 gleich Null und ferner die Resultierende von S_2 und S_3 gleich Null, und es steht dann auch nichts im Wege, daß am Punkte *3* Gleichgewicht herrscht. Somit haben wir auf indirekte Weise bewiesen, daß der Stab S_1 die Spannkraft Null hat. Aus $S_1 = 0$ folgt weiter, daß $S_2 = 0$ und $S_3 = 0$ ist.

In derselben Weise läßt sich dann zeigen, daß $S_4 = S_5 = 0$ und ferner S_6 und $S_7 = 0$ sein müssen. Somit ist auch für die Stütze Fig. 81c bewiesen, daß bei der daselbst angenommenen Belastung die Füllungsstäbe die Spannkraft Null haben.

Zusatz: Natürlich läßt sich die Untersuchung der Fachwerke Fig. 81 auch in systematischer Weise so durchführen, daß man sie mittels der Ersatzstabmethode in einfache Dreieckfachwerke umformt. In Fig. 81c könnte man z. B. den Stab S_1 als Störungsstab Z nehmen und dafür einen Ersatzstab E zwischen die Knoten *3* und *6* einziehen. Dann lautet die Gleichung zur Berechnung von S_1:

$$E_0 + Z \cdot E_{Z=1} = 0\,,$$

$$Z = -\frac{E_0}{E_{Z=1}}\,.$$

Wenn man nun das Ersatzfachwerk aufzeichnet, so sieht man zunächst, daß bei dem Zustande $Z = 0$ die Stäbe S_2 und S_3 gleich Null werden. Daraus folgt dann weiter, daß auch der Stab E (zwischen den Knoten *3* und *6*) gleich Null wird. In der obigen Gleichung hat also der Zähler E_0 den Wert Null. Daraus folgt, daß auch $Z = 0$ wird. [Der Nenner $E_{Z=1}$ hat einen bestimmten Wert.] Somit ist auch mittels der Ersatzstabmethode bewiesen, daß bei den gezeichneten Belastungszuständen der Stab $S_1 = 0$ ist. Entsprechend ergibt sich die Spannungslosigkeit der anderen Stäbe.

Neunzehnte Aufgabe.

Der Gerüstpfeiler Fig. 82a ist für die Horizontalkraft P zu berechnen!

Das Gerüst sei in den Punkten *9* und *10* fest gelagert. Im ganzen sind also vier Auflagerunbekannte; die Konstruktion ist äußerlich einfach statisch unbestimmt. Bei der Berechnung derartiger Tragwerke kann man aber, falls es sich um kleinere Kon-

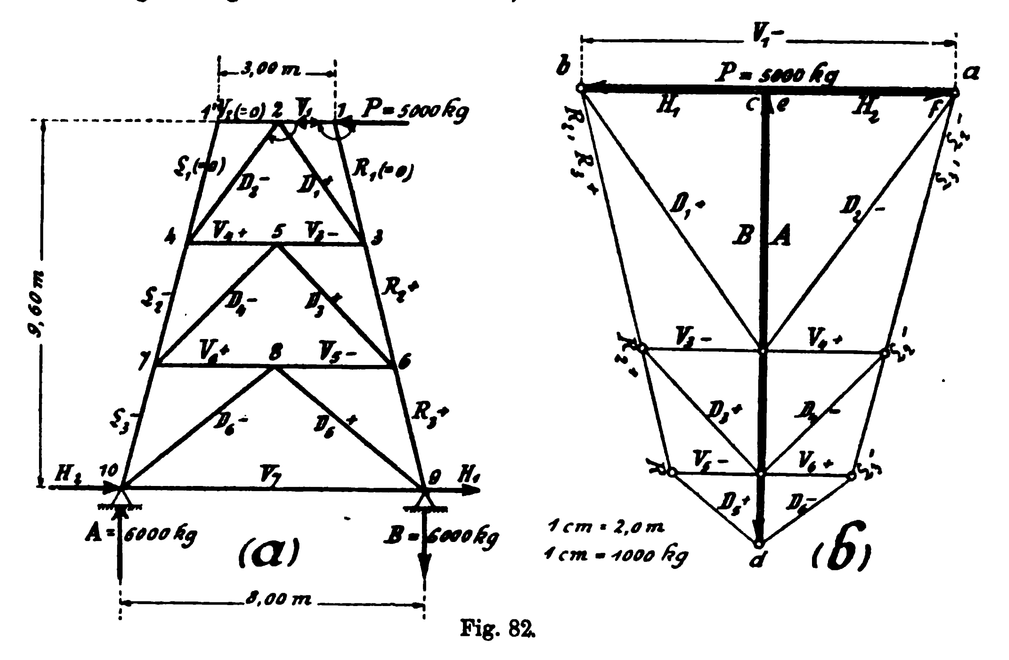


Fig. 82.

struktionen handelt, die Annahme machen, daß die Horizontalkräfte sich gleichmäßig auf beide Lager verteilen. Dann wird für Fig. 82a:

$$H_1 = H_2 = \frac{1}{2} 5000 = 2500 \text{ kg}.$$

Ferner ergeben sich die anderen Lagerkräfte:

$$A = \frac{5000 \cdot 9{,}60}{8{,}00} = 6000 \text{ kg}, \quad B = -A\,.$$

Diese Lagerkräfte sind nun am Fachwerke (außerhalb der Gurtstäbe) eingezeichnet. Die weitere Berechnung mittels Kräfteplan bietet dann keine Besonderheiten.

Übungsaufgabe. Berechne das Gerüst für den Fall, daß bei A ein festes, bei B ein bewegliches Lager angeordnet ist. [Es ändert sich nur die Spannkraft des Stabes V_7, und zwar wird $V_7 = -2500$ kg.

Zwanzigste Aufgabe.

Der Fachwerkträger Fig. 83 ist nach der Culmannschen Methode für eine Belastung mit $P = 1{,}0$ t zu berechnen!

a) Die *Culmann*sche Methode besteht bekanntlich im folgenden (§ 9): Um die drei von einem Schnitte getroffenen Stäbe O_8, D_8 und U_8 zu bestimmen, betrachten wir denjenigen Trägerteil, an dem im ganzen nur vier Kräfte angreifen. In Fig. 83a ist dies der linke Teil, da hier zu den genannten drei Kräften nur noch der Auflagerdruck A als weitere angreifende Kraft hinzukommt. Die Kraft A läßt sich aus der Größe und Stellung der Last finden. $\left(\text{In Fig. 83a ist } A = \frac{3}{8} = 0{,}375 \text{ t.}\right)$ Um auch die anderen Kräfte zu finden, bringen wir je zwei und zwei der vier Kräfte zum Schnitt, verbinden die beiden Schnittpunkte durch eine Hilfsgerade L, zerlegen die bekannte Kraft A in Richtung dieser Hilfsgeraden und der einen Kraft, und schließlich die in Richtung der Hilfsgeraden fallende Komponente noch in Richtung der beiden anderen Kräfte.

Für Fig. 83a wäre hiernach folgender Rechnungsgang: Von den vier Kräften A, O_8, D_8 und U_8 sind A und O_8 im Punkte 0, D_8 und U_8 im Punkte m zum Schnitt gebracht. Diese beiden Schnittpunkte sind durch die Hilfsgerade L verbunden. Nun wird in einer besonderen Figur (Fig. 83b) die bekannte Kraft A in Richtung von L und O_8 zerlegt, und schließlich wird die hierdurch erhaltene Seitenkraft L noch weiter zerlegt in U_8 und D_8. Die Pfeile werden in dieser Zerlegungsfigur so eingezeichnet, daß sie von der Kraft A fortlaufend herumgehen. Will man nur eine der vom Schnitte getroffenen Kräfte haben, z. B. die Kraft O_8, so bringt man gerade diese mit der bekannten Kraft A zum Schnitt, zieht die Hilfsgerade L und zerlegt dann die bekannte Kraft (A) in Richtung der gesuchten Kraft (O_8) und der Hilfsgeraden. Mit anderen Worten: Man zeichnet die Zerlegungsfigur gerade so weit, wie man sie braucht (Fig. 83c).

Würde die Last P links vom Schnitte stehen, so hätten wir hier fünf angreifende Kräfte. Dann läßt sich die *Culmann*sche Methode am linken Trägerteil nicht durchführen (es sei denn, daß man A und P zunächst zu einer Resultierenden vereinigt). Dafür haben wir jetzt aber den rechten Trägerteil mit nur vier Kräften (B, O_8, D_8, U_8). Um also für diese Laststellung die Kräfte O_8, D_8 und U_8 zu finden, verbinden wir z. B. den Schnittpunkt 8 von O_8 und B mit dem Schnittpunkt m von D_8 und U_8 und zer-

legen nun in einer besonderen Figur die Kraft B nach O_3 und L' und schließlich L' noch weiter in D_3 und U_3 (Fig. 83d). Will man auch bei dieser Laststellung nur eine Kraft haben, z. B. O_3, so zeichnet man natürlich das Zerlegungspolygon nur so weit, daß gerade diese eine Kraft zu entnehmen ist (Fig. 83e).

b) Dieses soeben beschriebene Verfahren ist nun in Fig. 83f und g benutzt, um die Spannkraft O_3 für die verschiedenen Stellungen, die die Last $P = 1{,}0$ t auf dem Träger einnehmen kann, zu bestimmen. Zunächst ist in Fig. 83f die Einflußlinie für den Auflagerdruck A gezeichnet (s. Band I, § 22). Die Bedeutung dieser Linie ist bekanntlich folgende: Steht die Last $P = 1{,}0$ t beispielsweise im Knotenpunkt *5* des Trägers, so gibt die unter dieser Last gemessene Ordinate der Einflußlinie den Auflagerdruck A an, der bei dieser Laststellung entsteht. (In Fig. 83f ist also diese Ordinate $= A_5 = 0{,}375$ t.) Um nun aus dem Auflagerdruck A_5 die Spannkraft O_3 zu erhalten, verfahren wir nach Fig. 83c: Wir zerlegen A_5 in Richtung von O_3 und der Hilfslinie L. Hiermit ist in Fig. 83e die Stabkraft O_3 für den Fall, daß eine Last $P = 1{,}0$ t im Punkte *5* steht, gefunden.

In derselben Weise ist nun in Fig. 83f die Spannkraft des Stabes O_3 für den Fall gefunden, daß die Last $P = 1{,}0$ t nach einem anderen Knotenpunkte gewandert ist: Der Auflagerdruck A wird immer durch die Einflußlinie von A geliefert. Dann wird das betreffende A in Richtung von L und O_3 zerlegt und hierdurch die letztere Kraft gefunden. Die Bezeichnungen $O_{3(4)}$ usw. sollen darauf hinweisen, daß es sich um die Spannkraft des Stabes O_3 bei den verschiedenen Stellungen der Last (im Knoten *4* usw.) handelt.

Rückt die Last links vom Schnitte, so dürfen wir nicht den linken Trägerteil betrachten, sondern müssen zum rechten übergehen. Dann werden also der Auflagerdruck B und die Hilfsgerade L' benutzt. Deshalb ist in Fig. 83c auch die Einflußlinie für B gezeichnet und hieraus die Spannkraft O_3 bei den verschiedenen Laststellungen bestimmt.

Insgesamt haben wir durch Fig. 83f und g für jede Stellung, die die Last $P = 1{,}0$ t in einem Knotenpunkte des vorliegenden Trägers einnehmen kann, die bei dieser Laststellung entstehende Spannkraft des Stabes O_3 gefunden.

Die betreffenden Werte $O_{3(1)}$, $O_{3(2)}$ usw. wurden nun von einer Horizontalen als Ordinaten aufgetragen. Hierdurch ergab sich die Figur 83h. Diese Figur hat also folgende Bedeutung:

Steht in irgendeinem Knotenpunkte des Trägers eine Last $P = 1,0$ t, so ergibt die **unter dieser Laststellung** gemessene Ordinate die Spannkraft, die der Stab O_3 **bei dieser Laststellung** er-

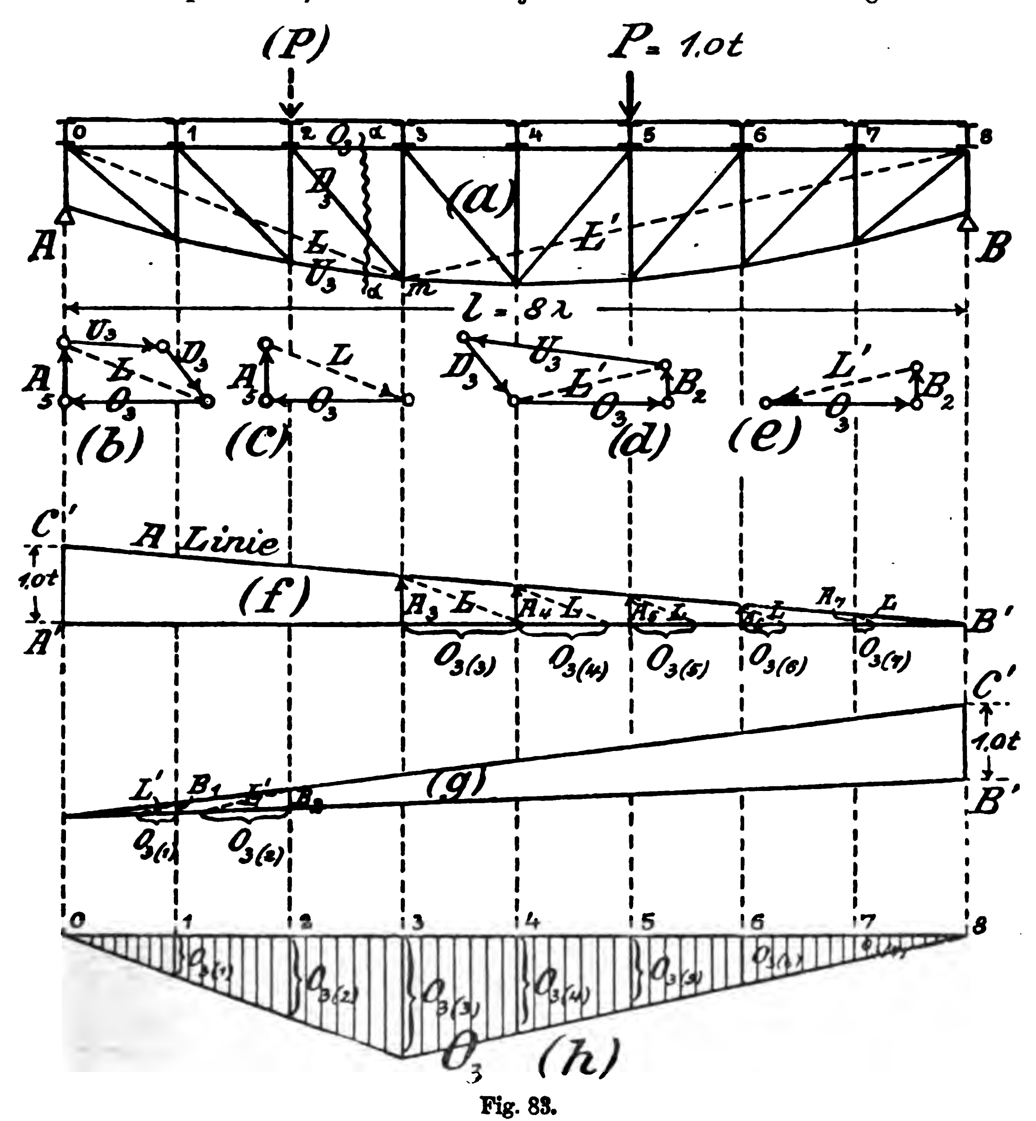


Fig. 83.

fährt. Die Strecken $O_{3(1)}$, $O_{3(2)}$ usw. stellen also die Einflußordinaten für die Spannkraft des Stabes O_3 dar. Steht nun die Last **zwischen** zwei Knotenpunkten, so werden die Endpunkte der zu diesen beiden Knoten gehörigen Ordinate einfach durch eine gerade Linie verbunden. Denn bei der allgemeinen Unter-

suchung von Einflußlinien hatte sich ergeben, daß bei indirekter Belastung eine Einflußlinie von Belastungspunkt zu Belastungspunkt stets als gerade Linie verläuft (Band I, § 23, III. Satz). Durch diese Vervollständigung mittels gerader Verbindungslinie haben wir also erreicht, daß Fig. 83h jetzt auch für Stellungen zwischen den Knotenpunkten gilt: *Steht irgendwo auf dem Träger eine Last $P = 1{,}0$ t, so ist die unter dieser Laststellung gemessene Ordinate die zugehörige Spannkraft des Stabes O_3.* Wir nennen deshalb Fig. 83h die **Einflußlinie** des Stabes O_3.

Bei dieser Aufgabe haben wir zum erstenmal den Einfluß einer wandernden Last auf die Spannkraft eines Stabes betrachtet und das wichtigste Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen, die Einflußlinien, kennen gelernt. Im nächsten Vortrage wollen wir uns ausschließlich mit ihnen beschäftigen und zunächst verschiedene bequemere Methoden zum Aufstellen von Einflußlinien für Gurt- und Füllungsstäbe erläutern.

Abschnitt II.

Besondere Methoden für Träger auf zwei Stützen mit beweglicher Belastung.

Der Abschnitt I dieses Bandes brachte die allgemeine Theorie der statisch bestimmten Fachwerke. Wie ein solches System auch gestaltet und belastet sein möge, wir können jetzt seine Spannkräfte ermitteln. Gewisse Fragen der Praxis müssen aber noch weiter erörtert werden. Namentlich die Aufgabe: Wenn auf ein Fachwerk eine bewegliche Belastung einwirkt, wie erkennen wir diejenige Laststellung, die für irgendeinen betrachteten Stab am gefährlichsten ist und wie berechnet sich am bequemsten die bei dieser Laststellung entstehende Spannkraft?

Diese Aufgabe soll in Abschnitt II behandelt werden und zwar für den Fall, daß es sich um ein einfaches Dreieckfachwerk mit vertikaler Belastung handle.

3. Vortrag:

Methode der Einflußlinien.[1])

§ 23.

Einflußlinien für die Gurtstäbe.

Aufgabe: Auf dem Träger Fig. 84a befinde sich eine bewegliche Einzellast P. Die bei den verschiedenen Laststellungen entstehenden Spannkräfte im Obergurtstabe O_m sollen bestimmt werden.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wollen wir zunächst nur den Fall betrachten, daß die wandernde Last sich immer gerade in den einzelnen Knotenpunkten befinde. Nachher erweitern wir die Untersuchung natürlich für den Fall, daß sie an ganz beliebiger Stelle stehe.

---

[1]) Dem Leser werde empfohlen, vor Durchnahme dieses Vortrages die §§ 22, 23, 65, 66 von Band I zu wiederholen, da das Folgende sich aufs engste an diese Paragraphen anlehnt.

I. Für Belastung nur in den einzelnen Knotenpunkten.

Es gibt verschiedene Methoden, um die Stabspannung O_m infolge einer solchen wandernden Knotenpunktslast zu bestimmen;

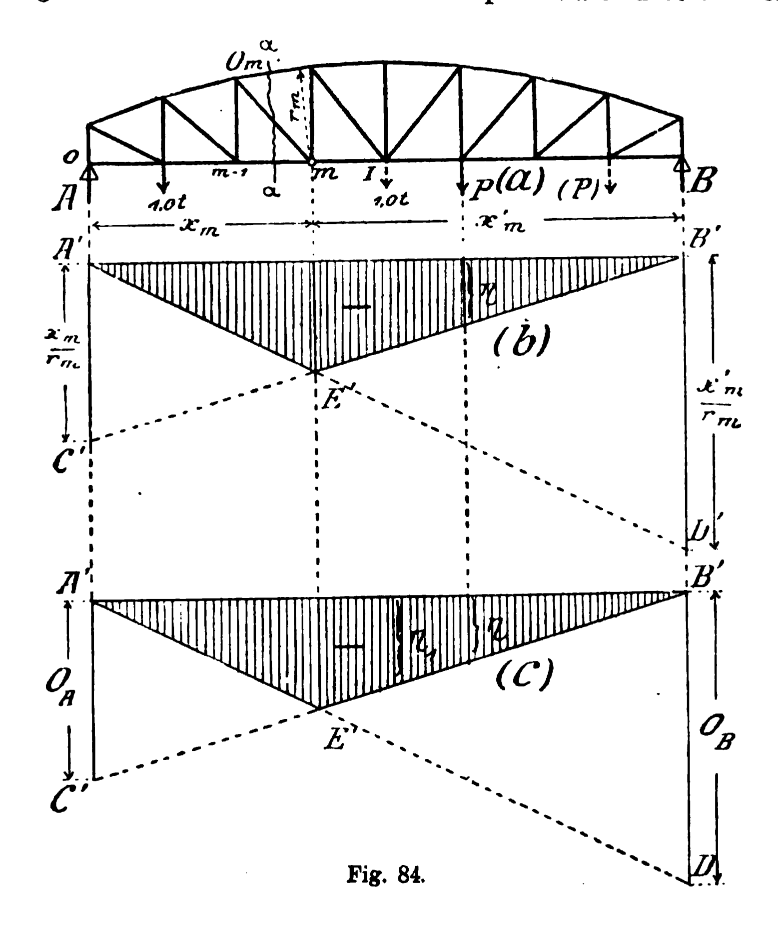


Fig. 84.

Erste Methode: Wir gehen von dem *Ritter*schen Ausdrucke $O = -(M_0 : r_0)$ aus und stellen diesen mit Hilfe der Einflußlinie für M für alle möglichen Laststellungen zeichnerisch dar.

Zweite Methode: Wir bestimmen zunächst einige Hilfswerte, nämlich diejenigen Spannkräfte, die infolge eines Auflagerdruckes $A = 1$ t, bzw. $B = 1$ t in dem Stabe O entstehen würden. Mit Hilfe dieser Spannkräfte — sie werden O_A und O_B genannt — lassen sich dann die bei irgendeiner anderen Belastung im Stabe O entstehenden Spannkräfte leicht ausdrücken und zeichnerisch darstellen.

1. Mittels der Biegungsmomente M_m.

Die Knotenpunkte mögen der Reihe nach $0, 1, .., m$ genannt werden. Der dem Knoten m gegenüberliegende Obergurtstab sei O_m. Bezeichnen wir nun das Lot von m auf O_m mit r_m, so ist nach den Ritterschen Formeln:

$$(I) \qquad O_m = -\frac{M_m}{r_m}.$$

Diese Formel wurde abgeleitet für eine beliebige Belastung; sie gilt demnach für jede Stellung, die die Last auf dem Träger einnehmen kann. Mit anderen Worten: In welchem Knotenpunkte sich auch die Last P befinden möge, die Spannkraft O_m ist stets gleich dem bei der betreffenden Laststellung entstehenden, negativ genommenen Biegungsmoment M_m, dividiert durch das Lot r_m. Wir bekommen also die Spannkraft O_m für die verschiedenen Laststellungen, indem wir ganz einfach das Moment M_m für die verschiedenen Laststellungen bestimmen und durch r_m dividieren. Hiermit ist die eingangs gestellte Aufgabe im Prinzip erledigt.

Um nun den Wert M_m — Biegungsmoment eines einfachen Balkens für die Stelle m — für alle möglichen Stellungen der Last P zu finden, benutzen wir am besten die Einflußlinie für M_m. Nach Band I, § 65 ergibt sich diese, indem wir von einer Nullachse aus unter dem linken Auflager die Entfernung x_m und rechts x'_m auftragen und kreuzweis verbinden (vgl. Band I, Fig. 109c). Jetzt, bei der Berechnung von O_m, werden wir aber nicht x_m bzw. x'_m, sondern $\frac{x_m}{r_m}$ bzw. $\frac{x'_m}{r_m}$ auftragen. Die auf diese Weise entstehende Fläche ergibt dann augenscheinlich nicht die Werte M_m, sondern $\frac{M_m}{r_m}$ (da ja alles r_m mal so klein erscheint); also gerade das, was wir brauchen.

In Fig. 84b ist diese Darstellung durchgeführt. Von einer Nullachse $A'B'$ sind unter A' die Strecke $A'C' = \frac{x_m}{r_m}$ und unter B' die Strecke $B'D' = \frac{x'_m}{r_m}$ aufgetragen und die Verbindungslinien $C'B'$ und $D'A'$ gezogen. Man sieht dann deutlich, daß die Fläche $A'E'B'$ dieselbe Form hat wie die Einflußfläche für das Moment M_m eines auf Biegung beanspruchten Balkens; nur daß die Ordinaten im $\frac{1}{r_m}$-fachen Maßstabe erscheinen. *Sie ist also die Einflußfläche* für den Wert $\frac{M_m}{r_m}$, d. h. *für die Stabkraft* O_m.

Hinsichtlich der Vorzeichen ist noch zu bemerken: Das Biegungsmoment M_m eines einfachen Balkens ist überall positiv (Band I, Fig. 109c). Die Stabkraft O_m ist aber nach der obigen Formel gleich dem *negativ* zu nehmenden Werte M_m, dividiert durch r_m. Daraus folgt, daß der Quotient $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$ negativ ist; d. h. die Ordinaten der Einflußfläche O_m sind überall negativ. Somit ist auch das Vorzeichen festgelegt.

Zum Schlusse noch eine *Vereinfachung:* Aus den ähnlichen Dreiecken $A'E'C'$ und $D'E'B'$ folgt, daß sich die Abstände des Punktes E' von den Auflagervertikalen verhalten wie die Grundlinien $A'C' : D'B'$, d. h. wie $\frac{x_m}{r_m} : \frac{x'_m}{r_m} = x_m : x'_m$. Letzteres sind aber auch die Abstände des Punktes m in Fig. 84a. Aus dieser Übereinstimmung des Verhältnisses der Abstände folgt, daß der Schnittpunkt E' von Fig. 84b vertikal unter dem Bezugspunkte m von Fig. 84a liegt, wie auch die Zeichnung zeigt. Dieser Umstand ermöglicht eine Vereinfachung der Zeichnung: Wir tragen $A'C'$ auf, ziehen $C'B'$, loten den Bezugspunkt m hinunter und bestimmen hierdurch den Punkt E'. Dann verbinden wir E' mit A' und erhalten auf diese Weise die Einflußfläche $A'E'B'$. Das Auftragen der Strecke $B'D'$ wird dann gespart.

Wiederholung: Die Spannkraft S eines Gurtstabes ist direkt proportional dem Biegungsmomente M_m für den Bezugspunkt m des betreffenden Stabes, und zwar besteht die Beziehung

$$S_m = \pm \frac{M_m}{r_m}.$$

Um also die Stabkraft S für die verschiedenen Laststellungen zu erhalten, kommt es nur darauf an, den obigen Ausdruck $\frac{M_m}{r_m}$ für die verschiedenen Laststellungen darzustellen. Dies geschieht in folgender Weise: Wir zeichnen eine Nullachse $A'B'$, tragen die Werte

$$A'C' = \frac{x_m}{r_m} \quad \text{und} \quad B'D' = \frac{x'_m}{r_m}$$

rechtwinklig zu $A'B'$ auf und ziehen die Verbindungslinien $C'B'$ und $D'A'$. Die hierdurch entstehende Fläche $A'E'B'$ ist dann die Einflußfläche für den Wert $\frac{M_m}{r_m}$ und somit auch für die Spannkraft des Stabes S_m. Das heißt: Befindet sich in irgend-

einem Knotenpunkte eine Last von 1,0 t, so stellt die **unter dieser Laststellung** gemessene Ordinate η die gesuchte Stabkraft S_m dar; also $S_m = \eta$. Ist die Last nicht gerade 1,0 t, sondern $P(t)$, so ist S_m natürlich P mal so groß; also

$$S_m = P \cdot \eta .$$

Statt beide Strecken, $A'C'$ und $B'D'$, zu zeichnen, genügt es, **eine** derselben aufzutragen und dafür den Punkt E' durch Hinunterloten des Bezugspunktes m zu bestimmen.

Vorzeichen: Bei einem *Obergurt*stab sind die Ordinaten der Einflußlinie *negativ* zu nehmen. Entsprechend: Für einen Untergurtstab sind die Ordinaten der Einflußlinie positiv. $\left[O = -\frac{M}{r};\ U = +\frac{M}{r}.\right]$

---

2. Mittels der Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t ($B = 1{,}0$ t).

Zu einer etwas anderen Darstellung der Einflußlinie gelangt man durch folgende Überlegung. Wir denken uns an beliebiger Stelle und zwar zunächst *rechts* von m eine Last (P), so daß am linken Auflager eine Auflagerkraft A entsteht. Ermitteln wir für diese Belastung die Stabkraft O_m, so bekommen wir z. B. nach der *Ritter*schen Methode:

$$+A \cdot x_m + O \cdot r_m = 0 ,$$

$$O = -A\left(\frac{x_m}{r_m}\right).$$

Der Bruch $\frac{x_m}{r_m}$ ist für den betreffenden Stab eine bestimmte Zahl. Aus der obigen Gleichung ergibt sich also der Satz: *Solange die Lasten rechts von m stehen, ist O_m direkt proportional dem bei der betreffenden Belastung entstehenden Auflagerdruck A*; d. h. *O_m ist einfach der Auflagerdruck A, multipliziert mit einem Zahlenfaktor $\left(\frac{x_m}{r_m}\right)$.*

[Dasselbe Resultat ergibt sich natürlich auch mittels einer anderen Methode, z. B. mittels Kräfteplan. Denkt man sich einen solchen für Fig. 84a gezeichnet, so ist klar ersichtlich, daß, solange zwischen A und O_m keine Last P steht, die Kraft O_m direkt proportional ist der Kraft A. Für verschiedene Werte von A könnte derselbe Kräfteplan benutzt werden; nur der *Maßstab* der Kräfte wäre anders zu nehmen.]

Nun denke ich mir die Last (P) so gewählt, daß der Auflagerdruck A gerade 1,0 t ist, und bestimme hierfür nach irgendeiner Me

thode (z. B. *Ritter*, *Cremona*) die im Stabe O_m entstehende Spannkraft. Sie werde O_A genannt. Ändert sich dann die Belastung, indem an Stelle von (P) z. B. an den Knoten I eine Last von 1,0 t gehängt wird, so ändern sich natürlich auch der Auflagerdruck und die Spannkraft im Stabe O_m. Letztere werde jetzt O_I genannt. Nun haben wir aber soeben gesehen, daß die Stabkraft für alle Laststellungen rechts von m direkt proportional ist dem Auflagerdruck A. Es verhält sich also die bei Laststellung I entstehende Spannkraft [O_I] zu der bei der Belastung (P) entstandenen [O_A] wie der Auflagerdruck A_I zu dem Auflagerdruck 1,0 t. In Formeln:

$$O_I : O_A = A_I : 1{,}0 \text{ t},$$

und hieraus folgt:

(IIa) $$O_I = O_A \cdot A_I \quad \text{[für Laststellung rechts vom Schnitte]},$$

d. h. *steht an beliebiger Stelle rechts von m eine Last 1,0 t, so ist die Spannkraft im Stabe O_m gleich dem $O_A$fachen Auflagerdruck A.* Wir können also die Spannkräfte graphisch darstellen, indem wir *die Einflußlinie für den Auflagerdruck im $O_A$fachen Maßstabe zeichnen.* Hierdurch ist eine zweite Darstellung der Einflußlinie für die Stabkraft O_m gefunden.

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck erhalten wir bekanntlich, indem wir von einer Nullachse $A'B'$ aus eine Strecke $A'C'$ gleich 1,0 t auftragen und den Endpunkt C' mit B' verbinden (Band I, § 22, Fig. 52). Um aber die O_m-Linie zu erhalten, werden wir nicht 1,0 t, sondern $O_A \cdot 1{,}0$, das ist O_A, auftragen. Augenscheinlich erscheint dann die Einflußlinie für A im $O_A$fachen Maßstabe. Sie wird also zur Einflußlinie für das Produkt $O_A \cdot A$, das ist die Stabkraft O_m.

In Fig. 84c ist die Zeichnung durchgeführt: Wir tragen $A'C' = 1{,}0 \cdot O_A = O_A$ auf und verbinden C' mit B'. Dann ist die unter der Laststellung I liegende Ordinate η_1 gleich dem $O_A$fachen des Auflagerdruckes, d. h. gleich der Spannkraft im Stabe O_m.

Diese Darstellung gilt aber nur so lange, wie die Last P *rechts* von dem Schnitt α—α ist. Tritt nämlich die Last links vom Schnitte, so ist O nicht mehr direkt proportional dem Auflagerdruck A, da jetzt außer A auch noch die Last $P = 1{,}0$ t als äußere Kraft vorhanden ist. In der Formel für O_m würde also bei Laststellung links von m außer der Kraft A auch noch die Last P vorkommen, und die Darstellung nur mit Hilfe der A-Linie würde nicht mehr gehen. [Man denke auch an den Kräfteplan:

Bevor man zu O_m gelangt, würde hinter A noch die Last P hineinkommen.] Da helfen wir uns nun, indem wir den Teil rechts vom Schnitte betrachten. Dann haben wir nämlich wieder den Fall, daß nur eine äußere Kraft, und zwar der Auflagerdruck B, angreift. Für alle Laststellungen links von m ist also die Stabkraft O_m direkt proportional dem Auflagerdruck B; entsprechend der Formel:

(IIb) $O_m = O_B \cdot B$ [für Laststellung links vom Schnitte].

[O_B ist die Spannkraft des Stabes O_m infolge eines angenommenen Auflagerdruckes $B = 1{,}0$ t und muß natürlich vorher nach irgendeiner Methode bestimmt werden.] Um für diese Laststellungen O_m zu erhalten, werden wir also die B-Linie benutzen, indem wir sie im $O_B$fachen Maßstabe zeichnen: Wir tragen unter B die Strecke $B'D' = O_B \cdot 1{,}0$, das ist O_B, auf und verbinden D' mit A'. Die Ordinaten dieser Linie ergeben dann den Auflagerdruck B im $O_B$fachen Maßstabe, also die gesuchte Stabkraft O_m (für die Laststellungen links von m).

Insgesamt haben wir also in Fig. 84c die beiden Linien $C'B'$ und $D'A'$. Die erstere — Einflußlinie für das Produkt $O_A \cdot A$ — gilt für alle Laststellungen rechts vom Schnitte α—α. Die zweite — B-Linie im $O_B$fachen Maßstabe — gilt für die Laststellungen links vom Schnitte. Das durch diese beiden Linien gebildete Dreieck $A'E'B'$ gilt also für alle Laststellungen. In welchem Knotenpunkte auch die Last sein möge, die unter der Laststellung gemessene Ordinate gibt die bei dieser Laststellung entstehende Spannkraft des Stabes O_m. *Dreieck $A'E'B'$ ist die Einflußfläche von O_m.*

Vorzeichen: Bestimmt man nach irgendeiner Methode die Hilfswerte O_A und O_B, so wird man finden, daß beide negativ herauskommen (vgl. die Beispiele des folgenden Paragraphen). Daraus folgt, daß die Ordinaten von Fig. 84c negativ sind. Bei einem Untergurtstabe würden sich die entsprechenden Werte positiv ergeben.

Vereinfachung: Der Punkt E' liegt vertikal unter dem Punkte m der Systemfigur. Dies wurde bereits vorher an Hand von Fig. 84b bewiesen. Es folgt aber auch daraus, daß der Punkt m sowohl zum rechten als auch zum linken Trägerteile gezählt werden kann. Seine zugehörige Ordinate muß also sowohl zur Linie $C'B'$ wie zu $D'A'$ gehören, d. h. sie muß am Schnittpunkte dieser beiden Linien liegen. Aus diesem Umstande folgt, daß wir nur die Strecke $A'C' = O_A$ aufzutragen und die Verbindungslinie $C'B'$

zu ziehen brauchen. Durch Hinunterloten des Punktes m können wir dann den Punkt E' festlegen und haben hierdurch das gesamte Dreieck $A'E'B'$. Auf diese Weise sparen wir das Auftragen des Wertes O_B.

Wiederholung: Die Spannkraft eines Gurtstabes bei wandernder Last läßt sich so darstellen, daß sie direkt als ein Mehrfaches des Auflagerdruckes erscheint. Dies wird dadurch ermöglicht, daß immer derjenige Fachwerkteil betrachtet wird, auf dem die Last nicht steht. Hierdurch ergeben sich dann die Formeln

(IIa) $\boxed{O = O_A \cdot A}$ [für Laststellung rechts vom Schnitte],

(IIb) $\boxed{O = O_B \cdot B}$ [„ „ links „ „].

Die Darstellung der Stabkraft O für verschiedene Laststellungen läuft also hinaus auf die Darstellung der obigen Produkte für verschiedene Laststellungen. Die Bedeutung der Faktoren O_A und O_B ist folgende: O_A ist die Spannkraft im Stabe O für den Fall, daß am linken Teile nur ein Auflagerdruck A von gerade 1,0 t als einzige äußere Kraft wirke. Entsprechend ist der Faktor O_B nichts anderes als die Spannkraft des Stabes O für den angenommenen Fall, daß rechts nur ein Auflagerdruck von gerade 1,0 t wirke. Sobald nun diese Hilfswerte O_A und O_B nach irgendeiner Methode ermittelt sind, werden sie von einer Nullachse $A'B'$ aus aufgetragen und die Verbindungslinien $C'B'$ und $D'A'$ gezogen. Die erstere stellt dann die A-Linie im $O_A$fachen Maßstabe, d. h. das Produkt $O_A \cdot A$, dar. Sie gibt demnach die Stabkraft O für die Laststellungen rechts vom Schnitte. (Der Teil links vom Schnitte ist also von dieser Linie nicht zu brauchen.) Die Ordinaten der zweiten Verbindungslinie stellen den Auflagerdruck B im $O_B$fachen Maßstabe dar. Sie ergeben die Spannkraft O für Laststellungen links vom Schnitte. (Von dieser Linie ist also der rechte Teil unbenutzbar.) Insgesamt entsteht aus beiden Linien das Dreieck $A'E'B'$, in dem somit alle Laststellungen enthalten sind: *Einflußfläche für* O_m.

Meistens werden wir aber nur eine der beiden Strecken O_A und O_B auftragen und die Spitze E' der Einflußfläche durch Hinunterloten des Bezugspunktes m des betreffenden Stabes finden.

Vorzeichen: Die Vorzeichen der Hilfswerte O_A und O_B ergeben sich natürlich bei deren Berechnung. Durch die Vorzeichen von O_A und O_B sind dann gleichzeitig auch die Vorzeichen der zugehörigen Produkte $O_A \cdot A$ (Linie $C'B'$) und $O_B \cdot B$ (Linie $D'A'$) bestimmt.

Die Werte O_A und O_B können nach irgendeiner Methode ermittelt werden. Bestimmen wir sie nach *Ritter*, so geht dieses Verfahren über in das unter 1) gezeigte (Fig. 84b). Denn in diesem Falle sind die aufzutragenden Werte

$$O_A = -\frac{1,0 \cdot x_m}{r_m}, \qquad O_B = -\frac{1,0 \cdot x'_m}{r_m},$$

also dieselben wie bei Fig. 84b. Wir können sie aber auch nach einer der übrigen Methoden bestimmen, so daß die unter 2) erläuterte Darstellung der Einflußlinie die allgemeinere ist.

II. Für Belastung auch zwischen den Knotenpunkten.

Bisher haben wir die Berechnung für den Fall durchgeführt, daß die Belastung *direkt* in den einzelnen Knotenpunkten wirke. Nun haben wir aber bei den im Brückenbau verwendeten Fachwerkträgern fast stets eine **indirekte Belastung** (mittels Längs- und Querträger). Und auch bei Kranträgern und ähnlichen Konstruktionen, bei denen die Lasten sich direkt auf den Gurtstäben bewegen, muß die Berechnung zunächst für indirekte Belastung durchgeführt werden. [§ 18 I, Fachwerke mit Belastung außerhalb der Knotenpunkte: Falls die Zwischenlasten P rechtwinklig zum Stabe wirken, ist dessen Spannkraft so zu berechnen, als ob Quer- und Längsträger vorhanden wären und die Belastung auf diesen stände. Das Biegungsmoment infolge der direkten Belastung des Stabes muß natürlich bei Berechnung der Spannungen besonders berücksichtigt werden. Vgl. § 19, 4. Aufgabe.]

Unsere bisherige Untersuchung der Gurtkräfte muß also noch für diesen Belastungsfall erweitert werden.

Das ist nun bald geschehen. Bei der allgemeinen Betrachtung von Einflußlinien hatten wir u. a. folgenden Satz aufgestellt (Band I, § 23, Satz III): „Die Einflußlinie für indirekte Belastung ergibt sich stets dadurch, daß man zunächst nur direkte Belastung berücksichtigt und dann die unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten durch gerade Linien verbindet.“ Letztere Ordinaten haben wir aber gerade in dem vorigen Absatze dieses Paragraphen bestimmt. Wir verbinden also deren Endpunkte durch gerade Linien und finden dann auch für Belastung zwischen den Knotenpunkten durch einfaches Hinunterloten der Laststellung die gesuchte Stabkraft.

In Fig. 85 sind auf diese Weise bei zwei Systemen die vollständigen Einflußlinien für verschiedene Stäbe gezeichnet. Hierbei zeigt sich, daß die vorhin erwähnten geraden Verbindungslinien

meistens schon durch die vorhergegangene Zeichnung mitgeliefert werden. Beispielsweise bei dem Stabe O von Fig. 85a: Zunächst wird nach Absatz I dieses Paragraphen das Dreieck $A'E'B'$ gezeichnet. Lotet man dann die Belastungspunkte hinunter (Punkte *1*, *2* usw.) und will die Endpunkte (*1'*, *2'* usw.) der betreffenden

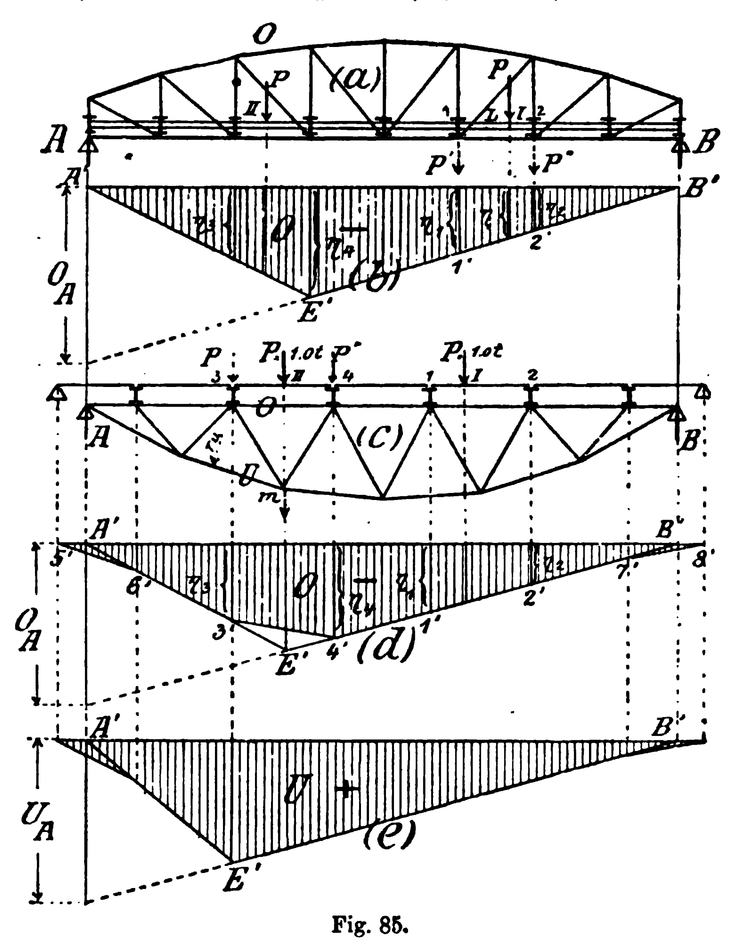


Fig. 85.

Ordinaten durch gerade Linien miteinander verbinden, so findet man, daß diese Verbindungslinien sämtlich in die bereits gezeichneten Seiten des Dreieckes $A'E'B'$ fallen. Man sieht also: Bei der Querträgeranordnung Fig. 85a ist die Einflußlinie $A'E'B'$, die für den Fall gezeichnet wurde, daß die Lasten direkt in den Knotenpunkten des Fachwerkes angreifen, auch für indirekte Belastung gültig.

Daß dieses aber nicht immer zutrifft, sieht man an Fig. 85c.

Für den Stab O ist m der Bezugspunkt. Es ist also $A'E'B'$ in Fig. 85d die Einflußlinie für direkte Belastung. [Der Knick E' der Einflußlinie liegt immer unter dem Bezugspunkte m.] Steht nun bei I eine Last $P = 1{,}0$ t, so sind *1* und *2* die Belastungspunkte. Ihre Ordinaten sind η_1 und η_2, und deren Verbindungslinie ist bereits vorhanden. Steht die Last aber an Stelle II, so sind *3* und *4* die Belastungspunkte. Deren Ordinaten sind η_3 und η_4, und man sieht, daß die Verbindungslinie $3'\,4'$ neu gezeichnet werden muß und nicht mit der ursprünglichen Einflußlinie übereinstimmt. [Auch aus der Anschauung erkennt man, daß eine direkt im Punkte m hängende Last eine andere Spannkraft hervorruft, als wenn sie auf dem Längsträger steht und von diesem nach beiden Seiten übertragen wird.] Steht die Last auf den Schleppträgern, so müssen die Verbindungslinien $5'\,6'$ und $7'\,8'$ gezogen werden. Die gebrochene Linie $5'\,6'\,3'\,4'\,7'\,8'$ ist also die Einflußlinie für den Stab O bei indirekter Belastung.

In Fig. 85e ist noch die Einflußlinie für den Untergurtstab U von System Fig. 85c gezeichnet: Zunächst das Dreieck $A'E'B'$ für direkte Knotenpunktsbelastung, dann vervollständigt durch Hinunterloten der Belastungspunkte. Der Wert U_A — Spannkraft im Stabe U, falls links von seinem Bezugspunkte nur ein angenommener Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t als einzige äußere Kraft wirkt — ergibt sich für einen Untergurtstab positiv. Deshalb ist die ganze Einflußfläche positiv.

§ 24.

Beispiele zu § 23.

Vorbemerkung: Im folgenden ist konsequent dieselbe Bezeichnung der bei den Einflußlinien vorkommenden Größen beibehalten, wie im vorigen Paragraphen bei der Ableitung: Die Nullachse, von der aus alle Ordinaten abzumessen sind, heißt $A'B'$; die Strecken O_A und O_B heißen stets $A'C'$ und $B'D'$. Die beiden sich kreuzenden Linien, die die Einflußlinien bilden, sind also $C'B'$ und $D'A'$. Der Schnittpunkt dieser beiden Linien, die Spitze des Einflußdreieckes, heißt E'. Wie vorhin bewiesen, liegt E' stets unter dem Bezugspunkte m des betreffenden Stabes.

Erste Aufgabe.

Auf dem Untergurt der in Fig. 86a gezeichneten Dachkonstruktion läuft ein Lasthaken von 0,80 t Gesamtbelastung. Der Einfluß dieser wandernden Last auf die Gurtstäbe ist zu untersuchen!

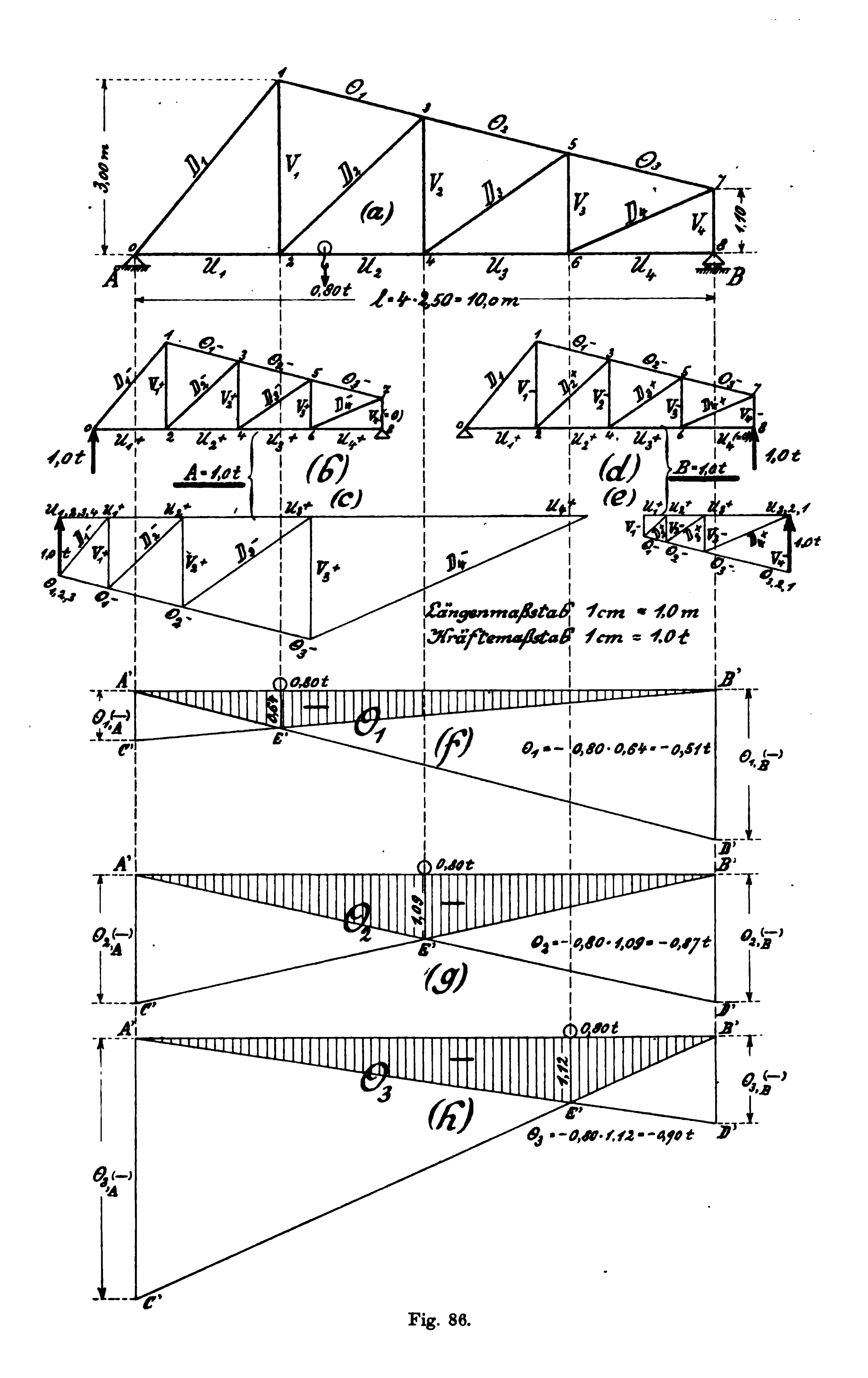

3,00 m
1,10
l = 4 · 2,50 = 10,0 m
0,80 t
A = 1,0 t
B = 1,0 t
Längenmaßstab 1 cm = 1,0 m
Kräftemaßstab 1 cm = 1,0 t
O1 = − 0,80 · 0,64 = − 0,51 t
O2 = − 0,80 · 1,09 = − 0,87 t
O3 = − 0,80 · 1,12 = − 0,90 t

Fig. 86.

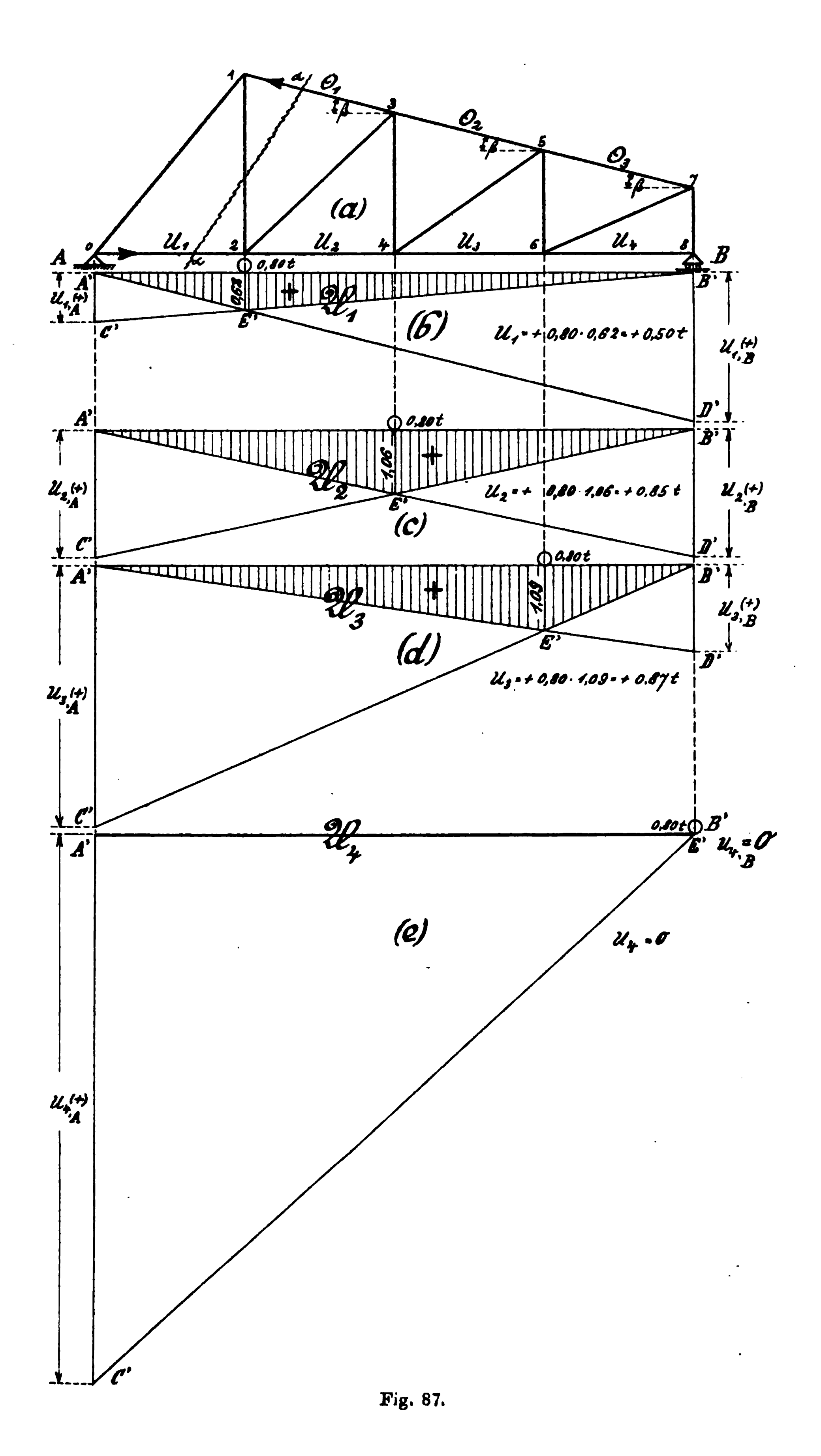


Fig. 87.

Wegen der grundsätzlichen Wichtigkeit wollen wir das Verfahren an diesem einfachen Beispiel in vollster Ausführlichkeit durchgehen, und zwar nach Methode 2 des vorigen Paragraphen.

a) Ermittlung der Hilfswerte O_A, U_A und O_B, U_B.

Der zu irgendeinem Stabe O gehörige Faktor O_A ergibt sich, entsprechend der Entwicklung der Methode, auf Grund des folgenden gedachten Belastungszustandes: Links von dem zu dem Stabe gehörigen Schnitte wirke nur ein Auflagerdruck A von gerade 1,0 t. Weitere äußere Kräfte links vom Schnitte seien nicht vorhanden. Die durch diesen Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t in dem betreffenden Stabe hervorgerufene Spannkraft ist dann der Faktor O_A.

Demgemäß wurde in Fig. 86b auf das Fachwerk eine Kraft $A = 1{,}0$ t wirkend angebracht und für diesen gedachten Belastungsfall die Stabkräfte bestimmt (Kräfteplan Fig. 86c). Augenscheinlich erhält man dann auf einmal für sämtliche Stäbe die zugehörigen Werte O_A bzw. U_A. Denn jeder Stab befindet sich in der oben beschriebenen Lage: links von ihm nur der Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t als einzige äußere Kraft, und für diesen Fall die Spannkraft ermittelt. Die Arbeit, die Faktoren O_A und U_A zu bestimmen, ist hiermit für sämtliche Stäbe erledigt.

Eine Frage muß aber noch besprochen werden, die wohl schon jedem Anfänger Kopfzerbrechen bereitet hat: Die Konstruktion Fig. 86b stellt doch gar keinen möglichen Gleichgewichtszustand dar; wie können denn dafür Spannkräfte bestimmt werden? Hierzu ist zu bemerken: An und für sich muß auf die Konstruktion Fig. 86b natürlich noch eine andere Kraft P wirken, damit dieser Auflagerdruck von $A = 1{,}0$ t überhaupt erzeugt werden kann. In der Systemfigur und folglich auch im Kräfteplan ist also noch diese erzeugende Kraft P hinzuzudenken. Die Spannkraft irgendeines Stabes stellt sich demnach im allgemeinen dar als die Summe der Wirkungen dieser beiden Ursachen (A und P). Nun können wir aber zweifellos für die Rechnung zunächst die eine Ursache vornehmen ($A = 1{,}0$ t) und ihre Wirkung auf die Konstruktion feststellen, und dann die andere Ursache (P). Das erstere ist in Fig. 86b und c geschehen. Hier ist die Teilursache $A = 1{,}0$ t in ihrer Wirkung auf das System festgestellt. Es müßte noch hinzukommen die Untersuchung der Wirkung der Last P. Doch brauchen wir diese Untersuchung nicht, da wir ja durch geschickte wechselseitige Betrachtung des linken und rechten Trägerteiles bei den Einflußlinien nur mit den Auflagerdrücken A und B arbeiten.

[Man findet über diesen Punkt auch folgende Darstellung: „Man denke sich das Fachwerk am rechten Ende eingespannt und nehme nun eine Kraft $A = 1{,}0$ t wirkend an. Die hierbei sich ergebenden Spannkräfte sind dann die Werte O_A und U_A." Hierbei tritt also keine Schwierigkeit hinsichtlich des Gleichgewichtszustandes auf. Trotzdem kann der Gedankengang nicht befriedigen. Denn mit welchem Rechte darf man ein Fachwerk, das doch in Wirklichkeit durchaus nicht eingespannt ist, auf einmal als eingespannte Konstruktion behandeln? Diese Darstellung überdeckt die Schwierigkeiten, erklärt sie aber nicht.]

Der Kräfteplan Fig. 86c geht bis zu den Stäben O_3, D_4, U_4. Am Punkte *7* würde sich ergeben, daß es gar nicht möglich ist, hier ein geschlossenes Polygon zu erhalten. Dies kommt eben daher, weil Fig. 86b in dieser Form (d. h. ohne äußere Belastung P) gar kein praktisch existierender Belastungszustand ist. Wir hören also mit dem Kräfteplan Fig. 86c da auf, wo sich ein Widerspruch einstellen würde (Punkt *7*). Denn wir haben dann bereits alle Kräfte, die wir zu den Einflußlinien brauchen.

In Fig. 86d und e ist nun der Zustand $B = 1{,}0$ t untersucht. Es gelten genau dieselben Überlegungen wie beim Zustand $A = 1{,}0$ t.

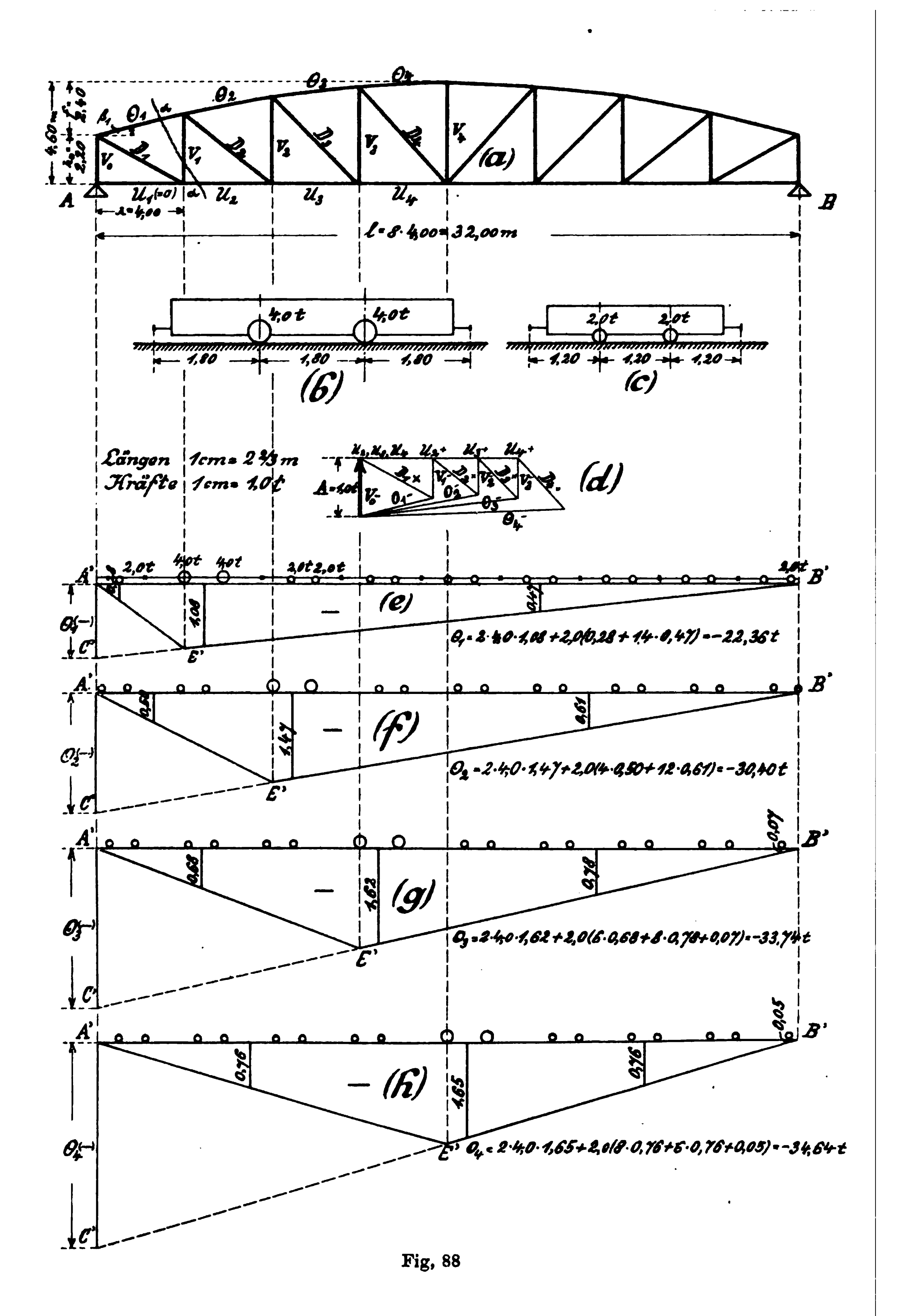
b) Aufzeichnen der Einflußlinien.

Nun haben wir alle Hilfswerte O_A und U_A, und O_B und U_B, und das Aufzeichnen der Einflußlinien kann beginnen: Von der Nullachse $A'B'$ wird $A'C'$ gleich der Spannkraft des betreffenden Stabes infolge $A = 1{,}0$ t angetragen, und $B'C'$ gleich der Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t (Kräftepläne Fig. 86c und e). Dann wird kreuzweis verbunden und die Einflußlinie ist fertig. Der Maßstab, in dem die Ordinaten die Spannkraft ergeben, ist durch den Maßstab bestimmt, in dem die Hilfsspannkräfte O_A usw. aufgetragen sind. Und das Vorzeichen der Ordinaten ist ebenfalls durch das Vorzeichen der Strecken $A'C'$ und $B'D'$ mitbestimmt. Hierdurch sind die Einflußflächen festgelegt. Nur sei noch daran erinnert, daß man das Auftragen der Werte O_B und U_B sparen kann, da der Schnittpunkt E' stets unter dem Bezugspunkte des betreffenden Stabes liegt. In Fig. 86 und 87 sind trotzdem beide Werte, O_A und O_B bzw. U_A und U_B, benutzt, nur um einmal die Sache so gründlich wie möglich durchzunehmen.

Bei der Einflußlinie für U_4 fällt der Punkt E' in den Punkt B'. Die Einflußlinie $A'E'B'$ fällt also mit der Nullachse $A'B'$ zusammen; d. h. sie hat überall die Ordinaten „Null".

c) Auswerten der Einflußlinien.

Wenn nun die Einflußlinien fertig sind, muß die Belastung eingetragen werden. Da im vorliegenden Falle nur die eine Last



(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
l = 8·4,00 = 32,00 m
Längen 1cm = 2 2/3 m
Kräfte 1cm = 1,0 t
4,0 t
2,0 t
1,80
1,20
A
B
O₁ = 2·4,0·1,08 + 2,0(0,28 + 1,4·0,47) = −22,36 t
O₂ = 2·4,0·1,47 + 2,0(4·0,50 + 12·0,61) = −30,40 t
O₃ = 2·4,0·1,62 + 2,0(6·0,68 + 8·0,78 + 0,07) = −33,74 t
O₄ = 2·4,0·1,65 + 2,0(8·0,76 + 6·0,76 + 0,05) = −34,64 t

Fig, 88

$P = 0{,}80$ t vorhanden sein soll, kann man sofort für jeden Stab angeben, bei welcher Stellung der Last er die größte Spannkraft erhält: Die Last muß da aufgestellt werden, wo die Einflußlinie die größte Ordinate hat. Demnach ist die Last bei jeder Einflußlinie eingezeichnet.

Zum Schluß werden dann die Produkte „Last mal Ordinate" berechnet. Die Ausrechnung stellt man in Tabellen zusammen oder schreibt sie, wie in Fig. 86 und 87, direkt zu den Einflußlinien hinzu. Dann erst ist die Arbeit zu Ende.

Zweite Aufgabe.

Die Gurtstäbe des Halbparabelträgers Fig. 88 sind mittels Einflußlinien zu berechnen!

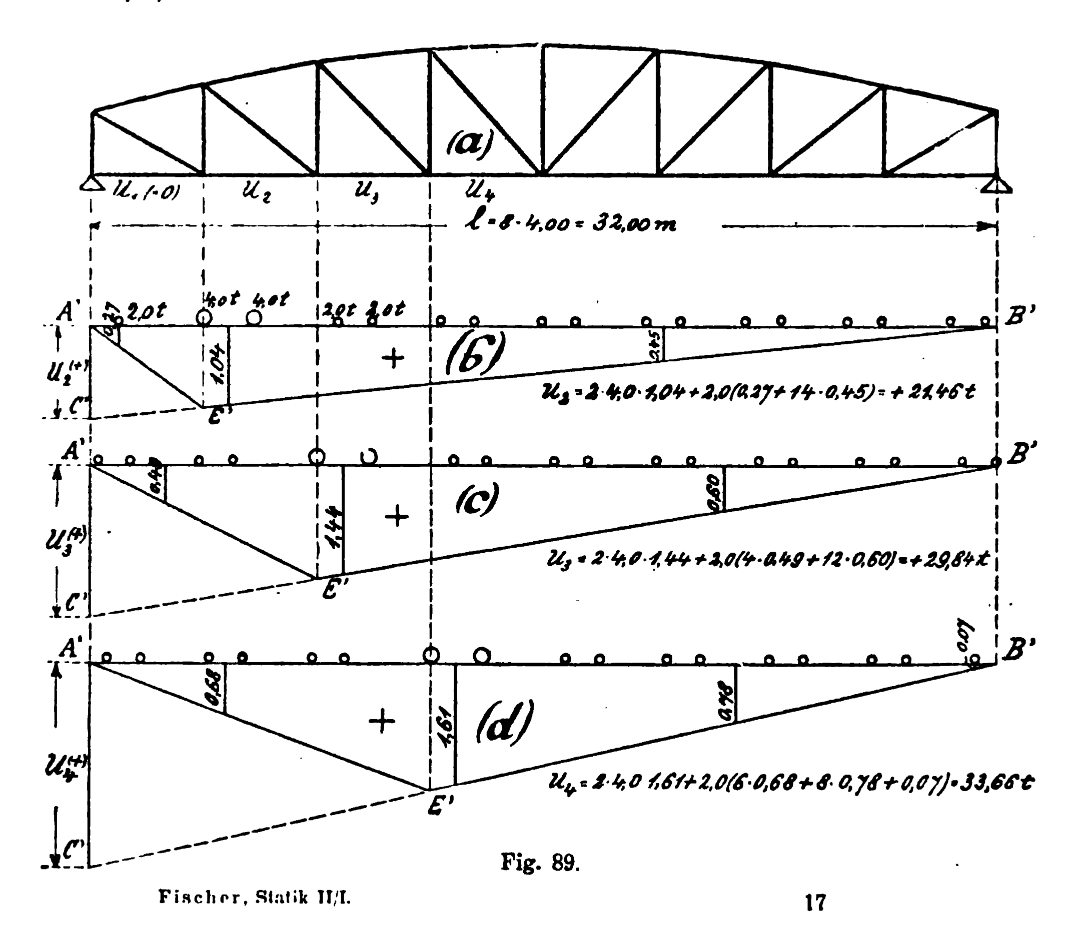


Fig. 89.

Die Belastung bestehe aus einer Feldbahn. Die Lokomotive (Fig. 88b) hat 2 Achsen von 4,0 t Raddruck, die Wagen (Fig. 88c) haben je 2 Achsen von 2,0 t Raddruck. Die Lokomotive ist an der Spitze des Zuges anzunehmen oder, falls es ungünstiger ist, zwischen den Wagen.

Die Einflußlinien wollen wir jetzt mittels der Werte O_A, U_A und der Punkte E' bestimmen; die Werte O_B und U_B sollen also nicht mehr benutzt werden. Um die Hilfswerte O_A, U_A zu erhalten, ist für $A = 1,0$ t ein Kräfteplan gezeichnet (Fig. 88d). Da das System symmetrisch ist, werden wir die Einflußlinien nur für die Stäbe der einen Fachwerkhälfte darstellen. Demgemäß braucht auch der Kräfteplan Fig. 88d nur bis zur Systemmitte gezeichnet zu werden.

Die einzelnen Einflußlinien sind in Fig. 88e – h und Fig. 89b—d konstruiert: Zunächst die Nullachse $A'B'$, dann $A'C' = O_A$, bzw. U_A aufgetragen und Linie $C'B'$ gezogen, dann den Bezugspunkt des betreffenden Stabes hinuntergelotet und hierdurch Punkt E' bestimmt, schließlich Linie $A'E'$.

Sobald die Einflußlinien aufgezeichnet sind, kommt die Hauptarbeit: das Aufstellen der gefährlichen Laststellung für die einzelnen Stäbe. Hierbei geht Probieren über Studieren. Man kann zwar auch gewisse mathematische Kennzeichen für die gefährliche Laststellung aufstellen (§ 28), doch sind diese umständlich und nur mit Einschränkung gültig. Namentlich sind sie unpraktisch, wenn selbst die Art der Belastung — ob die Lokomotive vorne oder inmitten der Wagen steht — noch variabel ist.

Das Grundprinzip beim Auswerten der Einflußlinien ist: Da, wo die größten Ordinaten sind, müssen die schwersten Lasten aufgestellt werden. Und ferner: Über dem Knickpunkt einer Einflußlinie muß stets eine (möglichst schwere) Last stehen. Im übrigen muß man etwas probieren.

[In schwierigen Fällen zeichne man den Lastenzug (eventuell in verschiedenen Anordnungen) auf ein Stück Pauspapier, lege dieses auf die betreffende Einflußlinie und untersuche nun durch Verschieben des Pauspapieres einige Stellungen (vgl. Band I, § 22a, erstes Beispiel). Aus dem Vergleiche zwischen den Ordinaten, die beim Verschieben verloren gehen und denen, die neu hinzukommen, findet man dann bald den Größtwert der betreffenden Stabkraft.]

Beim Ausrechnen der Produkte „Last mal Ordinate" wird man natürlich zur Erleichterung der Rechenarbeit möglichst von dem Satze Gebrauch machen (Band I, § 23, I. Satz): Steht eine Gruppe von Lasten über einem *geraden* Stücke einer Einflußlinie, so braucht man nicht die einzelnen Produkte $P \cdot \eta$ zu bilden, sondern nimmt einfach die Resultierende R der Lasten mal der zu R gehörigen Ordinate η_R.

Nach diesen Gesichtspunkten über Aufsuchung der gefährlichen Laststellung und Bestimmung der Produkte $P \cdot \eta$ sind nun in Fig. 88, 89 die Einflußlinien „ausgewertet". Es ist nicht ausgeschlossen, daß der Leser beim Durcharbeiten der Beispiele hier oder da eine andere Laststellung findet, die eine größere Spannkraft liefert. Dann wird er aber selber zu dem wichtigen Erfahrungssatze kommen: Die Unterschiede, die sich bei den verschiedenen, annähernd ungünstigsten Laststellungen eines Stabes ergeben, sind so gering, daß es sich wirklich nicht lohnt, stundenlang an einer Einflußlinie herumzuprobieren.

Um Zweifeln zu begegnen, sei zum Schlusse bemerkt, daß ein genaueres, praktisch brauchbares Verfahren als die Einflußlinien, das etwa mit mathematischer Sicherheit die gefährliche Laststellung angibt, in solchen Fällen nicht existiert und naturgemäß auch nicht existieren kann.

Dritte Aufgabe.

Die Stabkräfte in den Gurtungen sind nach Möglichkeit auseinander zu entwickeln! (Verringerung der Zeichenarbeit.)

1. Beim Fachwerk mit Hauptvertikalen (Fig. 90a).

Wir legen einen Schnitt α—α so, daß er außer durch zwei Gurtkräfte O und U nur noch durch eine Vertikale geht. Dann schreiben wir die Gleichgewichtsbedingung: „Summe der Horizontalprojektionen aller Kräfte gleich Null", auf den linken oder rechten Trägerteil an und erhalten sofort folgende Beziehung zwischen diesen beiden Stabkräften O und U:

$$\text{(I)} \qquad O \cdot \cos\beta = -U \cdot \cos\gamma \,.$$

In Worten: Die Horizontalprojektion der Obergurtkraft O ist *stets* gleich groß und entgegengesetzt gerichtet der Horizontalprojektion der Untergurtkraft U.

Mittels dieser einfachen Beziehung lassen sich nun je ein Ober- und Untergurtstab auseinander entwickeln:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(II)} & \text{Sobald } O \text{ berechnet ist, folgt hieraus: } U = -O \cdot \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} \\ \text{(III)} & \quad ,, \quad U \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad : O = -U \cdot \dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta}\end{array}\right\}.$$

Beim Berechnen eines Fachwerkes mit Hauptvertikalen braucht man also bei zwei solchen Stäben O und U nur für einen von ihnen die Einflußlinie zu zeichnen. Der andere folgt dann direkt durch Anwendung der Beziehung (II) oder (III).

Zusatz: Bei *gleichen* Feldweiten λ (Fig. 90a) kann man noch in den Formeln die $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ durch die Stablängen o und u ersetzen:

$$\cos\beta = \frac{\lambda}{o}; \qquad \cos\gamma = \frac{\lambda}{u}; \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{u}{o}.$$

Dann gehen die Beziehungen (I), (II) und (III) über in:

$$\text{(Ia)} \qquad O : o = -(U : u),$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(IIa)} & U = -O \cdot \dfrac{u}{o} \\ \text{(IIIa)} & O = -U \cdot \dfrac{o}{u}\end{array}\right\}.$$

Übungsaufgabe: Man berechne bei den Fachwerken Fig. 86a und Fig. 88a die Untergurtstäbe U, indem man sie mittels Formel (II) oder (IIa) aus den Obergurtstäben O ableitet; also ohne Zuhilfenahme von Fig. 87 und Fig. 89! (Bei diesen Aufgaben ist $\gamma = 0$, also $\cos\gamma = 1$. Kleine sich ergebende Unterschiede gegenüber den in Fig. 87 und Fig. 89 gefundenen Werten rühren natürlich von Abrundungen her.)

2. Beim Fachwerk mit Hilfsvertikalen (Fig. 90b).

Bei diesem lassen sich je zwei Obergurtstäbe bzw. je zwei Untergurtstäbe auseinander entwickeln. Wir wenden wieder die Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$, jetzt aber auf einen Knotenpunkt m, an. Dann läßt sich (entsprechend der obigen Entwicklung) für zwei aneinander stoßende Gurtstäbe S_1 und S_2 hin schreiben:

$$\text{(IV)} \qquad S_1 \cdot \cos\beta_1 = S_2 \cdot \cos\beta_2,$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(V)} & S_2 = S_1 \cdot \dfrac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \\ \text{(VI)} & S_1 = S_2 \cdot \dfrac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}\end{array}\right\}.$$

Bei *gleichen* Feldweiten λ kann man diese Formeln auch so schreiben:

(IVa) $$S_1 : s_1 = S_2 : s_2 ,$$

(Va) $$S_2 = S_1 \cdot \frac{s_2}{s_1}$$

(VIa) $$S_1 = S_2 \cdot \frac{s_1}{s_2}$$

Fig. 90.

Bei zwei solchen Stäben S_1 und S_2 braucht man also nur für einen von ihnen die Einflußlinie zu zeichnen. Der andere kann dann nach den obigen Formeln direkt hingeschrieben werden.

Vierte Aufgabe.

Der in der zweiten Aufgabe behandelte Halbparabelträger ist für eine bewegliche gleichmäßig verteilte Belastung $p = 2{,}00$ t/m zu untersuchen! Die Spannkräfte O und U sind hierbei nach Möglichkeit auseinander zu entwickeln (Fig. 91).

Die Einflußlinien von Fig. 88, 89 können direkt wieder verwendet werden. Zur Einübung mögen die Spannkräfte O_4, U_4 auch analytisch bestimmt werden (Maße s. § 22, 5. Aufgabe):

$$U_1 = 0{,}00\,,$$

$$U_2 = +\frac{M_1}{h_1} = +\frac{1{,}0 \cdot 4{,}00}{3{,}25} = +1{,}23\,,$$

$$U_3 = +\frac{1{,}0 \cdot 8{,}00}{4{,}00} = +2{,}00\,,$$

$$U_4 = +\frac{1{,}0 \cdot 12{,}00}{4{,}45} = +2{,}70\,,$$

$$O_4 = -\frac{1{,}0 \cdot 16{,}00}{4{,}60 \cdot 0{,}999} = -3{,}48\,.$$

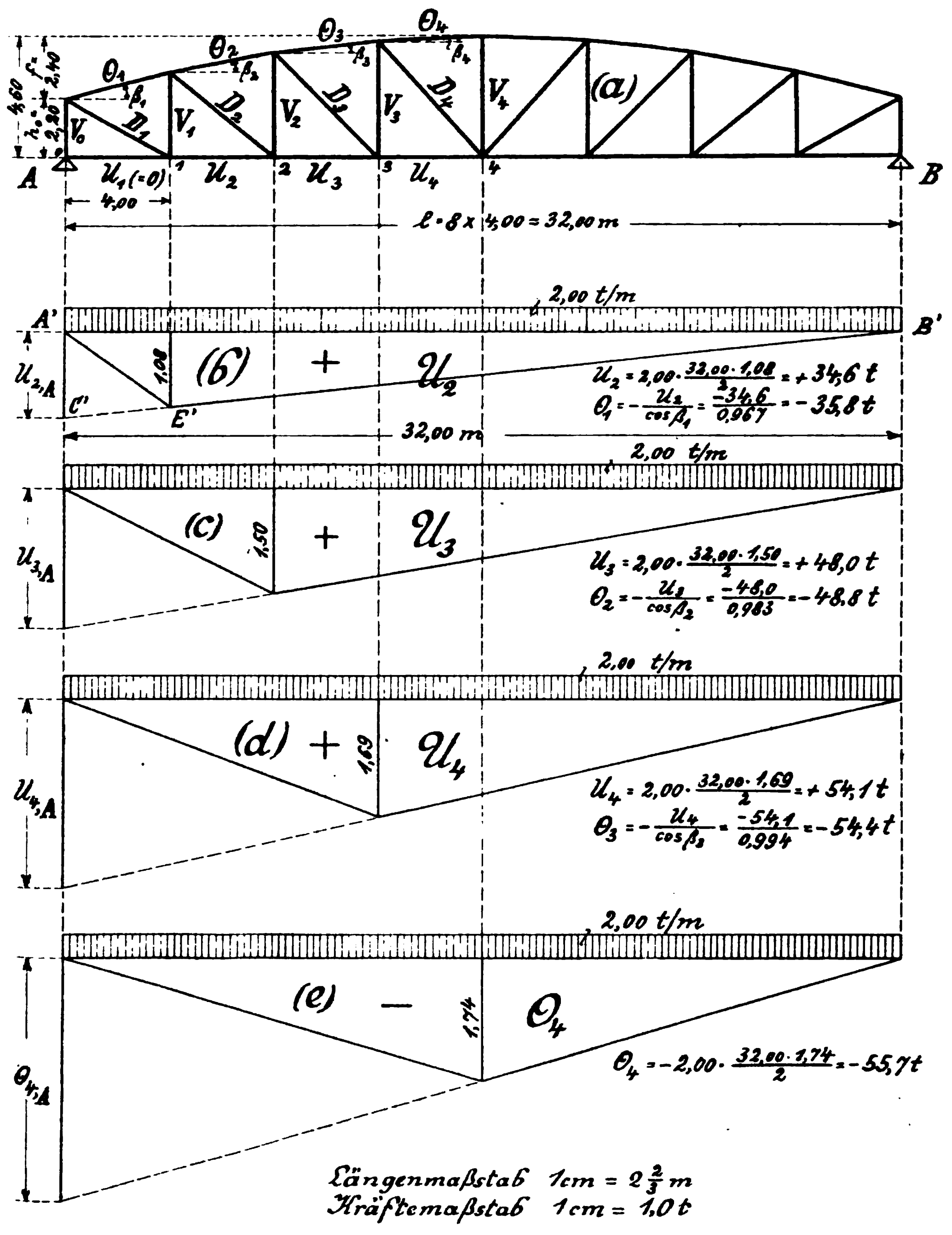
Hiernach kann man die Ordinaten der Einflußlinien auch mit rechnerischer Genauigkeit festlegen.

Für die Stabkräfte O_1, O_2 und O_3 sind keine besonderen Einflußlinien gezeichnet, sondern sie sind aus U_2, U_3 und U_4 entwickelt [Formel (III) der vorigen Aufgabe].

Nun die Aufsuchung der gefährlichen Laststellungen. Beispielsweise für den Stab U_2. Alle Ordinaten der Einflußlinie haben das gleiche (positive) Vorzeichen. Die größte Spannkraft entsteht also dann, wenn alle Ordinaten mit Lasten besetzt sind; d. h. wenn die gesamte Spannweite belastet ist. *Die gefährlichste Belastung eines Gurtstabes ist die Vollbelastung.* Hiernach ist für jeden Stab die Belastung eingezeichnet.

Schließlich die Ausrechnung der Produkte „Last mal Ordinate". Hierfür haben wir bei der allgemeinen Untersuchung von Einflußlinien für gleichmäßig verteilte Belastung folgende Regel abgeleitet (Band I, § 23, II. Satz): „Steht über einer Einflußfläche eine gleichmäßig verteilte Belastung, so ergibt sich das Resultat, indem man die Belastung pro Längeneinheit multipliziert mit dem Inhalte der darunter liegenden Einflußfläche." Bei dieser Multiplikation muß man nur darauf achten, daß dieselben Einheiten genommen werden. Wenn also z. B. die Belastung in t pro m eingesetzt wird, müssen bei den Einflußflächen die Längen ebenfalls in Metern und die Kräfte (Ordinaten) in Tonnen gemessen werden. In dieser Weise sind in Fig. 91 die Einflußlinien ausgewertet.

Zusatz 1. Das wichtigste Resultat aus dieser Aufgabe ist der Satz: *Für einen Gurtstab ist Vollbelastung die gefährliche Laststellung.* Wenn man dies erst weiß, kann man die Berechnung natürlich auch in anderer Weise durchführen: Man bringt auf die Konstruktion Vollbelastung auf und berechnet die Gurtstäbe nach



(a)
A
B
4,00
$l = 8 \times 4,00 = 32,00\ m$
2,00 t/m
(b) + U_2
$U_2 = 2,00 \cdot \frac{32,00 \cdot 1,08}{2} = +34,6\ t$
$O_1 = -\frac{U_2}{\cos\beta_1} = \frac{-34,6}{0,967} = -35,8\ t$
32,00 m
(c) + U_3
$U_3 = 2,00 \cdot \frac{32,00 \cdot 1,50}{2} = +48,0\ t$
$O_2 = -\frac{U_3}{\cos\beta_2} = \frac{-48,0}{0,983} = -48,8\ t$
(d) + U_4
$U_4 = 2,00 \cdot \frac{32,00 \cdot 1,69}{2} = +54,1\ t$
$O_3 = -\frac{U_4}{\cos\beta_3} = \frac{-54,1}{0,994} = -54,4\ t$
(e) − O_4
$O_4 = -2,00 \cdot \frac{32,00 \cdot 1,74}{2} = -55,7\ t$
Längenmaßstab 1 cm = 2 2/3 m
Kräftemaßstab 1 cm = 1,0 t

Fig. 91.

Ritter od. dgl. Die Einflußlinien sind es aber wiederum gewesen, die uns die gefährliche Laststellung erklärt haben.

Zusatz 2. Auf den Unterschied bei Einzellasten und bei gleichmäßig verteilter Belastung soll noch aufmerksam gemacht werden. In beiden Fällen heißt es, soviel wie möglich auf den Träger hinaufpacken (Vollbelastung). Während aber die gleichmäßig verteilte Last ein für allemal aufgestellt wird, müssen die Einzellasten hin und her geschoben werden, damit bei jedem Stabe über den größten Ordinaten die schwersten Lasten zu stehen kommen.

Fünfte Aufgabe.

Bei den Fachwerken Fig. 91° a und c ist der Obergurtstab O mittels Einflußlinien zu untersuchen!

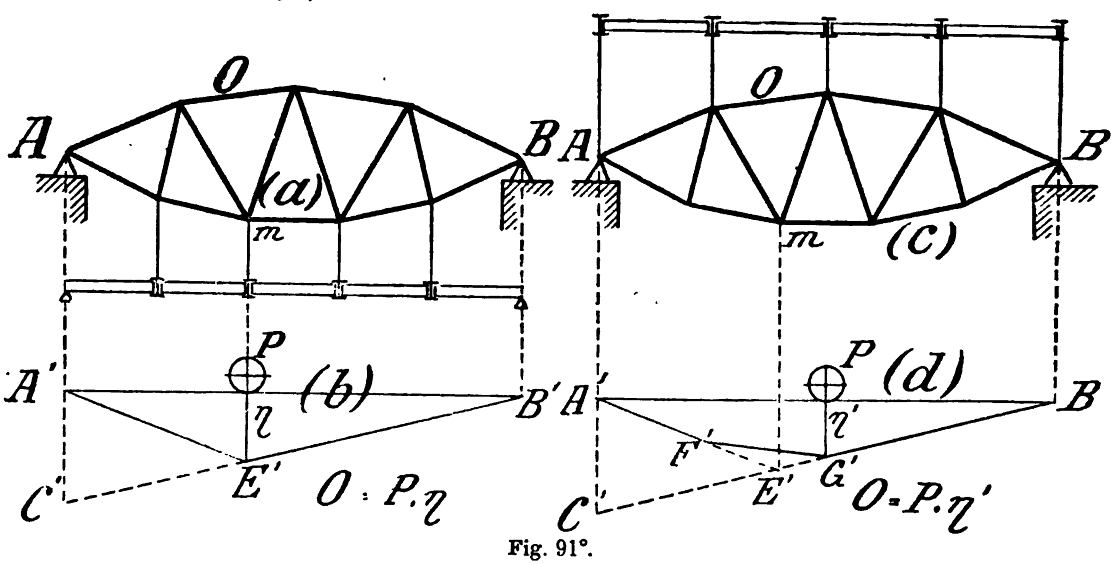


Fig. 91°.

Hier soll der Einfluß der indirekten Lastübertragung gezeigt werden. In beiden Fällen wird zunächst die Einflußlinie $A'E'B'$ gezeichnet. Dann werden die Belastungspunkte hinuntergelotet und die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden. Hierbei ergibt sich, daß keine Abänderung eintritt, wenn der Bezugspunkt *m* des Stabes gleichzeitig ein Belastungspunkt ist (Fig. 91° a, ferner 1., 2. und 4. Aufgabe dieses Paragraphen). Ist dies nicht der Fall, dann wird durch das Hinunterloten der Belastungspunkte die Spitze der Einflußfläche abgeschnitten.

Die Abänderung der Einflußlinie hat natürlich auch eine Abänderung der gefährlichen Laststellung zur Folge (Fig. 91° b und d).

§ 25.

Einflußlinien für die Füllungsstäbe.

Beim Aufzeichnen der Einflußlinien für die Füllungsstäbe können wir ebenfalls nach zwei verschiedenen Methoden vorgehen. Und zwar mögen die Einflußlinien sogleich auch für den Fall gezeichnet werden, daß die Belastung sowohl in den Knotenpunkten als auch zwischen ihnen angreifen kann (indirekte Belastung).

1. Mittels der Momentensummen M_d.

Nach den *Ritter*schen Formeln ist die in einer Diagonalen entstehende Spannkraft (§ 7, II) allgemein gegeben durch:

$$\text{(I)} \qquad D = \frac{M_d}{r_d}.$$

Hierin bedeutet M_d die Summe aus den statischen Momenten aller Kräfte, die an einem der beiden Teile angreifen, in die der Träger durch den Schnitt $\alpha - \alpha$ zerlegt wird (Fig. 92).

Nach dieser Formel werden wir die Spannkraft D für die verschiedenen Laststellungen erhalten, indem wir die Einflußlinie für den Summenausdruck M_d zeichnen, und zwar im $\frac{1}{r_d}$ fachen Maßstabe. Bisher haben wir noch niemals eine Einflußlinie für eine solche Momentensumme M_d (für einen unregelmäßig liegenden Punkt d) entwickelt. Denn die bisherigen Momente bezogen sich immer auf den Fall, daß der Bezugspunkt und der Schnitt in ein und demselben Felde liegen. Zunächst müssen wir uns also über die Einflußlinie für diesen Ausdruck M_d bzw. $\frac{1}{r_d} M_d$ klar werden:

Steht die Last rechts von dem Schnitte, so haben wir am linken Teile den Auflagerdruck A als einzige äußere Kraft. Die Summe der statischen Momente der äußeren Kräfte in bezug auf den Punkt d ist dann also:

$$M_d = A \cdot x_d .$$

[Zunächst ohne Vorzeichenfestsetzung hingeschrieben.] Und unser darzustellender Ausdruck wird:

$$D = \frac{1}{r_d} \cdot M_d = A \cdot \frac{x_d}{r_d}.$$

Der Ausdruck ist einfach das $\frac{x_d}{r_d}$ fache des Auflagerdruckes A.

Wir tragen ihn also für die verschiedenen Laststellungen graphisch

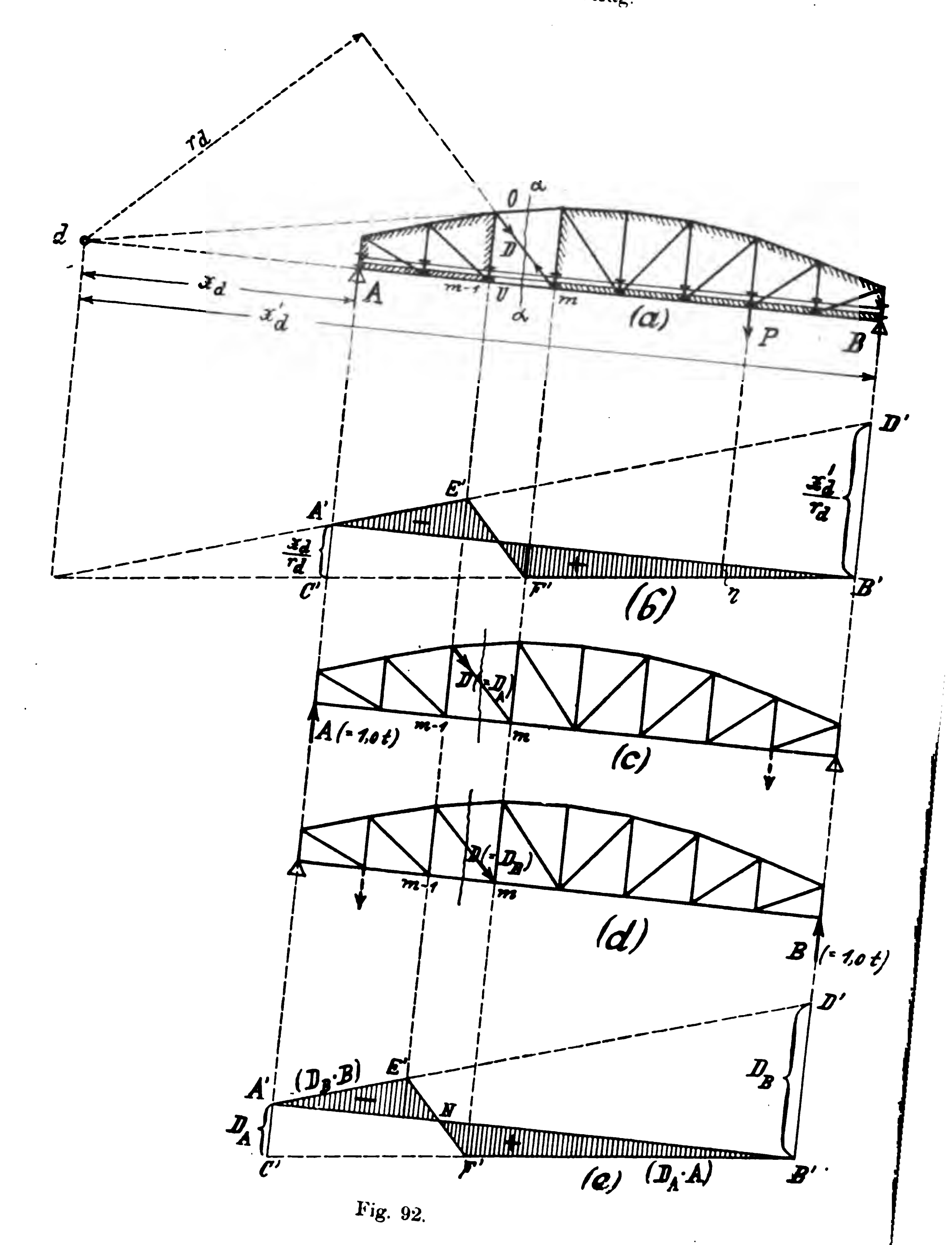

d
rd
O
D
U
A
m-1
m
(a)
P
B
α
x_d
x'_d
D'
E'
A'
$\frac{x'_d}{r_d}$
$\frac{x_d}{r_d}$
C'
F'
(b)
η
B'
D (= D_A)
A (= 1,0 t)
(c)
D (= D_B)
(d)
B (= 1,0 t)
(D_B·B)
D_A
D_B
N
(e)
(D_A·A)

Fig. 92.

auf, indem wir die A-Linie im $\frac{x_d}{r_d}$fachen Maßstabe zeichnen. Von einer Nullachse $A'B'$ wird also unter A' nicht 1,0 t (wie bei der A-Linie), sondern $1{,}0 \cdot \frac{x_d}{r_d}$ aufgetragen und der Endpunkt C' dieser Strecke mit B' verbunden. Dann ist $C'B'$ die Einflußlinie von A im $\frac{x_d}{r_d}$fachen Maßstabe; d. h. die Einflußlinie für unseren gesuchten Wert D. Sie gilt aber nur für Laststellungen rechts vom Schnitte α—α, d. h. auf der Strecke $F'B'$. Denn nur auf diesen Fall bezog sich die ganze obige Ableitung der Formel (Fig. 92b).

Hinsichtlich des *Vorzeichens* ist zu bemerken: Nehmen wir D zunächst positiv an, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für den linken Teil:

$$+D \cdot r_d - A \cdot x_d = 0\,,$$

$$D = +A \cdot \frac{x_d}{r_d}\,.$$

Da nun der Auflagerdruck A positiv ist, ist auch dieser Wert von D positiv. Das heißt: Auf der Strecke $F'B'$ sind die Ordinaten der Einflußlinie positiv zu nehmen.

Befindet sich nun eine Last links vom Schnitte, auf der Strecke von A bis $m-1$, so betrachten wir den rechten Teil. Hier ist B die einzige äußere Kraft. Die Momentensumme lautet jetzt also:

$$M_d = B \cdot x_d'\,,$$

und für die Spannkraft D entsteht der Ausdruck:

$$D = \frac{1}{r_d}\,M_d = B \cdot \frac{x_d'}{r_d}\,.$$

Dieser Ausdruck wird graphisch dargestellt, indem wir die B-Linie im $\frac{x_d'}{r_d}$fachen Maßstabe zeichnen: Nullachse $A'B'$, $B'D' = 1{,}0 \cdot \frac{x_d'}{r_d}$, D' mit A' verbinden. Das Vorzeichen von D bei Laststellung auf dem linken Teil ist aber negativ; denn die Gleichgewichtsbedingung für den Punkt d liefert:

$$-D \cdot r_d - B \cdot x_d' = 0\,,$$

$$D = -B \cdot \frac{x_d'}{r_d}\,.$$

Um dieses negative Vorzeichen auch in der Zeichnung zum Ausdruck zu bringen, tragen wir die B-Linie nach der anderen

Seite der Nullachse auf als vorhin die A-Linie. Dann sind also die Ordinaten der Einflußlinie positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie unterhalb oder oberhalb der Nullachse liegen.

In Fig. 92b ist die gesamte Zeichnung durchgeführt. $F'B'$ ist das mittels der A-Linie bestimmte Stück, das für Laststellungen rechts vom Schnitte gilt. $E'A'$ ist das mittels der B-Linie bestimmte Stück, das für Laststellungen links vom Schnitte gilt. Hängt jetzt an irgendeinem Knotenpunkte eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die unter P liegende Ordinate die Spannkraft D.

Da wir nun indirekte Belastung haben, müssen wir die Ordinaten der Belastungspunkte (Querträger) bestimmen, und die Endpunkte dieser Ordinaten durch gerade Linien verbinden. Diese Regel gilt für alle Einflußlinien, gleichgültig, ob es sich um Auflagerdrücke, Momente, Stabkräfte usw. handelt. Sie trifft natürlich auch dann zu, wenn die Ordinate des einen Belastungspunktes *positiv* und die des anderen *negativ* ist. So hat in Fig. 92a, b die Ordinate unter Querträger $m-1$ ein negatives, und die unter m ein positives Vorzeichen. Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser beiden Ordinaten geht also durch die Nullachse $A'B'$ hindurch. Insgesamt entsteht also die überschlagene Fläche $A'E'F'B'$ mit folgender Eigenschaft: Steht an beliebiger Stelle, in oder zwischen den Knotenpunkten, eine Last P, so ergibt sich die bei dieser Laststellung entstehende Spannkraft D, indem wir P multiplizieren mit der darunterliegenden Ordinate η. *Die Fläche $A'E'F'B'$ ist die Einflußfläche für die Spannkraft D.*

Eine *Vereinfachung* beim Auftragen der Linien ist nicht recht möglich. Man kann zwar leicht beweisen, daß der Schnittpunkt der Linien $B'C'$ und $D'A'$ senkrecht unter d liegt. Doch nützt dies nicht viel, da der Punkt d meistens sehr ungünstig liegt. Man muß schon beide Strecken, $A'C'$ und $B'D'$, auftragen.

Wiederholung: Die Spannkraft D eines Füllungsstabes läßt sich ausdrücken durch die Momentensumme für den Bezugspunkt d dieses Stabes:

$$D = \frac{M_d}{r_d}.$$

Um diesen Ausdruck graphisch darzustellen, tragen wir von einer Nullachse $A'B'$ die Strecken

$$A'C' = \frac{x_d}{r_d} \quad \text{und} \quad B'D' = \frac{x'_d}{r_d}$$

auf und verbinden C' mit B' und D' mit A'. Die erstere Linie gilt für die Laststellungen rechts vom Schnitte, die zweite für

Laststellungen links vom Schnitte. Die Untersuchung der Vorzeichen von D mittels der Momentengleichung ergibt, daß im vorliegenden Falle bei Laststellung rechts der Wert D positiv ist, bei Laststellung links ist er negativ. Deshalb werden die Strecken $A'C'$ und $B'D'$ zu verschiedenen Seiten der Nullachse aufgetragen. Durch Hinunterloten der Belastungspunkte ergibt sich schließlich die überschlagene Linie $A'E'F'B'$ als Einflußlinie für D.

---

2. Mittels der Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t und $B = 1{,}0$ t.

Allgemeiner ist die folgende Methode, die dem im vorigen Paragraphen unter 2) erläuterten Verfahren entspricht. Steht die Last *rechts* von m, so ist bei Betrachtung des links vom Schnitte liegenden Teiles der Auflagerdruck A die einzige äußere Kraft. Denken wir uns nun z. B. einen Kräfteplan vom linken Auflagerpunkt an bis zu dem Stabe D gezeichnet, so ist also in diesem Kräfteplan der Auflagerdruck A die einzige äußere Kraft. Der ganze Kräfteplan, und mit ihm die Kraft D, ist also nur abhängig von der Größe der Kraft A. *Solange sich die Last rechts vom Schnitte befindet, ist D direkt proportional dem Auflagerdruck A.* [Natürlich folgt diese Beziehung auch durch Untersuchung des Stabes nach *Ritter*. Dann stellt sich ebenfalls heraus, daß D direkt mit der Größe der Kraft A variiert.]

Nun nehmen wir an, daß der Auflagerdruck A gerade 1,0 t betrage, weiter keine Lasten am linken Teile wirken, und bestimmen für diesen gedachten Belastungszustand die im Stabe D entstehende Spannkraft. (Mittels Kräfteplan, nach *Ritter* od. dgl.) Sie werde D_A genannt. Wenn nun auch infolge der (auf dem rechten Teile befindlichen) wirklich vorhandenen Last ein anderer Auflagerdruck A als gerade 1,0 t entsteht, so können wir die jetzt hervorgerufene Spannkraft D trotzdem in Beziehung bringen mit unserem Hilfswerte D_A. Denn infolge der vorhin bewiesenen direkten Proportionalität zwischen den Größen von D und A besteht das Verhältnis: Die jetzt im Stabe D auftretende Spannkraft ist um so vielmal größer (oder kleiner) als D_A, als A größer (oder kleiner) als 1,0 t ist. Es ist also diese Spannkraft A-mal so groß als vorhin bei 1,0 t:

$$\text{(IIa)} \qquad D = D_A \cdot A .$$

Mit anderen Worten: Solange die Last *rechts* vom Schnitte steht, ergibt sich die Spannkraft D, indem man einfach den Auflagerdruck A multipliziert mit dem Hilfsfaktor D_A.

Um den obigen Ausdruck (IIa) für die verschiedenen Laststellungen graphisch darzustellen, zeichnen wir also die A-Linie im $D_A$fachen Maßstabe, d. h., wir tragen $A'C' = D_A \cdot 1{,}0$ t auf (Fig. 92e).

Sobald nun die Last *links* vom Schnitte tritt, ist die Spannkraft im Stabe D nicht mehr allein von A abhängig, sondern auch von den zwischen A und $m-1$ befindlichen Lasten. Um nun aber D als nur von *einer* Kraft abhängig darzustellen, betrachten wir jetzt den Teil rechts von m. Hier ist B die einzige äußere Kraft. Es läßt sich wieder nachweisen, daß die Spannkraft D direkt proportional der Größe des Auflagerdruckes B ist. Um D zu finden, nehmen wir also zunächst einen willkürlichen Auflagerdruck $B = 1{,}0$ t an und bestimmen die hierbei im Stabe D auftretende Spannkraft D_B. Ist dann der bei der wirklich vorhandenen Belastung entstehende Auflagerdruck allgemein gleich „B", so ist die dadurch im Stabe D erzeugte Spannkraft Bmal so groß, als vorhin bei 1,0 t; also:

$$\text{(IIb)} \qquad D = D_B \cdot B .$$

Graphisch wird dieser Wert dargestellt, indem wir die B-Linie im $D_B$fachen Maßstabe auftragen, und hiervon das Stück links vom Schnitte (von A bis $m-1$) benutzen (Fig. 92e).

Die Werte D_A und D_B kann man nach irgendeiner Methode bestimmen. Denken wir sie uns nach *Cremona* ermittelt, so würde man also zunächst $A = 1{,}0$ t aufzeichnen und dann der Reihe nach die Stabkräfte bestimmen, bis man zu der Diagonalen gelangt. Entsprechend findet man D_B. Will man rechnerisch vorgehen, so zeichnet man $A = 1{,}0$ t, bzw. $B = 1{,}0$ t ein und bestimmt die hierzu gehörige Diagonalkraft nach der Formel: $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$. Würde man schließlich die Werte nach *Ritter* bestimmen, so ergäbe sich:

$$-A \cdot x_d + D_A \cdot r_d = 0 ,$$

$$D_A = +A \cdot \frac{x_d}{r_d} = +1{,}0 \cdot \frac{x_d}{r_d} ,$$

und zur Bestimmung von D_B (also am Teile rechts vom Schnitt)

$$-B \cdot x_d' - D_B \cdot r_d = 0 ,$$

$$D_B = -B \cdot \frac{x_d'}{r_d} = -1{,}0 \cdot \frac{x_d'}{r_d} .$$

In diesem Falle geht also diese Methode (Fig. 92e) über in die vorhin gezeigte Methode (Fig. 92b). Insofern als wir die Hilfswerte D_A und D_B nach jedem beliebigen Verfahren bestimmen können, ist die vorliegende Methode 2) die allgemeinere.

Die *Vorzeichen* von D_A und D_B ergeben sich natürlich mit bei ihrer Berechnung. Haben beide das gleiche Vorzeichen, so werden sie nach derselben Seite der Nullachse $A'B'$ aufgetragen; bei verschiedenen Vorzeichen sind sie nach verschiedenen Seiten aufzutragen (Fig. 92e). [Wann der eine oder der andere Fall eintritt, werden wir in § 28 sehen.] Die Vorzeichen der Ordinaten der Linien $C'B$ und $D'A'$ sind natürlich bestimmt durch die Vorzeichen der aufzutragenden Werte D_A und D_B.

Zum Schlusse vervollständigen wir dann die Einflußlinie auch für indirekte Belastung, indem wir die Endpunkte der unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten durch gerade Linien verbinden.

Wiederholung: Die Spannkraft eines Füllungsstabes läßt sich so ausdrücken, daß sie als ein Mehrfaches des Auflagerdruckes A bzw. B erscheint:

(IIa)	$D = D_A \cdot A$	[für Laststellung rechts vom Schnitte]
(IIb)	$D = D_B \cdot B$	[„ „ links „ „].

Um diese Ausdrücke graphisch darzustellen, müssen zunächst die Koeffizienten D_A und D_B bestimmt werden: Wir nehmen $A = 1{,}0$ t an und berechnen hierfür die im Stabe D entstehende Spannkraft (D_A); dann $B = 1{,}0$ t und bestimmen die jetzt entstehende Spannkraft (D_B). D_A und D_B werden nun von einer Nullachse $A'B'$ unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen aufgetragen und die Verbindungslinien $C'B'$ und $D'A'$ gezogen. Erstere stellt den obigen Ausdruck (IIa) dar und gilt so lange, als die Spannkraft D nur abhängig ist von der Größe der Auflagerkraft A; d. h. für die Laststellungen rechts vom Schnitte. Die Linie $D'A'$ gilt so lange, als die Spannkraft D direkt proportional ist dem Auflagerdruck B; d. h. für die Laststellungen links vom Schnitte. Dann werden die Belastungspunkte hinuntergelotet, die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten geradlinig verbunden, und die Einflußlinie ist fertig.

Zur Einübung der obigen Methode arbeite der Leser die erste Aufgabe von § 27 durch.

§ 26.

Weitere Bemerkungen zu den Einflußlinien für die Füllungsstäbe.

I. Besonderheiten bei den Zwischenvertikalen.

Die in § 25 entwickelten Methoden gelten im Prinzip sowohl für Haupt- wie für Zwischenvertikalen. Wegen der besonderen Form ihrer Einflußlinien mögen letztere aber an Hand von Fig. 93 noch weiter untersucht werden. Die Belastung in Fig. 93 greife am Untergurt an.

1. Vertikale V_3.

Solange die Last zwischen B und Punkt 4 steht, ist V_3 nur abhängig vom Auflagerdruck A. Denn man gelangt mit einem Kräfteplan von A aus bis zum Stabe V_3, ohne auf eine andere äußere Kraft zu stoßen. Für diese Strecke gilt also die Beziehung:

$$V_3 = V_A \cdot A .$$

Nun würde aber der zu $A = 1{,}0$ t gezeichnete Kräfteplan für die Vertikal V_3 die Spannkraft Null ergeben, da nach der Systemfigur der Untergurtstab am Knoten 3 keinen Knick hat. Auf der Strecke von B' bis $4'$ hat also die Einflußlinie die Ordinaten Null (Fig. 93b).

Entsprechend sieht man aus der Betrachtung des rechten Teiles, daß die Strecke $A'—2'$ gleich Null ist.

Steht die Last $P = 1{,}0$ t im Punkte 3, so ist $V_3 = +P = +1{,}0$ t. Diese Ordinate ist also unter Punkt 3 aufzutragen (Fig. 93b).

Zum Schlusse wird der Endpunkt $3'$ der soeben gefundenen Ordinate mit den benachbarten Endpunkten $2'$ und $4'$ verbunden, und die ganze Einflußlinie ist fertig. Sie besteht also nur aus dem Dreiecke $2'—3'—4'$.

2. Vertikale V_4.

Der entsprechende Gedankengang: Solange die Last zwischen B und Punkt 4 steht, ist V_4 ausdrückbar durch A allein. (Beweis: Ein von A aus bis V_4 gezeichneter Kräfteplan führt als alleinige äußere Kraft den Auflagerdruck A). Für die Strecke $B'—4'$ der Einflußlinie gilt also die Beziehung:

$$V_4 = V_A \cdot A .$$

Der Unterschied gegen die Vertikale V_3 ist nur der, daß jetzt für den Hilfswert V_A nicht Null, sondern eine endliche Spannkraft herauskommen würde. (Man zeichne den Kräfteplan auf!) Dieser Wert V_A ist also als Strecke $A'C'$ aufzutragen, C' mit B' zu verbinden und der Teil $4'—B'$ zu benutzen.

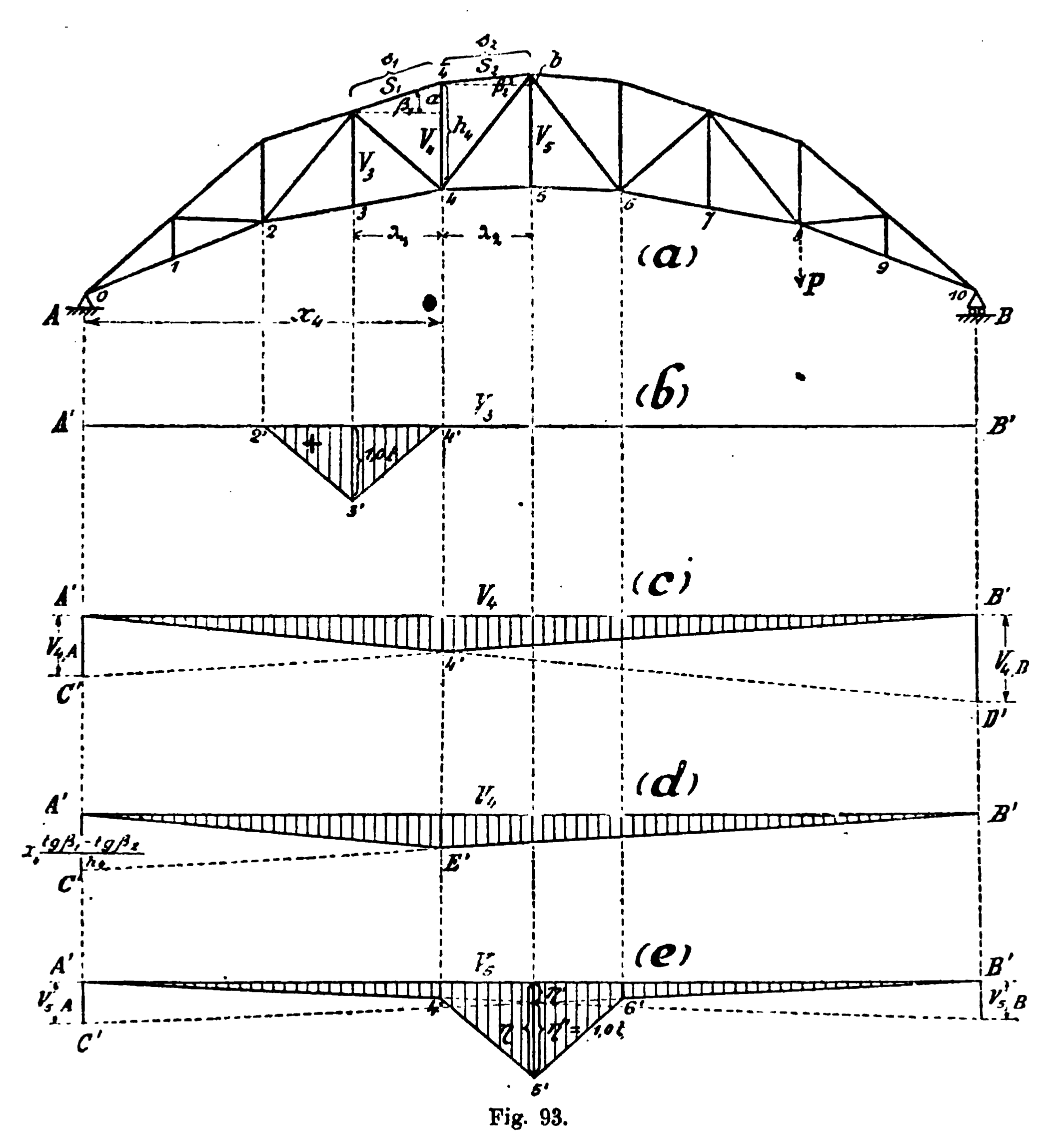


Fig. 93.

Für die linken Laststellungen ergibt sich, daß, solange die Last zwischen A und 4 steht, die Spannkraft V_4 nur vom Auflagerdruck B abhängt. Deshalb V_B auftragen, $D'A'$ ziehen und den Teil A'—$4'$ hiervon benutzen. Der den beiden Linien gemeinsame Punkt $4'$ liegt unter 4. Deshalb hätte es genügt, einen von den beiden Werten V_A und V_B aufzutragen.

Zusatz: Nach § 7a, b läßt sich die Vertikale V_4 durch das Biegungsmoment M_4 ausdrücken, nämlich: $V_4 = M_4(\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2) : h_4$.

Die Einflußlinie für V_4 ergibt sich demnach auch, indem man die Einflußlinie für M_4 im Maßstabe $\frac{\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2}{h_4}$ darstellt. Dies geschieht, indem man von der Nullachse aus die Strecke

$$A'C' = x_4 \frac{\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2}{h_4}$$

aufträgt (Fig. 93d) und hierdurch das Dreieck $A'E'B'$ konstruiert.

3. Vertikale V_5.

Für Laststellungen von B bis 6 gilt der Ausdruck $V_5 = V_A \cdot A$. Für Laststellungen von A bis 4 der Ausdruck $V_5 = V_B \cdot B$. Hierdurch sind die Strecken B'—$6'$ und A'—$4'$ der Einflußlinie erledigt.

Falls die Last direkt im Punkt 5 hängt, können wir V_5 auf folgende Weise bestimmen: V_5 ist dann abhängig vom Auflagerdruck A (oder B) und von der Knotenpunktslast. Die Wirkung der Kraft A, für sich allein genommen, wäre: $V_5 = V_A \cdot A$. Die Wirkung der Knotenpunktslast $P = 1{,}0$ t, für sich allein genommen, wäre: $V_5 = +P = +1{,}0$ t. Insgesamt ist also bei Last im Punkte 5 die Spannkraft V_5:

$$V_5 = V_A \cdot A + 1{,}0\,.$$

Der erste Ausdruck ist in der Einflußlinie durch die Ordinate η' dargestellt:

$$V_A \cdot A = \eta'\,.$$

An den Endpunkt dieser Ordinate muß also noch eine zweite Ordinate:

$$\eta'' = +1{,}0 \text{ t}\,,$$

angesetzt werden. Für das vorliegende System würde sich ergeben, daß bei $A = 1{,}0$ t die Spannkraft des Stabes V_5 positiv ist. Es ist also η' positiv. Da η'' ebenfalls positiv ist, müssen beide Ordinaten summiert werden. Es entsteht also die Ordinate η in der Einflußfläche Fig. 93e. Der Endpunkt von η wird dann schließlich mit den Endpunkten der benachbarten Ordinaten verbunden.

4. Entwicklung der Hilfsvertikalen aus den Gurtstäben.

Hat man bei einem Fachwerke wie Fig. 93a die Gurtstäbe bereits ermittelt, so lassen sich die Hilfsvertikalen, zum Teil wenigstens, auch direkt aus den Gurtkräften ableiten. Für V_4 z. B. folgt aus dem Gleichgewicht des Punktes $\bar{4}$ (S_1 und S_2 zunächst als Zug eingeführt):

$$\text{(I)} \qquad V_4 = -S_1 \cdot \sin\beta_1 + S_2 \cdot \sin\beta_2\,.$$

Hierin können wir noch S_2 durch S_1, oder umgekehrt, ausdrücken (§ 24, 3. Aufgabe):

$$S_2 = S_1 \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \qquad \text{bzw.} \qquad S_1 = S_2 \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1},$$

so daß für V_4 die Formel entsteht:

$$V_4 = -S_1 \cdot \sin\beta_1 + S_1 \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \cdot \sin\beta_2,$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} V_4 = S_1(-\sin\beta_1 + \cos\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_2); \text{ oder, entsprechend,} \\ V_4 = S_2(\ \sin\beta_2 - \cos\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\beta_1). \end{cases}$$

Hiermit ist V_4 durch S_1 bzw. S_2 ausgedrückt. Die Formeln (II) kann man auch schreiben (Fig. 95a):

$$\text{(IIa)} \qquad V_4 = S_1\left(-\frac{a}{s_1} + \frac{\lambda_1}{s_1} \cdot \frac{b}{\lambda_2}\right) = S_2\left(\frac{b}{s_2} - \frac{\lambda_2}{s_2} \cdot \frac{a}{\lambda_1}\right),$$

was namentlich bei *gleichen* Feldweiten ($\lambda_1 = \lambda_2$) sehr bequem ist. Dahn entsteht nämlich:

$$\text{(III)} \qquad V_4 = \frac{S_1}{s_1}(-a + b) = \frac{S_2}{s_2}(-a + b) \quad \text{bei gleichen Feldweiten.}$$

Es sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß diese Formeln für den Fall abgeleitet sind, daß der Knotenpunkt, der von der Vertikalen und den Gurtstäben gebildet wird, der *unbelasteten* Gurtung angehört. [Denn sonst müßte in der Ausgangsformel (I) auch noch eine Last P berücksichtigt werden.] V_5 z. B. läßt sich also nicht in dieser einfachen Weise durch die anschließenden Gurtstäbe ausdrücken, wie man schon aus der Verschiedenheit der Einflußlinien erkennt.

Wiederholung.

Bei den Hilfsvertikalen haben wir drei Fälle betrachtet, je nach der Art des Knotenpunktes, der durch diese Vertikalen und die Gurtstäbe gebildet wird: 1) Die Gurtung geht ohne Knick durch; 2) die Gurtung bildet einen Knick, der Knotenpunkt gehört der unbelasteten Gurtung an; 3) die Gurtung bildet einen Knick und ist belastet.

Im ersten Falle besteht die Einflußfläche aus einem Dreieck von der Höhe 1,0 t, das sich nur über die beiden benachbarten Felder erstreckt. Im zweiten Falle ist sie ein Dreieck über die ganze Länge $A'B'$. Im dritten Falle ist sie die Kombination dieser beiden Dreiecke. (Beispiel s. § 27, 2. Aufgabe.) Im zweiten Falle kann man aber die betreffende Vertikale auch direkt durch die Gurtkräfte ausdrücken.

II. Unterschied bei Belastung am Obergurt und am Untergurt.

Man muß beim Aufzeichnen der Einflußlinien stets darauf achten, ob die Belastung am Ober- oder am Untergurt angreift. In Fig. 95a ist der Fall angenommen, daß die Belastung am Untergurt angreift. Hier ist m der erste Knotenpunkt rechts vom Schnitte, und $m-1$ ist der erste Knotenpunkt links vom Schnitt. Deshalb ist der Punkt F' der Einflußlinie, der die Stelle angibt, bis zu der die Linie $C'B'$ benutzt wird, senkrecht unter m. Und der Punkt E', mit dem wir immer die Verwendungsgrenze der Linie $D'A'$ ($F''A'$) bezeichnet hatten, liegt senkrecht unter dem Punkte $m-1$.

Die Sache ändert sich, sobald die Belastung am Obergurt angreift (Fig. 95b). Dann ist der Punkt (m) der erste Punkt rechts vom Schnitt und ($m-1$) der erste Punkt links davon. Der rechte Teil des Balkens reicht jetzt also von B bis (m) und der linke von A bis ($m-1$). Dementsprechend liegt der Punkt F' der Einflußlinie senkrecht unter (m), und Punkt E' liegt senkrecht unter ($m-1$). Die Einflußlinie hat jetzt also die in Fig. 95b dargestellte Form.

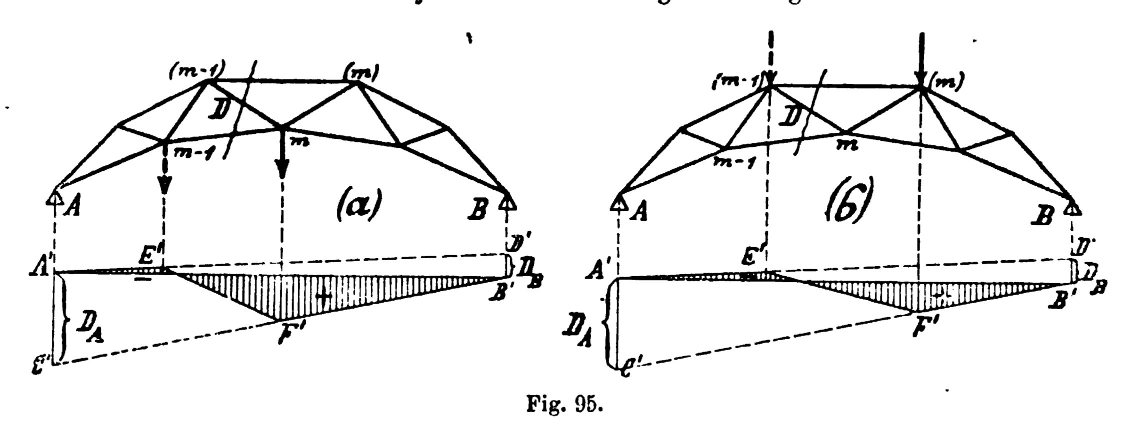


Fig. 95.

Wie man sieht, hat sich gegenüber der Einflußlinie Fig. 95a (für Belastung am Untergurt) die Lage des Stückes $E'F'$ geändert. Allgemein hat man hierfür: Die Abschrägung $E'F'$ liegt immer unter dem Felde, wo der zu dem betreffenden Stabe gehörige Schnitt durch die *die Lasten tragende* Gurtung hindurchgeht.

Bei einem Fachwerk mit Vertikalen (Ständerfachwerk) ist es bei den Diagonalen allerdings gleichgültig, ob die Belastung am Unter- oder am Obergurt angreift; hier bleibt die Abschrägung $E'F'$ immer an derselben Stelle. In allen anderen Fällen — namentlich auch bei den Vertikalen — ist die obige Regel sehr wohl zu beachten.

§ 27.

Beispiele zu § 25 und § 26.

Vorbemerkung: Im folgenden sind stets dieselben Bezeichnungen benutzt, wie bei der Ableitung der Einflußlinien: Die Nullachse ist stets mit $A'B'$ bezeichnet. Die Werte D_A und D_B (bzw. V_A und V_B) sind als Strecken $A'C'$ und $B'D'$ aufgetragen. Die beiden Linien, die die Einflußfläche begrenzen, sind demnach $C'B'$ und $D'A'$. Die erstere gilt vom Punkte B' bis F', wobei F' unter dem äußersten Knotenpunkte der belasteten Gurtung des rechten Fachwerkteiles liegt. Die Linie $D'A'$ hat ihren Gültigkeitsbereich von A' bis E', und zwar liegt E' unter dem äußersten Knotenpunkte der belasteten Gurtung am linken Fachwerkteile. Die Abschrägung $E'F'$ der Einflußlinie erstreckt sich also immer innerhalb des Feldes, wo der betreffende Schnitt durch die die Lasten tragende Gurtung geht.

Erste Aufgabe.

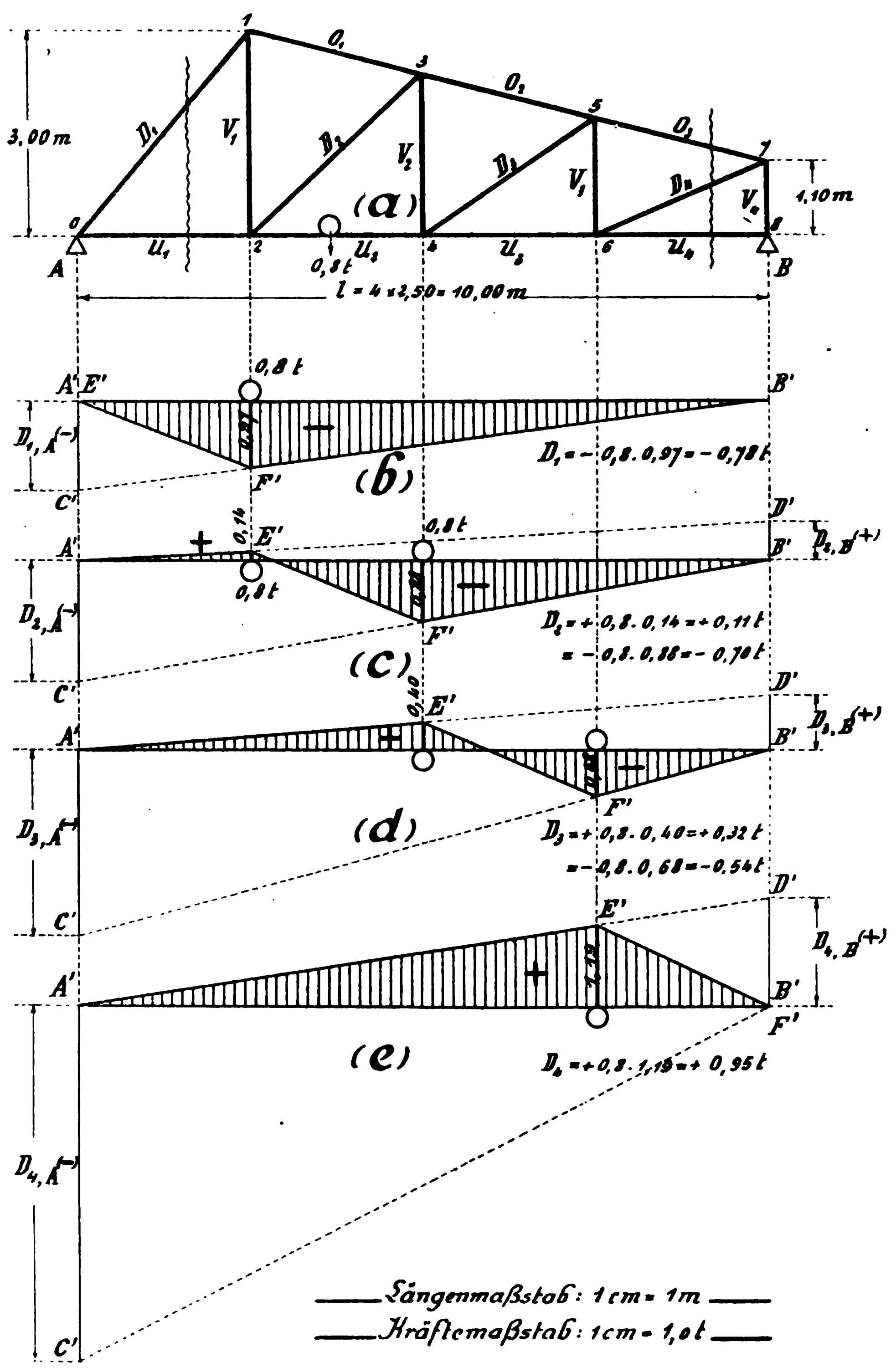
Die Füllungsstäbe des Fachwerkes Fig. 96a, 97a sind mittels Einflußlinien zu untersuchen!

Die Belastung bestehe aus einem auf dem Untergurt wandernden Lasthaken von 0,8 t (wie bei Aufgabe 1 in § 24).

a) Aufzeichnen der Einflußlinien.

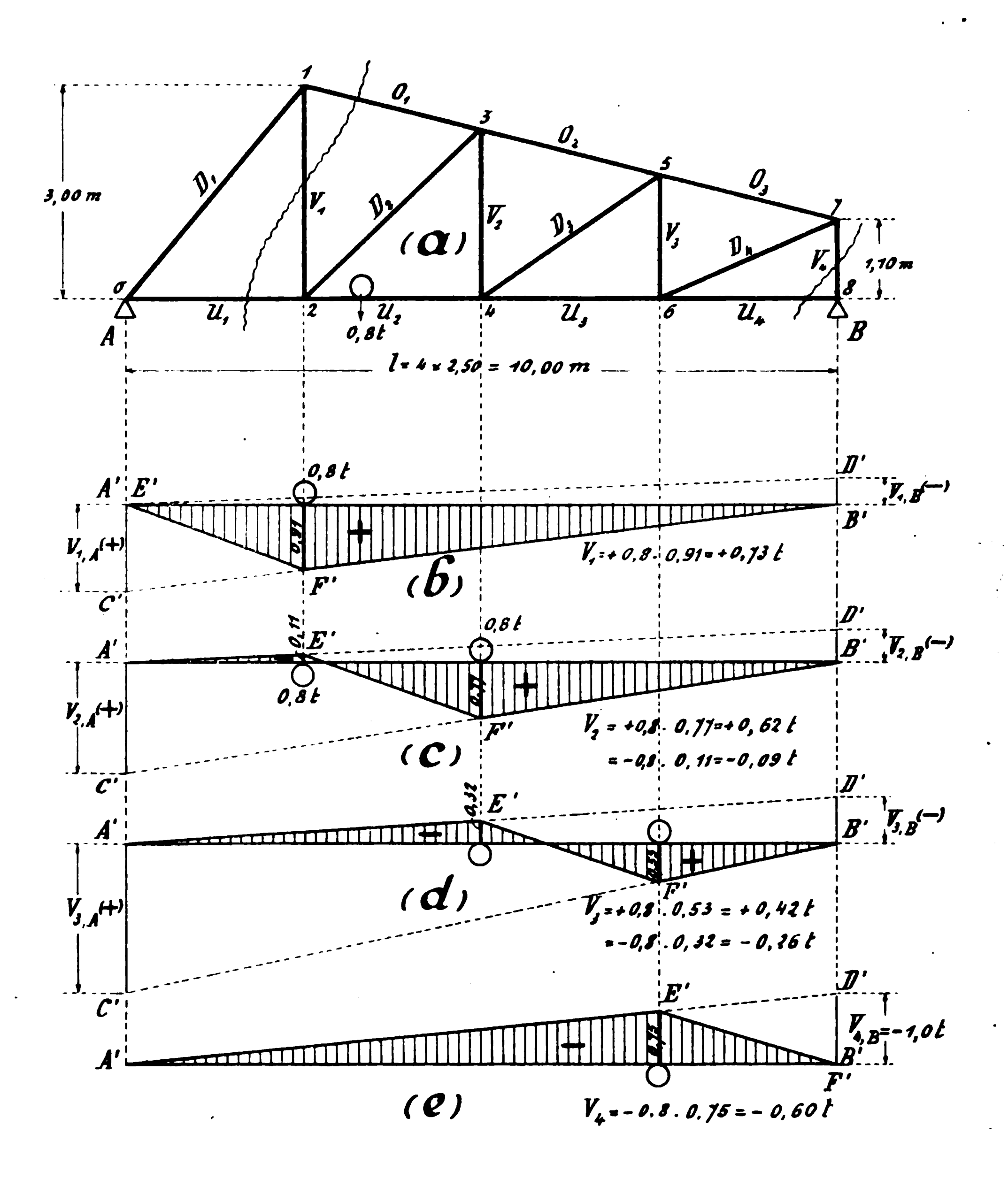
Das Aufzeichnen der Einflußlinien geschehe mit Hilfe von D_A und D_B bzw. V_A und V_B. Diese Hilfswerte sind bereits in Fig. 86c und e mittels Kräfteplan bestimmt und können von dort übernommen werden. Es zeigt sich, daß beim vorliegenden Fachwerke die Spannkräfte der Füllungsstäbe infolge $A = 1{,}0$ t und diejenigen infolge $B = 1{,}0$ t stets verschiedene Vorzeichen haben. Die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t ist von der Nullachse aus nach unten abgetragen. Wegen der Verschiedenheit im Vorzeichen muß also die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t nach oben aufgetragen werden.

Bei den Einflußlinien für D_2 und D_3 (Fig. 96c und d) ist wohl weiter nichts mehr zu erklären. Bei der Einflußlinie für D_1 fällt der Punkt E' (der die Gültigkeitsgrenze der Linie $A'D'$ angeben würde) in den Punkt A' hinein. Die Linie $A'E'$ schrumpft hier also in einen Punkt A', E' zusammen; d. h. sie wird über-



3,00 m
1,10 m
(a)
0,8 t
l = 4 × 2,50 = 10,00 m
(b)
$D_1 = -0,8 \cdot 0,97 = -0,78\,t$
(c)
$D_2 = +0,8 \cdot 0,14 = +0,11\,t$
$= -0,8 \cdot 0,88 = -0,70\,t$
(d)
$D_3 = +0,8 \cdot 0,40 = +0,32\,t$
$= -0,8 \cdot 0,68 = -0,54\,t$
(e)
$D_4 = +0,8 \cdot 1,19 = +0,95\,t$
Längenmaßstab: 1 cm = 1 m
Kräftemaßstab: 1 cm = 1,0 t

Fig. 96.



3,00 m
1,10 m
(a)
0,8 t
l = 4 × 2,50 = 10,00 m
(b)
V₁ = + 0,8 · 0,91 = + 0,73 t
(c)
V₂ = + 0,8 · 0,77 = + 0,62 t
= − 0,8 · 0,11 = − 0,09 t
(d)
V₃ = + 0,8 · 0,53 = + 0,42 t
= − 0,8 · 0,32 = − 0,26 t
(e)
V₄,B = − 1,0 t
V₄ = − 0.8 . 0.75 = − 0,60 t
Längenmaßstab: 1 cm = 1,00 m
Kräftemaßstab: 1 cm = 1,0 t

Fig. 97.

haupt nicht gebraucht. Deshalb braucht der Kräfteplan für $B = 1{,}0$ t (Fig. 86e) überhaupt nicht bis zum Stabe D_1 durchgeführt zu werden.

Entsprechend ist es beim Stabe D_4. Hier wird nur die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t gebraucht. Dagegen schrumpft die geltende Strecke $F'B'$ der Verbindungslinie $C'B'$ in einen Punkt zusammen, so daß sie gar nicht aufgetragen zu werden braucht.

In Fig. 97 sind ferner die Einflußlinien für die Vertikalen gezeichnet. Auch hier dürfte alles klar sein. Man muß vor allen Dingen darauf achten, wo die Abschrägung $E'F'$ zu liegen kommt. Ergibt sich, daß z. B. der Punkt E' schon in den Punkt A' der Nullachse fällt, so braucht die Linie $A'D'$ (Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t) gar nicht gezeichnet zu werden, da ihre gültige Strecke doch zu einem Punkte zusammenschrumpft. Entsprechend kann man auf die Spannkraft infolge $A = 1{,}0$ t verzichten, sobald sich herausstellt, daß der Punkt F' mit B' zusammenfällt.

b) Auswertung der Einflußlinien.

Hat eine Einflußlinie nur *ein* Vorzeichen, so gibt es auch nur eine ungünstigste Laststellung für den betreffenden Stab. (Stäbe D_1, D_4, V_1, V_4.) Besteht aber die Einflußlinie aus einem positiven und einem negativen Teil, so muß jeder dieser Teile besonders untersucht werden. Man erhält dann eine Laststellung, die den größten positiven, und eine, die den größten negativen Wert der betreffenden Stabkraft erzeugt. Für die Stäbe D_2, D_3 und V_2, V_3 sind deshalb je zwei ungünstigste Laststellungen zu berücksichtigen. Die sich ergebenden Spannkräfte sind direkt zu den Einflußlinien hinzugeschrieben.

Schlußbetrachtung: Es sei besonders auf den Gegensatz zwischen Gurtstäben und Füllungsstäben hingewiesen. Bei den Gurtstäben (eines einfachen Fachwerksystems, ohne überkragende Enden) hat die Einflußlinie nur ein Vorzeichen; also gibt es auch nur eine gefährliche Laststellung. Bei den Füllungsstäben hat die Einflußlinie im allgemeinen zwei Teile; also sind zwei Laststellungen zu berücksichtigen. Die eine ist maßgebend für die größte Zug-, die andere für die größte Druckbeanspruchung des betreffenden Stabes.

Zweite Aufgabe.

Die Füllungsstäbe des Halbparabelträgers Fig. 98, 99 sind mittels Einflußlinien zu untersuchen!

Die Belastung s. § 24, 2. Beispiel (Fig. 88b und c).

Das Aufzeichnen der Einflußlinien geschehe wieder mit Hilfe der Werte D_A, D_B bzw. V_A, V_B. Da das System symmetrisch ist, genügt die Untersuchung der einen, z. B. linken, Hälfte.

a) Bestimmung von D_A, D_B usw. mit Benutzung der Symmetrie.

Um nun beispielsweise für den Stab D_2 die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t und $B = 1{,}0$ t zu erhalten, ist in Fig. 98b ein Kräfteplan für $A = 1{,}0$ t gezeichnet und zwar nicht nur für die linke, sondern auch für die rechte Hälfte. Dieser Kräfteplan gibt dann nämlich nicht nur die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t, sondern auch infolge $B = 1{,}0$ t. Denn wegen der Symmetrie des Systems besteht augenscheinlich folgende Beziehung: Die gesuchte Spannkraft des Stabes D_2 infolge $B = 1{,}0$ t ist ebenso groß wie die Spannkraft des symmetrisch gelegenen Stabes D_7 infolge $A = 1{,}0$ t. Letztere Spannkraft aber ist aus dem Kräfteplan zu entnehmen. (Deshalb wurde er ja eben für das ganze System gezeichnet.) Wir sehen also, daß der Kräfteplan Fig. 98b tatsächlich für jeden Stab sowohl die Spannkraft infolge $A = 1{,}0$ t als auch infolge $B = 1{,}0$ t liefert, letztere durch Benutzung der Symmetrieeigenschaft des Systems.

b) Aufzeichnen der Einflußlinien.

Mit Hilfe der Werte D_A und D_B, bzw. V_A und V_B sind in Fig. 98 und 99 die Einflußlinien gezeichnet. Die Abschrägung $E'F'$ liegt immer in dem Felde, in dem der betreffende Schnitt die die Lasten tragende Gurtung durchbricht. Deshalb liegt bei dem Stabe D_1 diese Abschrägung bereits im ersten Felde; d. h. der Teil $A'E'$ der Einflußlinie schrumpft zu dem Punkte $A'E'$ zusammen. Entsprechend ist es bei V_0. Bei den Stäben $D_2 - D_4$ und $V_1 - V_3$ treten dagegen die beiden Teile $A'E'$ und $B'F'$ der Einflußlinien in Erscheinung; und zwar mit verschiedenen Vorzeichen, entsprechend den verschiedenen Vorzeichen aus dem Kräfteplan.

Die Vertikale V_4 ist eine Zwischenvertikale. Ihre Einflußlinie wird ebenfalls mit Hilfe der Spannkräfte infolge der $A = 1$ t und $B = 1$ t bestimmt (§ 26, Fig. 93c). Wegen der Symmetrie des Fachwerks ist $V_{4,A} = V_{4,B}$.

c) Auswerten der Einflußlinien.

Zum Schlusse wurden die Lasten so aufgestellt, daß sich für jeden Stab der größte Zug und Druck ergab, und die Resultate eingeschrieben.

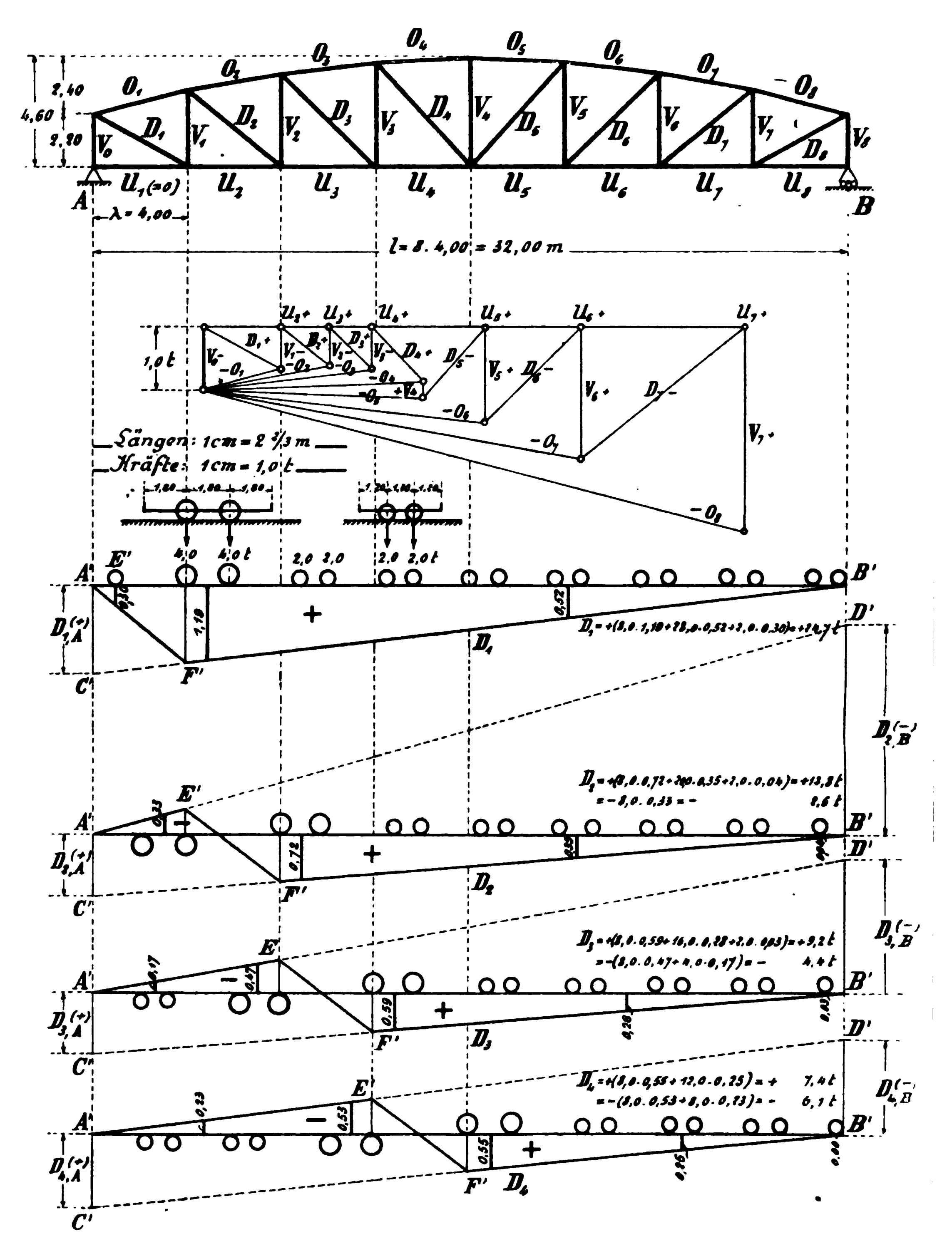


Fig. 98.

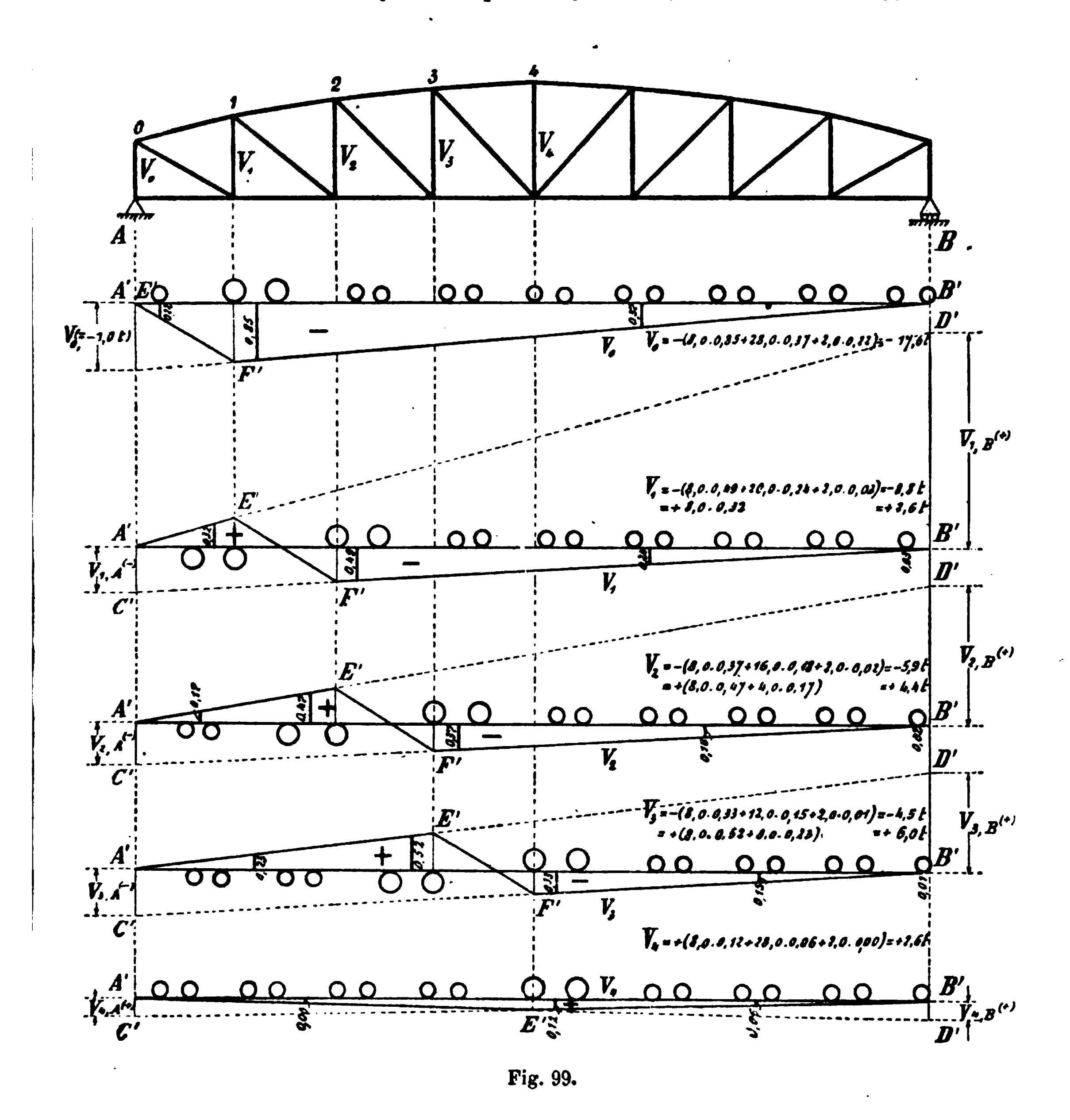


Fig. 99.

Übungsaufgabe. Berechne die Diagonalen und Vertikalen des Fachwerkes Fig. 98 infolge einer beweglichen, gleichmäßig verteilten Last von 2,0 t/m!

§ 28.

Zusammenstellung der verschiedenen Formen der Einflußlinien. Genaueres über die zugehörigen Laststellungen.

I. Gurtstäbe.

Die Form der Einflußlinie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie auf ihrer ganzen Länge das gleiche Vorzeichen hat. Um also z. B. für O_m in Fig. 101 die größte Spannkraft zu erhalten, müssen

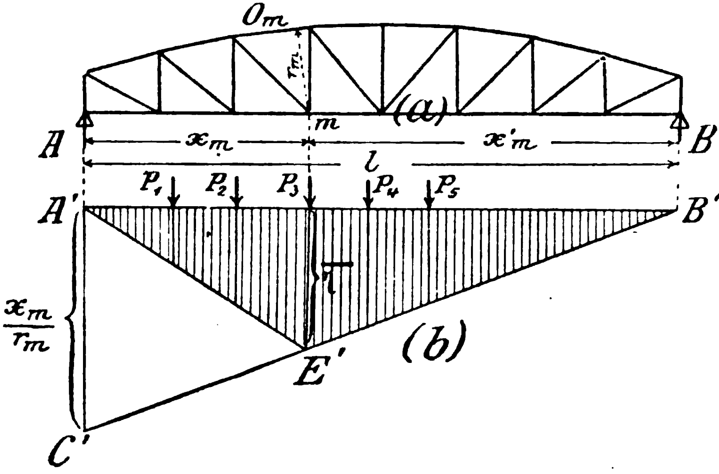


Fig. 101.

wir den Träger sowohl rechts als auch links von m belasten: *Die größte Spannkraft in einem Gurtstabe entsteht bei Vollbelastung.*

Hieraus ergibt sich, daß, wenn der Träger für eine verteilte Belastung zu rechnen ist (Straßenbrücken usw.), die Belastung über der ganzen Länge anzunehmen ist. Ist der Träger aber für ein bewegliches System von Einzellasten zu rechnen (Eisenbahnbrücken), so muß man noch entscheiden, in welcher Anordnung die Lasten in bezug auf den Punkt m aufzustellen sind.

Am einfachsten geschieht diese Entscheidung durch Probieren: Man nimmt zunächst eine Stellung (Fig. 101 b) an und untersucht dann, ob durch ein Verschieben des Zuges in eine andere Stellung eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung der Spannkraft erzielt wird.

Will man mathematisch vorgehen, so beachte man, daß die Einflußlinie für einen Gurtstab nichts anderes ist als die im $\frac{1}{r_m}$ fachen Maßstabe gezeichnete Einflußlinie für das Biegungs-

moment am Punkte m (Fig. 84a, 101b). Die größte Gurtspannung tritt also bei derselben Laststellung auf, bei der das größte Moment entsteht. Die Aufgabe, für eine Stelle m die Lasten so aufzustellen, daß das Biegungsmoment M_m so groß wie möglich wird, haben wir aber bereits bei der Untersuchung der Biegungsmomente behandelt. In Band I, § 68, hatte sich folgendes Kennzeichen ergeben: Damit das Biegungsmoment an einem Punkte m eines Balkens infolge einer beweglichen Lastengruppe $P_1 \ldots P_5$ seinen Größtwert erreicht, müssen die Lasten so aufgestellt werden, daß eine Last direkt über m steht und ferner die Bedingungen erfüllt sind (vgl. Band I, Fig. 118, Band II, Fig. 101b):

$$R \frac{x_m}{l} < (P_1 + P_2 + P_3)\,, \tag{1}$$

$$R \frac{x_m'}{l} < (P_5 + P_4 + P_3)\,; \tag{2}$$

in Worten: 1) Die Ersatzkraft *sämtlicher* Lasten (das ist die Summe der Lasten) multipliziert mit der Entfernung des Punktes m vom *linken* Auflager und dividiert durch die Spannweite muß kleiner sein als die Summe der Lasten *links* von m, vermehrt um die über m stehende Last (P_3); 2) die Ersatzkraft *sämtlicher* Lasten multipliziert mit der Entfernung des Punktes m vom *rechten* Auflager und dividiert durch die Spannweite muß kleiner sein als die Summe der Lasten *rechts* von m, vermehrt um die über m stehende Last.

Sind die Lasten so aufgestellt, daß diese *beiden* Bedingungen erfüllt sind, so entsteht am Punkt m das größte Biegungsmoment und entsprechend im Stabe O_m die größte Spannkraft. Ist die *erste* Bedingung nicht erfüllt, so müssen die Lasten nach *links* verschoben werden, und zwar so weit, daß die Last P_4 über die Ordinate η gelangt. Ist die *zweite* Bedingung nicht erfüllt, so müssen die Lasten nach *rechts* verschoben werden, bis P_2 über η zu stehen kommt.

Auf diese Weise kann man also entscheiden, ob eine Laststellung in einem Gurtstab die maximale Spannkraft hervorbringt. Man muß aber beachten, daß die beiden Bedingungen 1) und 2) unter der Voraussetzung aufgestellt sind, daß die Belastung *direkt* auf den Träger einwirkt. Sie können also für die Untersuchung der Gurtkräfte nur in den Fällen verwandt werden, in denen die Einflußlinie für direkte Belastung übereinstimmt mit

der für indirekte Belastung; z. B. also für Fig. 101. Bei Fig. 85, 91° stimmen diese Einflußlinien nicht überein. Auf diesen Fall können also die aus der Betrachtung der Momente gewonnenen Kriterien nicht ohne weiteres übertragen werden. Man hat auch hierfür bestimmte Kennzeichen aufgestellt, doch hat es wenig Zweck, sie abzuleiten, da man doch nicht damit arbeitet.

Zusatz. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß die vorstehenden Bedingungen 1) und 2) gleichzeitig die Lösung folgender Aufgabe enthalten: Für irgendeine Größe habe sich eine dreieckförmige Einflußlinie ergeben. Wie müssen die Lasten aufgestellt werden, damit diese Größe ihren Maximalwert erreicht?

Die Antwort wird lauten: „Sie müssen so aufgestellt werden, daß die obigen Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind.“ Denn was für eine dreieckförmige Einflußlinie gilt, gilt für jede andere auch.

II. Füllungsstäbe.

1. Verschiedene Vorzeichen der Einflußlinien.

Während bei den Gurtstäben die Einflußlinie nur *ein* Vorzeichen hat, können bei den Füllungsstäben zwei Fälle eintreten:
a) Die Einflußfläche hat einen positiven und einen negativen Teil;
b) die Einflußfläche hat nur *ein* Vorzeichen.

Beide Fälle wollen wir genauer betrachten.

Der Unterschied zwischen Gurt- und Füllungsstäben hängt mit der Lage der Bezugspunkte m bzw. d zusammen. Während nämlich bei den Gurtstäben der Bezugspunkt stets *innerhalb* der Spannweite des Trägers liegt, gibt es bei den Füllungsstäben zwei Möglichkeiten:

a) *der Bezugspunkt liegt außerhalb der Spannweite;*

b) *der Bezugspunkt liegt innerhalb der Spannweite.*

Wir werden sofort sehen, daß diesen beiden Möglichkeiten die obenerwähnten beiden Fälle a) und b) bei den Einflußlinien entsprechen. Die Untersuchung der zur Aufzeichnung der Einflußlinien verwendeten Hilfswerte wird nämlich ergeben: Liegt der Bezugspunkt des betreffenden Stabes außerhalb der Spannweite, so haben die Hilfswerte D_A und D_B (V_A und V_B) verschiedene Vorzeichen, so daß die Einflußlinie aus zwei Teilen mit verschiedenen Vorzeichen zusammengesetzt wird. Liegt der Bezugspunkt innerhalb der Spannweite, so haben D_A und D_B (V_A und V_B) das gleiche Vorzeichen, so daß die Einflußlinie aus Strecken mit gleichem Vorzeichen zusammengesetzt wird.

a) Bezugspunkt außerhalb der Spannweite.

Diesen Fall haben wir der Ableitung der Einflußlinien in Fig. 92 zugrunde gelegt. Auch bei dem in Fig. 102a dargestellten Träger liegt der Bezugspunkt d (gefunden als Schnittpunkt von O und U) außerhalb der Spannweite. Die Einflußlinie (Fig. 102b) besteht dann aus einem positiven und einem negativen Teile, weil die Spannkraft D_A positiv und die Spannkraft D_B negativ ist. Aus der Momentengleichung für den Punkt d folgt nämlich (D zunächst als Zug eingeführt):

$$\text{infolge } A = 1{,}0\text{ t:} \quad +D \cdot r_d - A \cdot x_d = 0\,; \quad D_A = +A \cdot \frac{x_d}{r_d}\,,$$

$$\text{„} \quad B = 1{,}0\text{ t:} \quad -D \cdot r_d - B \cdot x_d' = 0\,; \quad D_B = -B \cdot \frac{x_d'}{r_d}\,.$$

Somit ist bewiesen, daß, wenn der Bezugspunkt außerhalb der Spannweite liegt, die Einflußfläche aus einem positiven und einem negativen Teil besteht.

In Fig. 102a ist D eine *linkssteigende* Diagonale. Für eine solche ist also die positive Beitragsstrecke *rechts* von N' und die negative Beitragsstrecke *links* von N'. Bei einer *rechtssteigenden* Diagonalen, D_1 in Fig. 102a, ist es anders. Wie man sich aus der Momentengleichung für deren Bezugspunkt leicht überzeugt, ist für D_1 der Wert $D_{1,A}$ negativ, $D_{1,B}$ positiv. Die Einflußlinie für diese rechtssteigende Diagonale hat also die positive Beitragsstrecke links und die negative rechts.

Den Schnittpunkt N' der Linie $E'F'$ mit der Nullachse $A'B'$ nennt man **Lastscheide oder Nullpunkt.** Eine Last, die gerade über N' steht, bringt in dem betreffenden Stabe die Spannkraft Null hervor. Der Nullpunkt teilt die gesamte Einflußlinie in eine „*positive*“ und eine „*negative Beitragsstrecke*“.

b) Bezugspunkt innerhalb der Spannweite.

Für diese Möglichkeit ist in Fig. 102d ein Beispiel gezeichnet. Das Vorzeichen der Einflußlinie bestimmen wir wieder am einfachsten, wenn wir sie uns mit Hilfe der Werte D_A und D_B aufgetragen denken. Die Spannkraft in D für den Fall, daß links vom Schnitte der Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t als einzige äußere Kraft angreift, ergibt sich (D als Zug eingeführt):

$$+1{,}0 \cdot x_d - D_A \cdot r_d = 0\,,$$

$$D_A = +1{,}0 \cdot \frac{x_d}{r_d}\,.$$

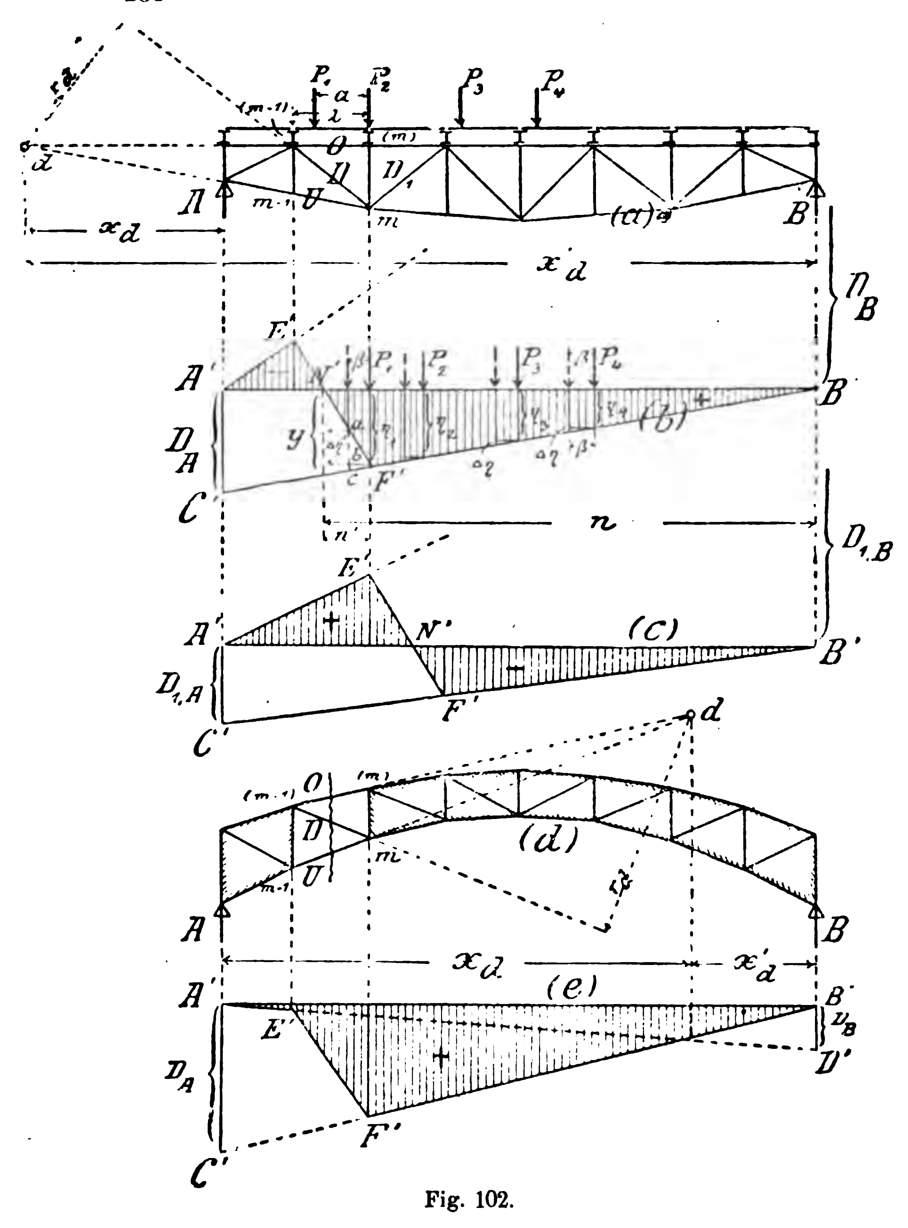


Fig. 102.

Für D_A stellt sich also ein positiver Wert heraus.

D_B finden wir aus der Gleichung:

$$-1{,}0 \cdot x_d' + D_B \cdot r_d = 0\,,$$

$$D_B = +1{,}0 \cdot \frac{x_d'}{r_d}\,.$$

D_B ist also ebenfalls eine Zugkraft.

Für den Träger in Fig. 102d hat sich sowohl für D_A als auch für D_B ein positiver Wert ergeben. Wir müssen also beide Spannkräfte von der Nullachse aus *nach derselben Seite* auftragen und finden die Einflußlinie, indem wir von $C'B'$ den Teil rechts von m, von $A'D'$ den Teil links von $m-1$ benutzen, und schließlich die Endpunkte der unter den Belastungspunkten $m-1$ und m liegenden Ordinaten durch die Gerade $E'F'$ verbinden. Somit ist aus Fig. 102d, e bewiesen: Liegt der Bezugspunkt eines Stabes *innerhalb* der Spannweite, so hat seine Einflußlinie nur *ein* Vorzeichen.

Zusatz: Der Schnittpunkt der Linien $C'B'$ und $D'A'$ in Fig. 102e liegt senkrecht unter dem Bezugspunkte d, wie sich geometrisch leicht beweisen läßt. Hierdurch Erleichterung der Zeichnung.

2. Die Anordnung der Lasten innerhalb der Beitragsstrecken. (Ungünstigste Laststellungen.)

Wir wollen jetzt den allgemeinen Fall zugrunde legen, daß zu dem betreffenden Stabe eine positive und eine negative Beitragsstrecke gehört, und nun genauer untersuchen, wie wir innerhalb einer Beitragsstrecke die Lasten aufstellen müssen, um die größte positive oder negative Spannkraft des Stabes zu erhalten.

a) Verteilte Belastung.

Ist der Träger für verteilte Belastung (z. B. Menschengedränge) zu berechnen, so wird natürlich einmal die gesamte positive und dann die gesamte negative Beitragsstrecke belastet. Hierdurch sind die Grenzwerte der Spannkräfte bestimmt.

b) Einzellasten.

Besteht die Belastung aber aus Einzellasten, so muß man noch genauer untersuchen, wie die einzelnen Lasten innerhalb der positiven (negativen) Beitragsstrecke aufzustellen sind, um die größte positive (negative) Spannkraft zu erhalten.

Am schnellsten kommt man hierbei durch Probieren zum Ziele. Die schwersten Lasten werden natürlich da aufgestellt, wo die größten Ordinaten η sind. Meistens kann man sofort entscheiden, wie die Lasten aufzustellen sind. Andernfalls muß man zwei Stellungen, selten mehr, miteinander vergleichen.

Will man mathematisch vorgehen, so läßt sich folgendes Kennzeichen für die maßgebende Laststellung ableiten. In Fig. 102a seien die Lasten zunächst von B aus bis zum Punkte (m) vorgerückt. Diese Stellung heißt die (positive) „Grundstellung" für Stab D. Sie ist in Fig. 102b unmittelbar über der Nullachse eingetragen.

Die bei dieser Stellung im Stabe D entstehende Spannkraft **ist**

$$D = +P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + P_4 \eta_4 .$$

Rückt nun der Zug um eine Strecke β vor, so daß er in die punktiert gezeichnete Stellung kommt, so hat jede der Ordinaten η_2, η_3, η_4 zugenommen um ein Stück $\Delta\eta$, während die Ordinate η_1 abgenommen hat um $\Delta\eta'$. Durch dieses Vorrücken hat sich also die Spannkraft in der Diagonalen verändert um

$$\Delta D = -P_1 \cdot \Delta\eta' + (P_2 + P_3 + P_4) \cdot \Delta\eta .$$

Das Stück $\Delta\eta$ berechnet sich aus (Fig. 102b):

$$\Delta\eta : \beta = y : n ;$$

$$\Delta\eta = \beta \cdot \frac{y}{n} .$$

Um $\Delta\eta'$ auszudrücken, setzen wir

$$\Delta\eta' = \overline{ab} = \overline{ac} - \overline{bc} .$$

Diese Größen ergeben sich aber aus:

$$\overline{ac} : \beta = y : n' ; \quad \text{folglich} \quad \overline{ac} = \beta \cdot \frac{y}{n'} .$$

$$\overline{bc} : \beta = y : n ; \quad \text{„} \quad \overline{bc} = \beta \cdot \frac{y}{n} .$$

Wir erhalten also

$$\Delta\eta' = \beta \left(\frac{y}{n'} - \frac{y}{n} \right),$$

und es wird

$$\Delta D = -P_1 \cdot \beta \left(\frac{y}{n'} - \frac{y}{n} \right) + (P_2 + P_3 + P_4) \beta \frac{y}{n}$$

$$= \left[-P_1 \frac{y}{n'} + P_1 \frac{y}{n} + (P_2 + P_3 + P_4) \frac{y}{n} \right] \beta$$

$$= \left[\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n} - \frac{P_1}{n'} \right] \cdot \beta \cdot y ,$$

$$\Delta D + \left[(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - P_1 \cdot \frac{n}{n'} \right] \frac{\beta \cdot y}{n} .$$

Dieses ist also der Unterschied in der Diagonalkraft bei **‚Grundstellung“** und **„vorgezogener Stellung“**.

Ist nun $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$ *kleiner* als $P_1 \cdot \frac{n}{n'}$, so ergibt sich aus der obigen Formel für ΔD ein *negativer* Wert. In diesem Falle ist also durch das Vorrücken des Zuges die Spannkraft D verkleinert worden. Ist aber $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$ größer als $P_1 \cdot \frac{n}{n'}$, so ist ΔD positiv, dann muß also der Zug vorgeschoben werden.

Da in diesem Falle ΔD um so größer wird, je größer β ist, so müssen wir den Zug so weit vorschieben, bis die zweite Achse über der Ordinate η_1 steht. Wir haben also folgende Regel:

Um für einen Füllungsstab die größte positive (negative) Spannkraft zu finden, stellen wir die Lasten zunächst in positive (negative) **Grundstellung** und untersuchen, ob die Summe aller Lasten *kleiner* oder größer ist als die erste Last, multipliziert mit dem Faktor $n:n'$. Im ersteren Fall ist *Grundstellung maßgebend*, im zweiten Falle vorgezogene Stellung (zweite Last über η_1). Die Abstände n und n' werden aus der Einflußlinie entnommen.

Man kann leicht zeigen, daß man den Zug noch weiter vorschieben muß, so daß die dritte Last über η_1 zu stehen kommt, sobald die Bedingung erfüllt ist, daß die Summe sämtlicher Lasten größer als die ersten beiden Lasten zusammen, multipliziert mit $n:n'$, ist. Dieser Fall kann übrigens nur bei sehr großen Feldweiten vorkommen.

[Der obigen Untersuchung haftet eine, für die Praxis unwesentliche, Ungenauigkeit an, da nicht berücksichtigt wurde, daß durch das Vorschieben auch neue Lasten auf den Träger gelangen können.]

8. Die Lastscheide.

Den Punkt N', in dem in Fig. 102b der positive Teil der Einflußfläche in den negativen übergeht, hatten wir *Lastscheide* oder *Nullpunkt* genannt. Eine Last, die gerade über N' steht, bringt in der Diagonalen D die Spannkraft Null hervor. Es gibt nun eine Methode, um den Nullpunkt direkt aus der Systemfigur zu bestimmen, ohne die Einflußlinie zu Hilfe nehmen zu müssen. Sie rührt von dem Begründer der graphischen Statik, *Culmann*, her. Obgleich sie nicht viel Verwendung findet, kann sie doch wohl nicht recht übergangen werden. Sie lautet (Fig. 103a):

„Um für die Diagonale D den Nullpunkt zu finden, lege man einen Schnitt α—α durch D und verlängere den Gurtstab, an dem die Lasten nicht angreifen, bis zum Schnitt mit den durch die Auflagerpunkte A und B gezogenen Vertikalen. Diese Schnittpunkte, L und M, verbinde man mit den Endpunkten $m-1$ und m des anderen, vom Schnitte α—α getroffenen Gurtstabes. Der Schnittpunkt N dieser Verbindungslinien ergibt dann die Lastscheide."

Um nun zu beweisen, daß eine senkrecht unter N stehende Last tatsächlich in der Diagonalen D die Spannkraft Null hervorbringt, bestimme ich zunächst die beiden Kräfte P' und P'', die infolge der indirekt wirkenden Last P in den beiden Belastungs-

punkten $m-1$ und m angreifen. Mit anderen Worten: Wir ermitteln zunächst die Auflagerdrücke des Längsträgers L. Früher haben wir diese Werte stets analytisch bestimmt; jetzt wollen wir sie graphisch ermitteln. Wir tragen also nach Band I, § 16 (Fig. 41 von Band I) $P = \overline{ab}$ auf und ziehen die Polstrahlen I und II. Diese nehmen wir aber nicht, wie gewöhnlich, beliebig, sondern parallel den Linien LN und MN. Dann sind die den Polstrahlen parallelen Seilstrahlen I und II in Fig. 103a bereits vorhanden. Auch die Schlußlinie braucht nicht besonders gezeichnet zu werden, da sie mit U zusammenfällt. Wir haben nur durch O in Fig. 103b die Parallele Oc zu U zu ziehen und finden die beiden, in $m-1$ und m angreifenden, Auflagerdrücke P' und P''.

In derselben Weise bestimmen wir die durch die Last P hervorgerufenen Auflagerdrücke A und B. Den Pol und die Polstrahlen I und II in Fig. 103b behalten wir bei. Die Seilstrahlen sind jetzt LN und NM, die Schlußlinie ist LM, und wir finden die Auflagerdrücke A und B, indem wir in Fig. 103b die Parallele zu LM, das ist die Parallele zu O, ziehen.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Ermittlung der Diagonalkraft D bei der angenommenen Laststellung P. Betrachten wir den Teil links vom Schnitt, so haben wir hier die beiden äußeren Kräfte A und P'. Wir finden also die Spannkraft in der Diagonalen D, indem wir von A und P' das statische Moment in bezug auf Punkt d bilden und die Summe der beiden statischen Momente durch das von d auf die Diagonale gefällte Lot r_d dividieren. In Formeln

$$\text{(I)} \qquad D = \frac{-A\,x_d + P' \cdot p'}{r_d} .$$

Um die in der Formel vorkommenden Produkte $A \cdot x_d$ und $P' \cdot p'$ graphisch zu finden, verlängern wir in Fig. 103a die Linie NL über L hinaus bis Punkt d' (senkrecht über d). Dann ist das Dreieck $dd'L$ ähnlich dem Dreiecke daO. Es verhält sich also

$$y : x_d = A : H ,$$

und daraus folgt

$$\text{(II)} \qquad A \cdot x_d = H \cdot y ,$$

wie man nach Band I, § 21, I auch direkt hätte angeben können.

Ferner ist Dreieck $dd'm-1$ ähnlich Dreieck caO. Also ist

$$y : p' = P' : H ,$$

woraus folgt, daß

$$\text{(III)} \qquad P' \cdot p' = H \cdot y .$$

Wir sehen also, daß, wenn die Last P direkt unter N steht, das Produkt $A \cdot x_d$ gleich dem Produkt $P' \cdot p'$ ist. Es ist demnach bei dieser Laststellung $A \cdot x_d - P' \cdot p' = 0$, und daraus folgt $D = 0$. Der Punkt N bezeichnet also tatsächlich die Stelle, an die die Last P gestellt werden muß, damit in der Diagonalen die Spannkraft Null entsteht.

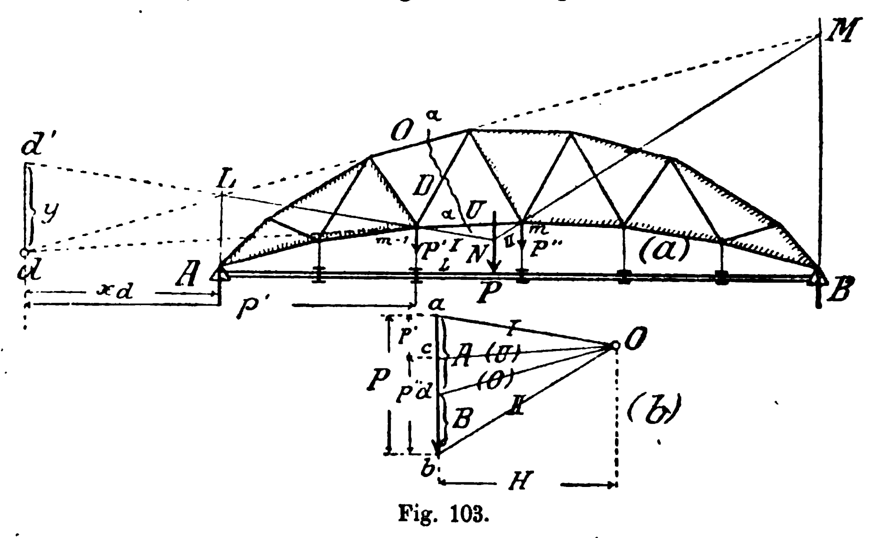


Fig. 103.

Mit Hilfe der Lastscheide N kann man die Abstände n und n' (Fig. 102 b) direkt aus der Zeichnung abgreifen und die Einflußlinie kontrollieren.

III. Zusammenfassung.

I. Gurtstäbe.

1. *Form der Einflußlinie:* Auf der ganzen Länge *ein* Vorzeichen.

2. *Laststellung:* **Vollbelastung.** (Hierbei bei Einzellasten die genauere Aufstellung durch Probieren finden oder durch mathematisches Kennzeichen § 28_I.)

II. Füllungsstäbe.

1. *Form der Einflußlinie:* Die Einflußlinie hat

a) zwei Vorzeichen, wenn der Bezugspunkt des Stabes außerhalb der Spannweite,

b) ein Vorzeichen, wenn der Bezugspunkt des Stabes innerhalb der Spannweite.

2. *Laststellung:* Im Falle a) **Teilbelastung;** d. h. die positive und negative Beitragsstrecke jede für sich belasten. (Hierbei bei Einzellasten von Grundstellung ausgehen und dann durch Probieren untersuchen, ob vorgezogene Stellung ev. größere Spannkraft ergibt. Statt Probieren auch mathematisches Kennzeichen: Wenn $(P_1 + P_2 + \dots) < P_1 \frac{n}{n'}$, dann Grundstellung; andernfalls vorgezogene Stellung.

Im Falle b) natürlich **Vollbelastung.** (Hierbei bei Einzellasten die genauere Stellung ausprobieren.)

§ 28a.

Vereinfachungen beim Aufzeichnen der Einflußlinien.[1])

I. Vereinfachung bei den Gurtstäben.

In Fig. 84′b ist in normaler Weise die Einflußlinie für den Stab O_m gezeichnet (vgl. Fig. 84 in § 23). Bekanntlich müssen

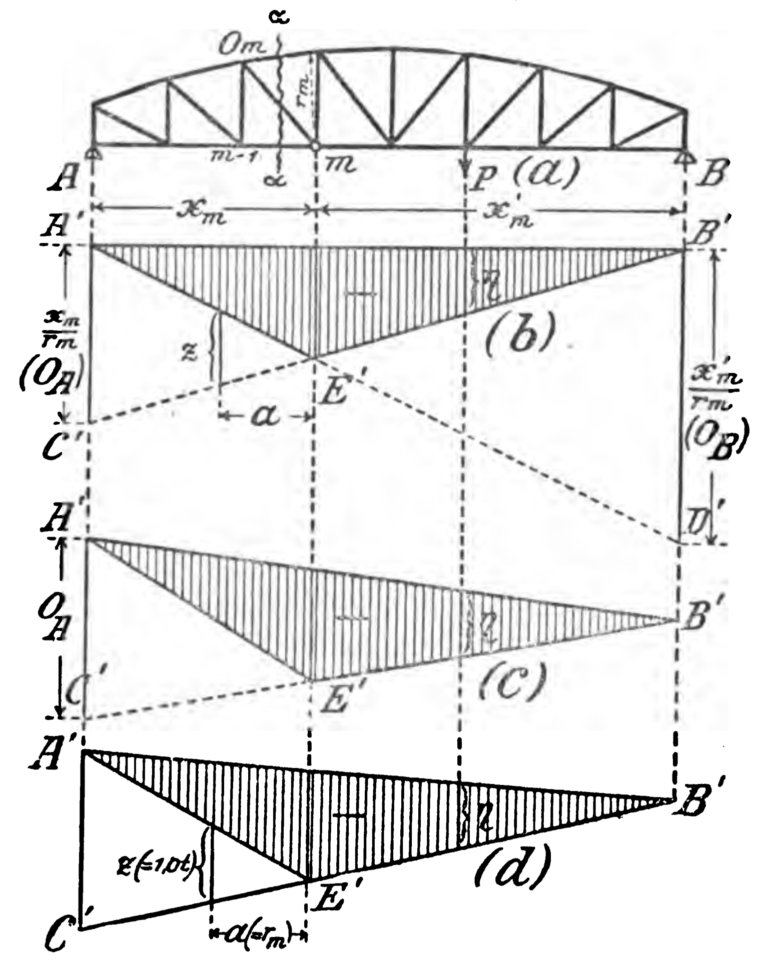


Fig. 84′.

wir hierbei zunächst die Strecke $A'C'$ (oder $B'D'$) auftragen, um zu der eigentlichen Einflußfigur $A'E'B'$ zu gelangen. Wir wollen nun eine Vereinfachung der Zeichnung entwickeln, bei der man das Auftragen der Strecke $A'C'$ spart.

[1]) Die §§ 28a und 28b können beim ersten Studium der Einflußlinien übergangen werden.

1. Der Abstand z zwischen den Linien $A'D'$ und $B'C'$.

Zieht man in Fig. 84'b in einem beliebigen Abstande a vom Punkte E' die vertikale Linie z, so ist

$$z : \frac{x_m}{r_m} = a : x_m .$$

Hieraus folgt für z der Wert:

$$\text{(I)} \qquad z \cdot x_m = a \frac{x_m}{r_m}; \quad \text{also} \quad z = \frac{a}{r_m} .$$

Wählen wir nun den Abstand a gerade gleich der Länge r_m, so wird

$$\text{(II)} \qquad z = \frac{r_m}{r_m} = 1 .$$

Das heißt: Der Abstand z der beiden Linien $C'B'$ und $D'A'$, in der Entfernung $a = r_m$ vom Schnittpunkte E' gemessen, beträgt gerade 1,0; und zwar 1,0 t, da die Ordinaten Spannkräfte in t darstellen.

Hierdurch haben wir ein sehr bequemes Mittel, um eine bereits gezeichnete Einflußlinie eines Gurtstabes auf ihre Richtigkeit hin zu kontrollieren. Ob man z links oder rechts von E' mißt, ist natürlich gleichgültig.

2. Benutzung von z zur Vereinfachuug der Einflußlinie.

Die Nullachse $A'B'$ der Einflußlinie braucht nicht unbedingt wagerecht eingezeichnet zu werden. Nehmen wir z. B. die schräg liegende Linie $A'B'$ in Fig. 84'c als Nullachse und zeichnen hierzu die Einflußlinie, so ist die Ordinate η in Fig. 84'c gleich der Ordinate η in Fig. 84'b. Denn in jedem Dreieck verhält sich die Parallele zu der Grundlinie wie der obere Höhenabschnitt zu der ganzen Höhe. Ob das Dreieck rechtwinklig oder schiefwinklig ist, ist hierbei gleichgültig. Die Ordinaten in Fig. 84'c sind also sämtlich gleich den entsprechenden Ordinaten in Fig. 84'b.

Auf Grund dieser Betrachtung und der vorhin unter 1) aufgestellten Beziehung können wir nun das Aufzeichnen der Einflußlinie noch vereinfachen (Fig. 84'd): Wir ziehen die Linie $C'B'$ beliebig, bestimmen E' unter m und tragen in der Entfernung $a = r_m$ seitlich von E' die Strecke $z = 1{,}0$ t auf. Nun verbinden wir E' mit dem oberen Endpunkte von z, bestimmen den Schnittpunkt A' dieser Verbindungslinie mit der Vertikalen durch A und ziehen die Linie $A'B'$. Dann ist die Fläche $A'E'B'$ die Einflußfläche für die Spannkraft des Stabes O_m.

Diese Darstellungsart erfordert als einzige Nebenarbeit das Abgreifen des Lotes r_m von m auf O_m. Allerdings erhält man im allgemeinen eine schräge Nullachse.

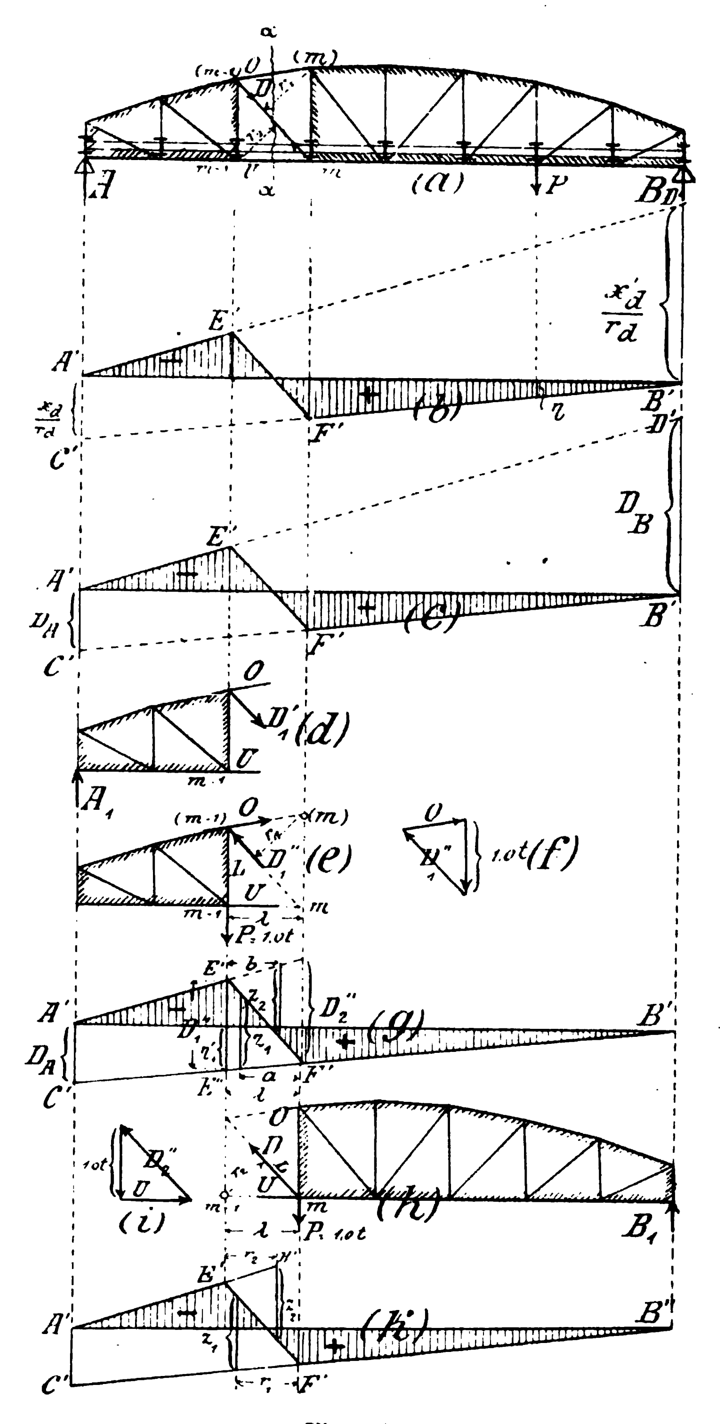


Fig. 92′.

II. Vereinfachungen bei den Füllungsstäben.

Bei den Füllungsstäben müssen wir bekanntlich zunächst zwei Hilfsstrecken $A'C'$ und $B'D'$ auftragen, um zur eigentlichen Einflußfläche $A'E'F'B'$ zu gelangen (Fig. 92'b und c). Wir wollen nun eine Vereinfachung der Zeichnung entwickeln, so daß man mit einer Hilfsstrecke, z. B. D_A, auskommt.

Für alle Laststellungen *rechts* von *m* reichen wir sowieso mit D_A aus: wir machen $A'C' = D_A$, ziehen $C'B'$ und benutzen das Stück $F'B'$. Nun möge die Last $P = 1{,}0$ t zum Knotenpunkt m—1 gelangt sein. Früher sind wir in diesem Falle zur Betrachtung des rechten Teiles übergegangen. Jetzt soll aber der Hilfswert D_B nicht gebraucht, sondern die Spannkraft D nur aus dem linken Trägerteile bestimmt werden.

Der Auflagerdruck, der infolge der im Punkte m—1 befindlichen Last P am linken Auflager entsteht, heiße A_1. Insgesamt haben wir jetzt am linken Trägerteile zwei äußere Kräfte, nämlich A_1 und P. Die Spannkraft D können wir also bestimmen, indem wir zunächst die Wirkung von A_1 betrachten, dann die Wirkung von P, und schließlich beide Wirkungen zusammenzählen. Diese getrennte Betrachtung der Wirkungen der Auflagerkraft A und der Last P ist der Kernpunkt der folgenden Untersuchungen.

Der Anteil von A_1 an der Gesamtspannkraft D heiße D_1'; der Anteil von P an D heiße D_1''. Diese beiden Teilwerte müssen also berechnet werden, um die Spannkraft D zu erhalten:

$$\text{(III)} \qquad D = D_1' + D_1''.$$

a) Darstellung von D_1'.

D_1' ist also die Spannkraft, die bei dem in Fig. 92'd dargestellten, gedachten Belastungszustande im Stabe D entsteht. Wir finden D_1' am bequemsten mit Hilfe des Faktors D_A: Bei dem Belastungszustande Fig. 92'd ist A_1 die einzige äußere Kraft. Die Spannkraft in D ist also direkt proportional der Kraft A_1, so daß wir erhalten

$$\text{(IV)} \qquad D_1' = A_1 \cdot D_A.$$

[D_A ist die Spannkraft von D infolge A gleich *einer* t.] Um diesen Wert graphisch darzustellen, tragen wir, wie gewöhnlich, $A'C' = D_A$ auf und verbinden C' mit B' (Fig. 92'g). Dann ist die unter der Last P gemessene Ordinate η_1' gleich dem bei dieser Laststellung entstehenden Auflagerdruck A_1, multipliziert mit dem Faktor D_A;

d. h. η_1' *stellt den obigen Ausdruck* D_1' *dar.* Hiermit ist der Teilbetrag, den der Auflagerdruck A_1 zur Spannkraft D liefert, erledigt.

b) *Darstellung von* D_1''.

Dieses ist also der Teilbetrag, den die Last P zur Stabkraft D liefert. Der hierzu gehörige, gedachte Belastungszustand ist in Fig. 92′e dargestellt: Im Punkte $m-1$ die Last P, weiter keine äußeren Kräfte.

Die Bestimmung dieses Wertes D_1'' wollen wir graphisch und analytisch durchführen.

α) *Graphisch.* Wir ermitteln D_1'' in Fig. 92′e nach dem *Culmann*schen Verfahren (§ 9; § 22, 20. Aufgabe). Wir bringen also U mit P zum Schnitt, Punkt $m-1$; ferner O und D zum Schnitt, Punkt $(m-1)$. Dann verbinden wir $m-1$ mit $(m-1)$ durch L und zerlegen zunächst P nach U und L, und dann L nach D und O (Fig. 92′f). Da L vertikal ist *(aber auch nur in diesem Falle!)*, wird U gleich Null, so daß das *Culmann*sche Viereck in ein einfaches Dreieck übergeht. Hiermit ist dann D_1'' bestimmt.

β) *Analytisch.* D_1'' läßt sich in Fig. 92′e noch auf eine einfache analytische Weise bestimmen. Wenn der Schnittpunkt von P und U senkrecht unter dem Schnittpunkt von O und D liegt (d. h. wenn wir es mit einem Fachwerk mit Vertikalen zu tun haben), ist die Spannkraft in U gleich Null. Dieses wurde soeben nach *Culmann* bewiesen; man sieht es auch direkt, wenn man für Punkt $(m-1)$ die Momente aufstellt. Nachdem U somit ermittelt ist, stellen wir die Momente in bezug auf Punkt (m) (senkrecht über m) auf (D zunächst als Zug eingeführt):

$$-1{,}0 \cdot \lambda + O \cdot 0 - D_1'' \cdot r_1 = 0\,,$$

$$D_1'' = -1{,}0 \cdot \frac{\lambda}{r_1}\,. \qquad \text{(V)}$$

Hiermit ist D_1'' durch die Feldweite λ und das Lot r_1 von (m) auf D ausgedrückt.

c) *Zusammenstellung der Werte* D_1' und D_1''.

Nun stellen wir die beiden Werte D_1' und D_1'' zusammen. Das heißt, wir addieren die Wirkungen der Kraft A_1 und der Last P. Hierdurch kommen wir also aus den beiden, nur gedanklich möglichen Zuständen Fig. 92′d und 92′e zu dem wirklich vorhandenen Zustande: am linken Trägerteile Last im Punkt $m-1$ und außerdem Auflagerdruck in A.

Der Betrag D_1' ist, wie wir bereits gesehen haben, in Fig. 92'g durch die Ordinate η_1' dargestellt. Den Wert D_1'' entnehmen wir entweder Fig. 92'f oder Formel V. Da er in unserem Falle negativ ist (Formel V), müssen wir ihn von D_1' abziehen; d. h. wir tragen ihn in Fig. 92'g von E'' aus nach oben ab, gleich $E''E'$. (Die Summe $D_1' + D_1''$ ist in diesem Falle negativ, da der zweite, negative, Summand größer ist als der erste.) Hierdurch erhalten wir einen Punkt E', dessen Ordinate den Wert $D_1' + D_1''$ darstellt; d. h. die Spannkraft des Stabes D bei Laststellung im Punkte $m-1$. Somit haben wir einen Punkt der Einflußlinie links vom Schnitte bestimmt, und zwar nur unter Benutzung des Hilfswertes D_A und eines weiteren Hilfswertes D_1'' (aber ohne D_B). Jetzt verbinden wir E' mit A' und haben die vollständige Einflußlinie.

Wiederholung: Die Aufgabe lautete: Die Einflußlinie $A'E'F'B'$ für die Spannkraft D soll ohne Zuhilfenahme des Wertes D_B gezeichnet werden. Es ergab sich folgende Lösung: Wir bestimmen den Hilfswert D_A, tragen von einer Nullachse $A'B'$ die Strecke $A'C' = D_A$ auf und verbinden C' mit B' (Fig. 92'g). Diese Linie gilt dann ohne weiteres für alle Laststellungen rechts vom Schnitte, da hierfür die Spannkraft D in der Form

$$D = D_A \cdot A$$

auftritt. Bei Laststellungen links vom Schnitte muß, da wir die Betrachtung des linken Teiles beibehalten wollen, die Spannkraft D in zwei Gliedern dargestellt werden:

$$\text{(III)} \qquad D = D_1' + D_1''.$$

Das erste Glied bezeichnet den Anteil, den die Auflagerkraft zu dem Werte D liefert; das zweite Glied bezeichnet den Anteil, der von der Last P herrührt. Der wirklich vorhandene Belastungszustand des betrachteten, linken Fachwerkteiles ist also für die Berechnung in zwei gedachte Teilzustände aufgelöst (Fig. 92'd und e), von denen jeder für sich untersucht wird.

Diese Hilfswerte D_1' und D_1'' lassen sich leicht angeben: D_1' ist direkt durch die Ordinate η_1' der Linie $C'B'$ dargestellt (Fig. 92'g). D_1'' muß allerdings besonders ermittelt werden, zweckmäßig entweder nach *Culmann* (Fig. 92'f) oder nach Formel

$$\text{(V)} \qquad D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1}.$$

(Nach *Ritter* ist umständlich.) Nun wird D_1'' mit Berücksichtigung des Vorzeichens an den Endpunkt E'' von D_1' angesetzt, hierdurch Punkt E' erhalten und schließlich die letzte Strecke $E'A'$ gezogen.

Zusatz 1: Entsprechende Untersuchung am Punkte m.

Es ist klar, daß, ebenso wie wir soeben den Abstand D_1'' der Linien $C'B'$ und $A'D'$ unter dem Punkte $m-1$ bestimmt haben, wir auch den Abstand dieser beiden Linien unter dem Punkte m ermitteln können. In Fig. 92'g ist dieser Abstand D_2'' genannt. Die Untersuchung entspricht genau der vorigen: Wir nehmen jetzt in m eine Last $P = 1{,}0$ t und betrachten den rechten Trägerteil (Fig. 92'h). Dann ergibt sich der Abstand D_2'' entweder

α) nach *Culman* (Fig. 92'i), oder

β) aus der Formel (Va): $D_2'' = +\frac{\lambda}{r_2}$.

[Jetzt +, da eine in m befindliche Last $P = 1{,}0$ t, für sich allein betrachtet, im Stabe D Zugspannung erzeugt; Fig. 92'h].

Den Abstand D_2'' kann man nun zur Kontrolle oder — entsprechend dem Abstande D_1'' — zur Vereinfachung der Zeichnung verwenden.

Zusatz 2: Weitere Vereinfachung durch Einführung der z-Abstände.

Aus den Ausdrücken für D_1'' und D_2'' läßt sich noch eine weitere Vereinfachung herleiten.

Ziehen wir in Fig. 92'g in einer zunächst noch beliebigen Entfernung a vom Punkte F' die vertikale Linie z_1, so ergibt sich deren Länge:

$$z_1 : D_1'' = a : \lambda;$$

also

$$z_1 = \frac{a}{\lambda} D_1'' = \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{-\lambda}{r_1}$$

$$= -\frac{a}{r_1}.$$

Wählen wir nun den Abstand a gerade gleich der Länge r_1, so wird

$$\text{(VI)} \qquad z_1 = -\frac{r_1}{r_1} = -1{,}0 \text{ t}.$$

In Worten: *Der Abstand der beiden Linien $C'B'$ und $F'E'$, gemessen in einer Entfernung $a = r_1$ vom Punkte F', ist gleich $-1{,}0$ t.*

Entsprechend ergibt sich für die Linie z_2, die in einer Entfernung b seitlich vom Punkte E' gezogen ist:

$$z_2 : D_2'' = b : \lambda,$$

also

$$z_2 = \frac{b}{\lambda} D_2'' = \frac{b}{\lambda} \cdot \frac{+\lambda}{r_2}$$

$$= +\frac{b}{r_2}.$$

Wählen wir nun $b = r_2$, so wird

$$z_2 = +\frac{r_2}{r_2} = 1{,}0 \text{ t}.$$

In Worten: *Der Abstand der beiden Linien $A'D'$ und $E'F'$, gemessen in einer Entfernung $b = r_2$ vom Punkte E', ist gleich $+\,1{,}0$ t.*

Nun hatten wir vorhin den in einem Abstande $a = r_1$ vom Punkte F' gemessenen Vertikalabstand z_1 gleich $-1{,}0$ t ermittelt. Jetzt haben wir z_2 gleich $+1{,}0$ t gefunden. Fassen wir beide Angaben zusammen, so bekommen wir eine Konstruktion der Einflußlinie, bei der wir weder den Wert D_A noch den Wert D_B brauchen, sondern bei der wir nur die beiden Lote r_1 und r_2 aus der Systemfigur (Fig. 92′a) abzugreifen brauchen:

Wir ziehen (Fig. 92′k) Linie $C'B'$ beliebig, bestimmen Punkt F' senkrecht unter m und tragen im Abstande r_1 seitlich von F' den Abstand $z_1 = -1{,}0$ t auf. Dann verbinden wir F' mit dem Endpunkte von z_1 und bestimmen den Schnittpunkt E' dieser Verbindungslinie mit der durch Knoten m—1 gezogenen Vertikalen. Nun tragen wir in der Entfernung r_2 seitlich von E' den Vertikalabstand $z_2 = +1{,}0$ t auf, bestimmen hierdurch Punkt H', ziehen $H'E'$ und erhalten hierdurch den Punkt A'. Dieser wird nun mit B' verbunden und die Einflußlinie ist fertig (allerdings mit im allgemeinen schräger Nullachse $A'B'$).

§ 28b.

Ergänzungen und Beispiele zu § 28a.

I. Ergänzungen zu § 28a, Absatz II.

1. Die Abstände D_1'', D_2'', bzw. z_1, z_2 beim Strebenfachwerk.

Zur Einübung wollen wir die Abstände D_1'' usw. auch bei einem Fachwerk mit ausschließlich geneigten Füllungsstäben (Strebenfachwerk) aufstellen.

1) D_2''. Wir wollen in Fig. 92″ mit D_2'' anfangen. Wir nehmen also in m eine Last $P = 1{,}0$ t an, so daß auf den rechten Teil die beiden äußeren Kräfte B und P wirken, lassen B zunächst unberücksichtigt und bestimmen die Spannkraft, die die Last P für sich allein genommen in der Diagonalen hervorbringt. (Fig. 92″b.)

α) Nach *Culmann*. Um D_2'' nach *Culmann* zu ermitteln, bringen wir U mit P, und O mit D zum Schnitt, verbinden die beiden Schnittpunkte durch eine Gerade L (die in diesem Falle mit D zusammenfällt) und zerlegen P nach U und L, und L

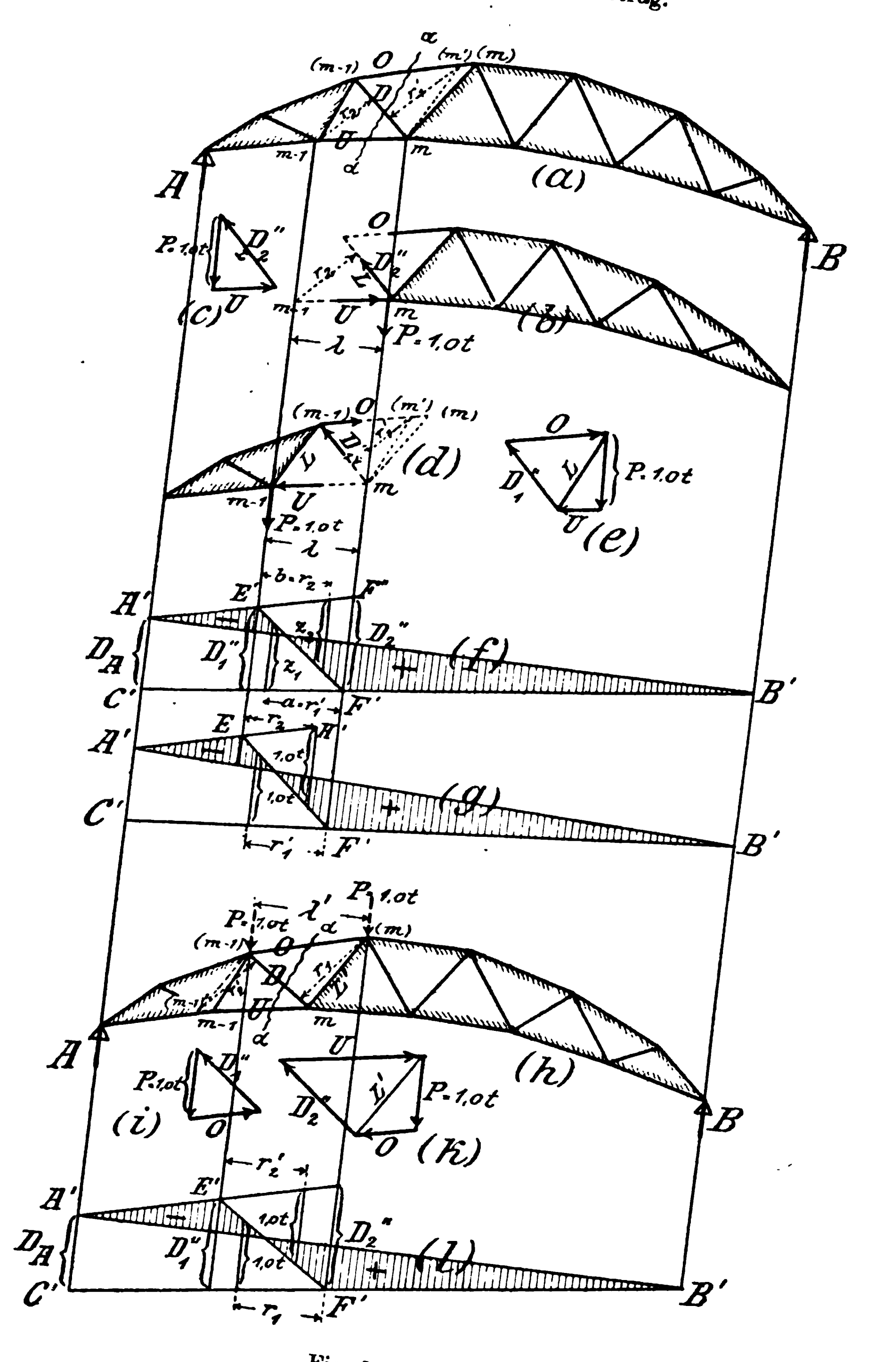


Fig. 92″.

nach D und O. Es zeigt sich, Fig. 92″c, daß das Viereck in ein Dreieck übergeht, daß also O gleich Null wird. Wir finden somit D_2'', indem wir die Last 1,0 t nach U und nach D zerlegen, ebenso, wie es beim Ständerfachwerk geschah. Bei der Ermittelung von D_2'' ist also kein Unterschied zwischen den beiden Fachwerksystemen.

β) *Analytisch.* Auch wenn wir D_2'' auf analytischem Wege bestimmen, verfahren wir wie vorhin: Wir stellen zunächst die Momente in bezug auf m auf und beweisen damit, daß O gleich Null ist. Dann stellen wir eine neue Momentengleichung in bezug auf Punkt $m-1$ auf, und erhalten:

$$+1{,}0 \cdot \lambda - D_2'' \cdot r_2 = 0,$$

$$D_2'' = +1{,}0 \cdot \frac{\lambda}{r_2},$$

d. i. derselbe Wert wie beim Ständerfachwerk.

2) D_1''. Bei D_2'' zeigt sich ein Unterschied zwischen dem Fachwerke Fig. 92″a und der vorhin betrachteten Fig. 92′a.

α) Nach *Culmann.* Zeichnen wir für den Belastungszustand (Fig. 92″d) ein *Culmann*sches Viereck, so geht dieses nicht, wie in Fig. 92′e, in ein Dreieck über. Wir müssen vielmehr erst P in L und U zerlegen und finden dann, indem wir L nach D und O zerlegen, den Wert D_1''. Hierdurch ist dessen Bestimmung etwas umständlich geworden (Fig. 92″e).

β) *Analytisch.* Ebenso muß bei der analytischen Ermittelung von D_1'' etwas anders verfahren werden. Wir müssen jetzt eine kleine Hilfskonstruktion ausführen, indem wir (Fig. 92″a und d) zunächst durch m die Parallele zu L ziehen, hierdurch Punkt (m') bestimmen und von (m') auf D das Lot r'_1 fällen. Dann ist

$$D_1'' = -1{,}0 \cdot \frac{\lambda}{r_1'}.$$

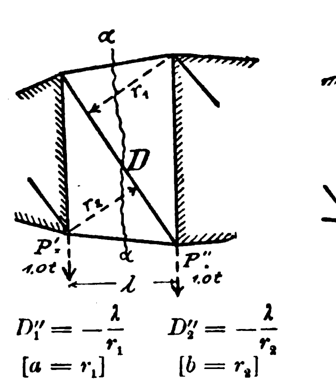
[Den Beweis führe man selber; z. B. in der Weise, daß man die Momentengleichung in bezug auf Punkt $(m-1)$ aufstellt, hieraus U bestimmt und dann aus der in bezug auf Punkt (m') aufgestellten Momentengleichung den obigen Wert für D_1'' ermittelt.] Hiermit ist auch für das Strebenfachwerk Fig. 92″a der Abstand D_1'' der beiden Linien $C'B'$ und $D'A'$ bestimmt.

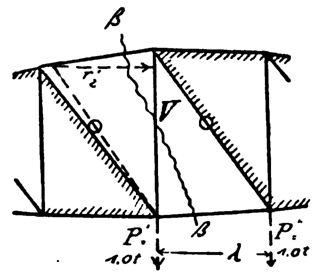
3) z_1 und z_2. Nachdem jetzt die Werte D_2'' und D_1'' bekannt sind, können wir auch bestimmen, in welchem Abstande a bzw. b man die Werte $z_1 = 1{,}0$ t bzw. $z_2 = 1{,}0$ t aufzutragen hätte, um aus der einen Linie $C'B'$ die andere Linie $D'A'$ zu erhalten. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich sofort (Fig. 92″f und g): z_1 hat den Abstand $a = r_1'$ von F', z_2 den Abstand $b = r_2$ von E'.

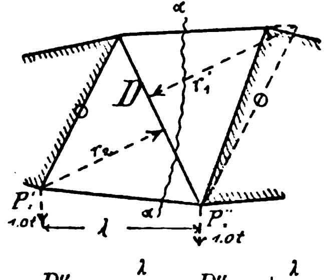
2. Zusammenstellung der Werte D_1'', D_2'', bzw. z_1, z_2.

In der folgenden Fig. 92‴ sind die Werte D'' (für die Diagonalen) und die entsprechenden Werte V'' (für die Vertikalen) zusammengestellt. Hilfslinien sind punktiert gezeichnet. Die kleinen Kreise bedeuten, daß die entsprechenden Linien parallel sind. Bei der Anwendung beachte man, daß $D_1''(V_1'')$ von der Kraft $P' = 1{,}0$ t, und $D_2''(V_2'')$ von der Kraft $P'' = 1{,}0$ t herrührt; demgemäß sind die Abstände in der Einflußlinie einzuzeichnen.

Belastung am Untergurt.

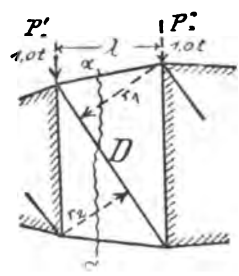


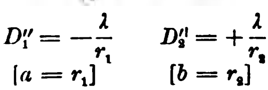


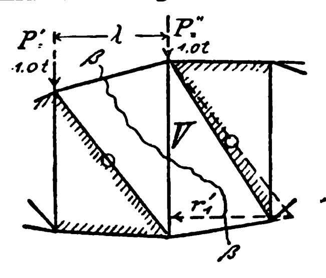


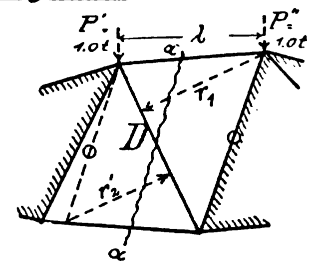
$D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1}$ $[a = r_1]$ $D_2'' = -\frac{\lambda}{r_2}$ $[b = r_2]$ $V_1'' = +1{,}0$ $[a = \lambda]$ $V_2'' = -\frac{\lambda}{r_2'}$ $[b = r_2']$ $D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1'}$ $[a = r_1']$ $D_2'' = +\frac{\lambda}{r_2}$ $[b = r_2]$

Belastung am Obergurt.









$D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1}$ $[a = r_1]$ $D_2'' = +\frac{\lambda}{r_2}$ $[b = r_2]$ $V_1'' = +\frac{\lambda}{r_1'}$ $[a = r_1']$ $V_2'' = -1{,}0$ $[b = \lambda]$ $D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1}$ $[a = r_1]$ $D_2'' = +\frac{\lambda}{r_2'}$ $[b = r_2']$

Fig. 92‴.

Soweit die Werte nicht aus dem bisherigen zu entnehmen sind, wird sie der Leser selber leicht aufstellen können. Je nachdem die Belastung am Untergurt oder am Obergurt angreift, müssen natürlich auch die Kräfte $P = 1{,}0$ t, mit deren Hilfe man die Abstände D_1'' und D_2'' bestimmt, am Untergurt oder am Obergurt angebracht werden. [S. die Lage der Abschrägung $E'F'$ der Einflußlinie je nach der Belastungsart, § 26 II; vgl. ferner Fig. 92″a—g (Belastung unten) mit Fig. 92″h—l (Belastung oben).]

In Fig. 92‴ sind auch die Entfernungen a und b angegeben, in denen man die Abstände z_1 und z_2 aufzutragen hat, wenn man die Einflußlinie mittels z_1, z_2 konstruieren will (Fig. 92′k, 92″g, l).

II. Beispiele.

Erste Aufgabe.

Für den in Fig. 100′ gezeichneten Halbparabelträger sind die Einflußlinien der Füllungsstäbe mittels der Werte D_A und D'' zu entwickeln!

(Vgl. die Berechnung desselben Trägers mittels der Werte D_A und D_B; § 27, zweite Aufgabe, Fig. 98, 99.)

Die Belastung bestehe aus einer gleichmäßig verteilten Last $p = 2{,}00$ t/m.

Der Kräfteplan für $A = 1{,}0$ t braucht jetzt nur für das halbe System gezeichnet zu werden. Die Abstände D'' sind für die links von den Schnitten liegenden Knotenpunkte ermittelt (D_1'' und V_1''), und zwar nach der *Culmann*schen Methode. Diese vereinfacht sich noch, indem bei den Diagonalen das *Culmann*sche Viereck in ein einfaches Dreieck übergeht (wie bei Fig. 92′e und f). [Die Spannkraft des vom Schnitte α—α getroffenen Untergurtstabes wird bei diesem Belastungsfalle gleich Null.] Bei den Vertikalen sind die betreffenden Werte V_1'' noch einfacher zu ermitteln. Sie ergeben sich nämlich direkt gleich $+1{,}0$ t; das Viereck geht in eine Gerade über. [Bei dem vorliegenden Belastungsfalle werden die anderen von dem Schnitte β—β getroffenen Stäbe, O und U, gleich Null, und V erhält die ganze Last von 1,0 t.]

Auf diese Weise ist das Aufzeichnen der Einflußlinien augenscheinlich viel einfacher als nach Fig. 98, 99. Die Hilfsvertikale V_4 wird wie bei Fig. 99 bestimmt.

Schließlich wurden dann die Belastungen in die maßgebenden Stellungen eingebracht und die Produkte „Belastung pro Längeneinheit $\times$ Inhalt der darunter liegenden Einflußflache" ausgerechnet.

Zweite Aufgabe.

Für das Fachwerk Fig. 100″ sind die Einflußlinien nur mit Hilfe der Werte „z" zu entwickeln!

Belastung am Untergurt.

Das Aufzeichnen der Einflußlinien soll jetzt also geschehen, ohne daß die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t usw. zur Hilfe genommen werden. Nur die Abstände $z = 1{,}0$ t zwischen den einzelnen Teilen der Einflußlinien sollen benutzt werden.

a) Gurtstäbe. Die Aufzeichnung geschieht nach Fig. 84′d: Zunächst wird eine der Linien $B'E'$ oder $A'E'$ beliebig gezogen,

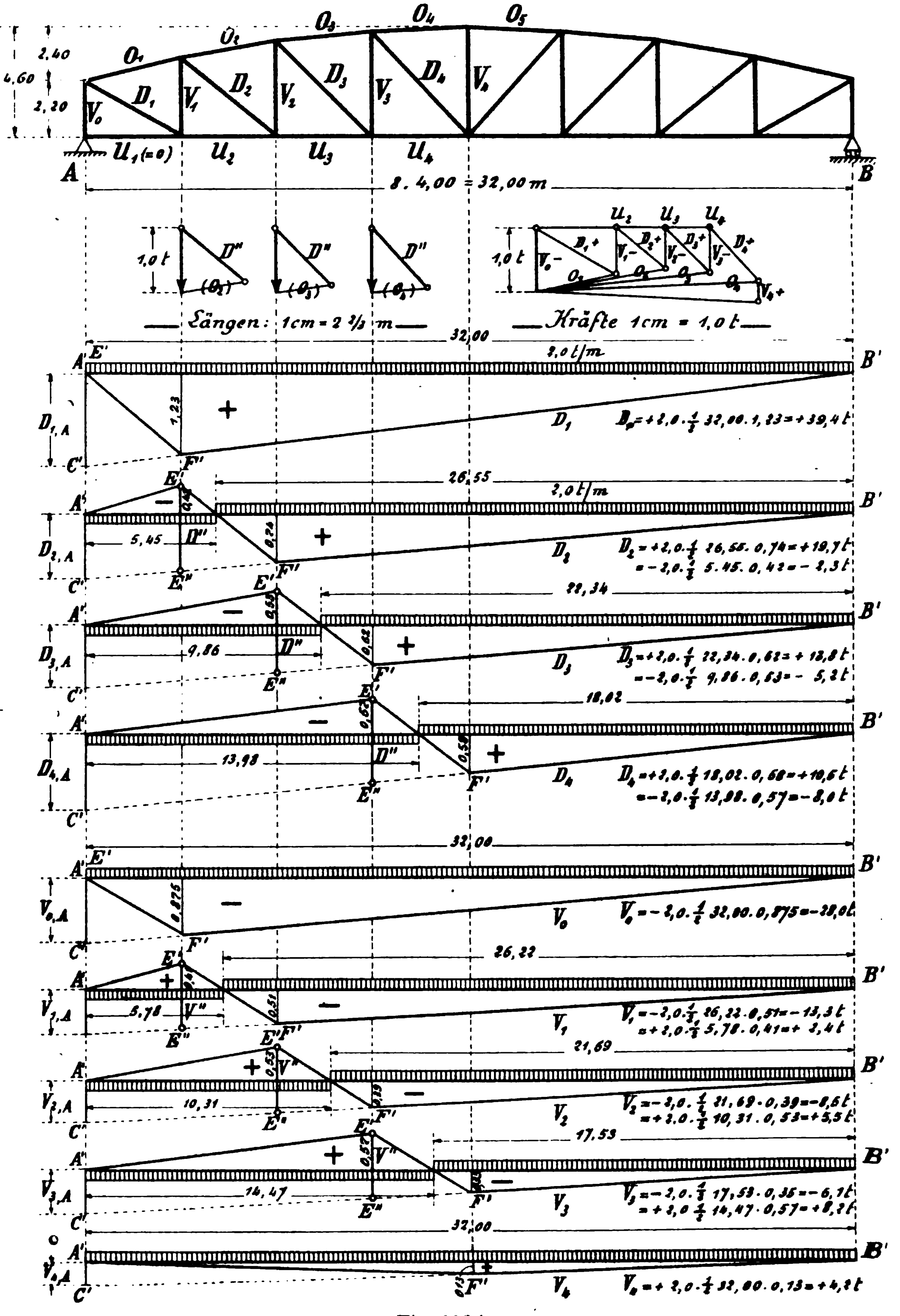


Fig. 100′.

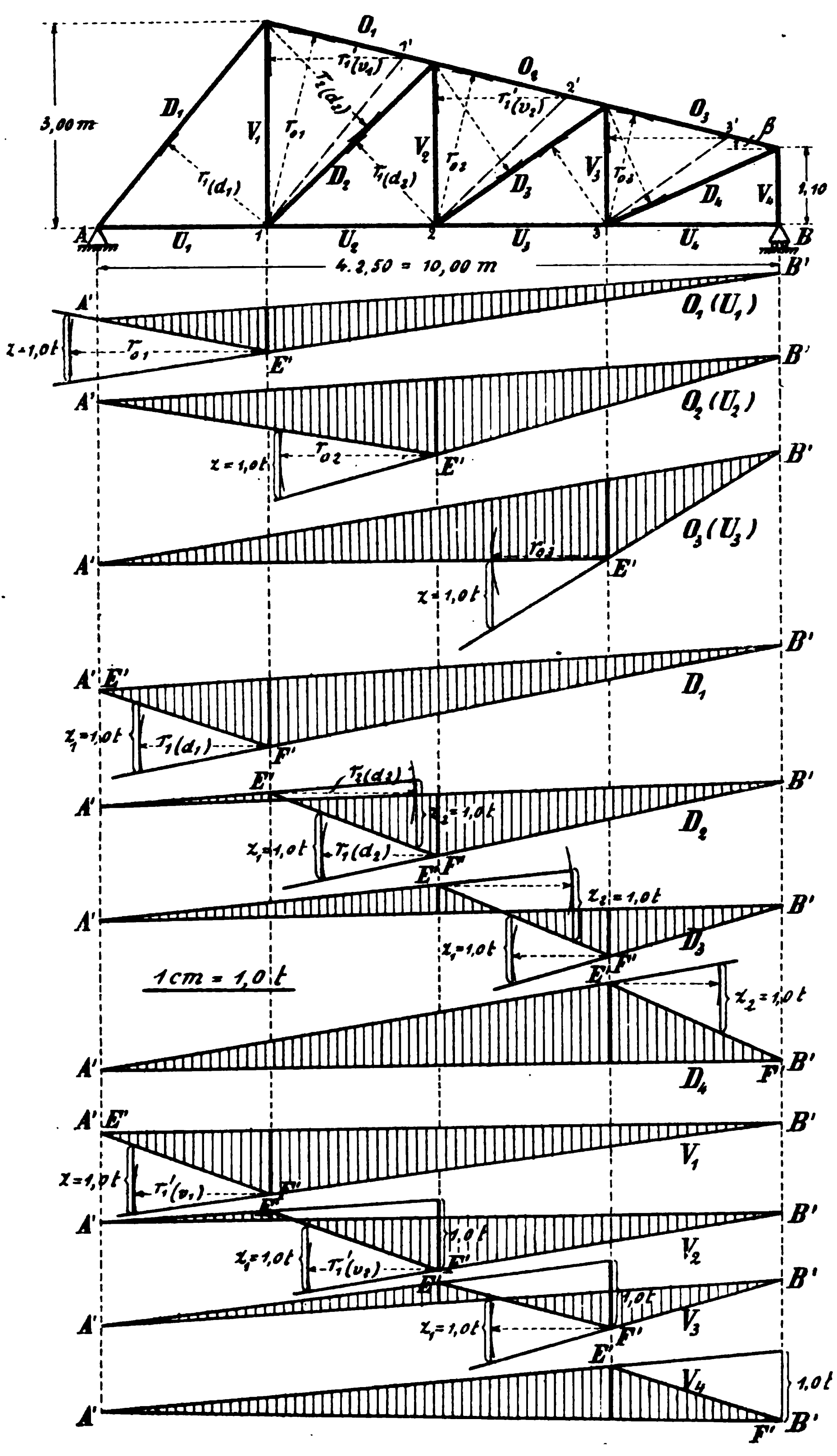


Fig. 100″.

dann in der Systemfigur das Lot r vom Bezugspunkte auf den betreffenden Stab gefällt und schließlich bei der Einflußlinie im Abstande r seitlich vom Punkte E' der Vertikalabstand $z = 1{,}0$ t angetragen. Hierdurch ist der andere Teil der Einflußlinie $A'E'$ bzw. $B'E'$ festgelegt, und nach Eintragung auch der Schlußlinie $A'B'$ ist die ganze Einflußlinie fertig.

In dieser Weise sind in Fig. 100″ die Einflußlinien für O_1—O_3 gezeichnet. Die Lote r werden aus der Systemfigur abgegriffen. Man erhält im allgemeinen schräge Schlußlinien. Die Ordinaten η sind aber stets absolut vertikal (parallel den äußeren Kräften) zu messen.

Für die Untergurtstäbe sind keine besonderen Einflußlinien gezeichnet. Wir rechnen vielmehr nur die Obergurtstäbe aus und benutzen dann für die Untergurtstäbe die Beziehungen:

$$U_1 = -O_1 \cdot \cos\beta\,; \quad U_2 = -O_2 \cdot \cos\beta\,; \quad U_3 = -O_3 \cdot \cos\beta\,; \quad [U_4 = 0].$$

b) Füllungsstäbe. Die Aufzeichnung geschieht nach Fig. 92′k: Zunächst wird eine der Linien $B'F'$ oder $A'E'$ beliebig gezogen. Beispielsweise $B'F'$. Dann wird das Lot r_1 aus der Systemfigur entnommen, in der Einflußlinie seitlich von F' in der Entfernung r_1 der Vertikalabstand $z_1 = 1{,}0$ t eingezeichnet und hierdurch der Teil $F'E'$ der Einflußlinie bestimmt. Dann wird das Lot r_2 aus der Systemfigur entnommen und im Abstande r_2 seitlich vom Punkte E' der Einflußlinie der Vertikalabstand $z_2 = 1{,}0$ t aufgetragen. Durch letzteren ist dann auch der Teil $E'A'$ und somit die ganze Einflußlinie bestimmt. (Wenn man die Abstände r aus Fig. 92‴ entnimmt, beachte man, daß wir jetzt rechtssteigende Diagonalen haben. Die Skizzen von Fig. 92‴ sind also umgeklappt zu denken.)

Für die Diagonale D_1 ist nur ein Abstand z erforderlich. Bei den Vertikalen muß man in der Systemfigur eine kleine Hilfszeichnung ausführen, um den Abstand r_1 zu erhalten. (Hilfslinie *1—1′* parallel zu D_1; *2—2′* parallel zu D_2; *3—3′* parallel zu D_3.) Der Abstand r_2 bei den Vertikalen ist gleich λ. Die Vertikale V_4 ist direkt aus dem Auflagerdruck B bestimmt.

Somit haben wir durch bloßes Abgreifen einiger Hilfslinien aus der Systemfigur sämtliche Einflußlinien konstruiert. Die Genauigkeit der Zeichnung ist übrigens vollständig ausreichend. Der Maßstab der Ordinaten ist durch den Maßstab bestimmt, in dem $z = 1{,}0$ t aufgetragen ist.

§ 28c.

Zusammenfassung zum 3. Vortrag.

In diesem Vortrage haben wir den Einfluß einer beweglichen Belastung, und zwar mittels Einflußlinien, untersucht. Hierbei ergab sich folgende Aufeinanderfolge der Arbeiten:

A. Allgemeine grundlegende Entwicklung der Einflußlinien (§ 23 bis § 27).

B. Genauere Betrachtung über das Auftreten der verschiedenen Formen der Einflußlinien und die ungünstigsten Laststellungen bei den einzelnen Formen (§ 28).

C. Mittel zur Kontrolle und Vereinfachung von Einflußlinien (§ 28a und b).

Der Teil A und als Ergänzung dazu der Teil B sind natürlich die wichtigsten. Aber auch die in § 28a, b enthaltenen Betrachtungen sind zu beachten, da sie gerade das praktische Arbeiten mit Einflußlinien erleichtern.

Zum Schlusse sei noch einmal an die Voraussetzungen erinnert, auf die sich die bisher abgeleiteten Einflußlinien beziehen: 1. Das betreffende Fachwerk erstreckt sich nur zwischen seine beiden Auflagerpunkte (ohne übertragende Enden); 2. das System ist ein einfaches Dreieckfachwerk; 3. die Belastung wirkt vertikal.

In den späteren Abschnitten dieses Bandes werden die Einflußlinien natürlich auch für sämtliche anderen statisch bestimmten Konstruktionen entwickelt; insbesondere im Abschnitt III für den Träger mit Auskragung, im Abschnit IV für den Dreigelenkbogen, im Abschnitt V für jedes beliebig gestaltete und belastete Tragwerk.

4. Vortrag:

Analytische Methoden.

Die rein rechnerischen Methoden führen im allgemeinen etwas schneller zum Ziele als die Einflußlinien. Doch fehlt ihnen die Übersichtlichkeit, die die letzteren auszeichnet.

Wir wollen getrennt die analytische Untersuchung der Parallelträger und der Fachwerke mit gekrümmter Gurtung vornehmen. Ferner werden zwei wichtige Spezialfälle behandelt werden: Träger mit nur zwei Lasten (Kranträger) und Träger mit Belastung durch stets wiederkehrende Lastenschemas (Eisenbahnbrücken). Namentlich in diesen beiden Fällen sind die analytischen Methoden sehr angebracht.

§ 29.

Der Parallelträger mit gleichmäßig verteilter Belastung.

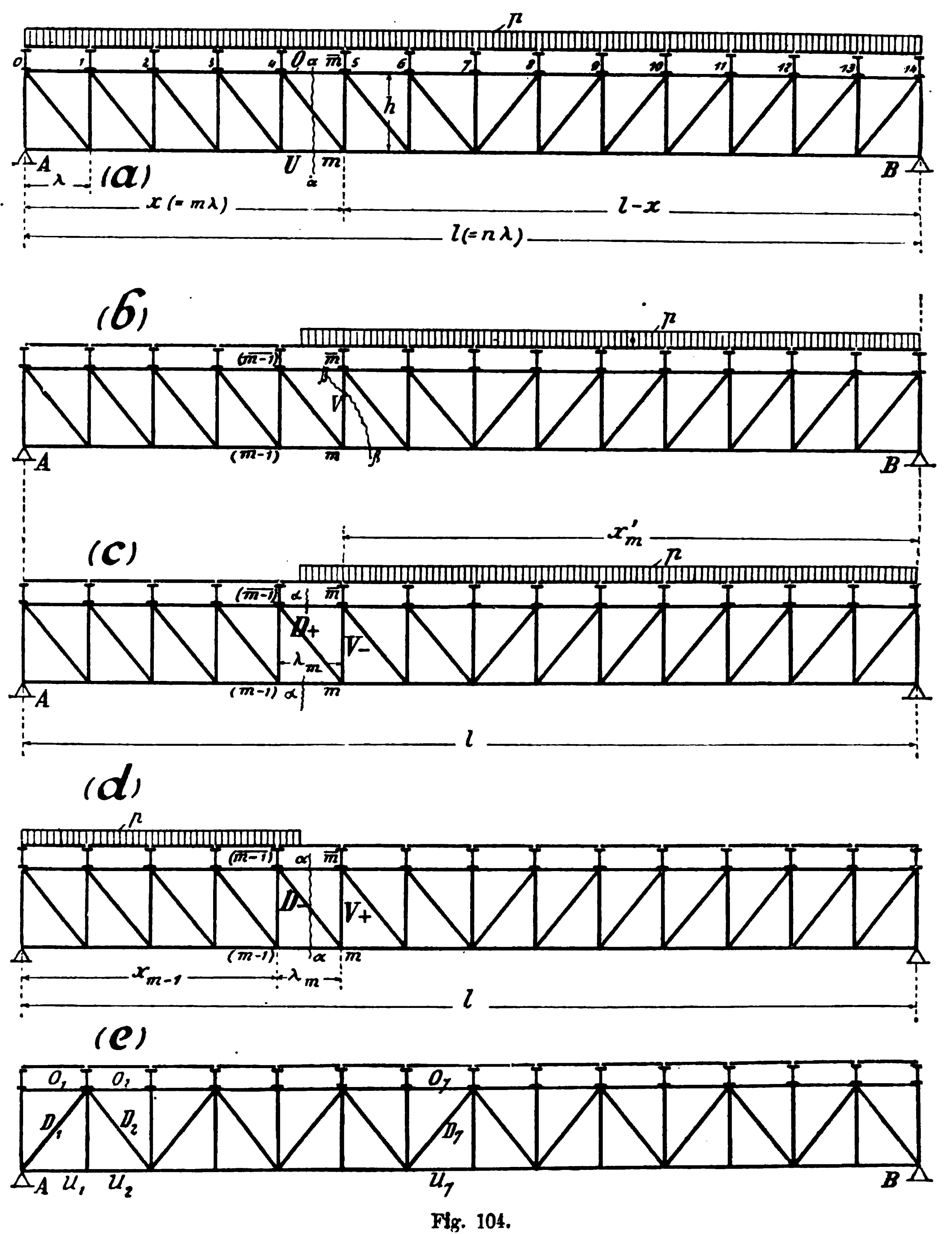


Fig. 104.

Grundprinzip der Berechnung. Zur analytischen Bestimmung eines Parallelträgers von der Höhe h haben wir die Formeln (§ 7, 7a, b)

1. Gurtstäbe.

$$(1) \qquad O = -\frac{M}{h}; \qquad U = +\frac{M}{h}.$$

2. Füllungsstäbe.

$$(2) \qquad D = \pm\frac{1}{\sin\varphi}Q; \qquad V = \mp Q.$$

Durch diese Formeln sind die Spannkräfte gegeben. Es kommt nur darauf an, die Belastung so zu stellen, daß für jeden Stab die größte Spannkraft auftritt.

I. Gurtstäbe.

Wie bereits mehrfach bewiesen, ist die maßgebende Laststellung: *Vollbelastung*. Hiernach ergibt sich folgender Rechnungsgang. Wir lassen die Belastung sich über den ganzen Träger erstrecken (Fig. 104a). Dann ist für einen Knotenpunkt m (oder $\overline{m}$) das Biegungsmoment bestimmt durch die Formel:

$$M = \frac{p}{2}x(l-x).$$

Zweckmäßig wird man aber sofort den Quotienten $\frac{M}{h}$ ausrechnen:

$$O(U) = \mp\frac{M}{h},$$

$$\text{(I)} \qquad O(U) = \mp\frac{p}{2h}x(l-x).$$

Hat der Träger gleiche Feldweiten λ, deren Anzahl n sei, so führen wir statt l den Wert $n\lambda$ ein (Fig. 104a). Der Abstand x eines Knotenpunktes, der die Ordnungsziffer m hat, würde dann $m\lambda$ sein. Der Wert $(l-x)$ wird also $(n\lambda - m\lambda) = (n-m)\lambda$. Insgesamt nehmen die obigen Formeln die Gestalt an:

$$M = \frac{p}{2}m\lambda(n-m)\lambda = \frac{p\lambda^2}{2}m(n-m),$$

$$\text{(Ia)} \qquad O(U) = \mp\frac{p\lambda^2}{2h}m(n-m).$$

Der Faktor $\frac{p\lambda^2}{2h}$ wird ein für allemal ausgerechnet und für n die betreffende Zahl eingeschrieben. Dann braucht man für m nur die Zahlen *1*, *2* usw. einzusetzen und hat dann der Reihe nach sämtliche Gurtstäbe.

II. Füllungsstäbe.

Beim Parallelträger sind die Diagonalen und Vertikalen direkt ausdrückbar durch die Kraftsumme Q (und zwar desjenigen Feldes, in dem der zu dem betreffenden Stabe gehörige Schnitt die belastete Gurtung durchbricht). Es kommt also nur darauf an, für die einzelnen Felder die größten Querkräfte aufzustellen. Dann haben wir auch die größten D und V.

a) Die größten Querkräfte infolge einer beweglichen Belastung p.

In Band I, § 68, haben wir die Aufgabe behandelt: Auf einen Träger $\overline{AB}$ wirke eine indirekte bewegliche Belastung p. Bei welcher Stellung der Last ergibt sich für ein Feld $(m-1)-m$ des Trägers die größte Querkraft und wie groß ist diese?

Die Untersuchung wurde an Hand der Einflußlinie für indirekte Belastung durchgeführt. Das Resultat war folgendes (s. Band I, § 68, Fig. 118+d; Band II, Fig. 104c und d): Man muß zwischen der größten positiven und größten negativen Querkraft unterscheiden. Die größte positive Querkraft eines Feldes entsteht, wenn die Belastung von rechts aus bis zu einer Entfernung $y = x'_m \frac{\lambda_m}{l-\lambda_m}$ in das Feld hineingerückt ist. Und zwar beträgt dann die Querkraft:

(III) Größte positive Querkraft $$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2}\frac{x'^2_m}{l-\lambda_m}.$$

Die größte negative Querkraft entsteht, wenn die Belastung von links aus eine Strecke $z = x_{m-1}\frac{\lambda_m}{l-\lambda_m}$ in das Feld hineingerückt ist, und zwar beträgt dann:

(III) Größte negative Querkraft $$\underset{-}{Q} = \frac{p}{2}\frac{x^2_{m-1}}{l-\lambda_m}.$$

Nach diesen Formeln kann man also die größten Querkräfte direkt hinschreiben.

Für den Fall, daß die Feldweiten λ des Trägers sämtlich einander gleich sind, haben wir die Formeln noch bequemer gestaltet. Beträgt nämlich die Anzahl der Felder n, so ist in die obigen Ausdrücke zunächst einzusetzen:

$$l = n\cdot\lambda,\quad \text{also}\quad l-\lambda_m = n\cdot\lambda-\lambda = (n-1)\lambda.$$

Ferner ist für ein Feld mit der Ordnungsziffer $(m-1)-m$:

$$x_{m-1} = (m-1)\lambda$$

$$x'_m = l - x_m = n\lambda - m\lambda = (n-m)\lambda .$$

Insgesamt wurde dann aus den obigen Formeln:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2} \frac{(n-m)^2 \lambda^2}{(n-1)\lambda},$$

(III a)

$$\underset{+}{Q} = \frac{p\lambda}{2(n-1)} \cdot (n-m)^2$$ [$(n-m)$ = Felderzahl rechts vom Schnitt]

$$\underset{-}{Q} = \frac{p\lambda}{2(n-1)} \cdot (m-1)^2$$ [$(m-1)$ = Felderzahl links vom Schnitt].

Bei Benutzung dieser Formeln wird zunächst der Faktor $\frac{p\lambda}{2(n-1)}$ ausgerechnet. Dieser Faktor braucht dann nur noch mit den zugehörigen Zahlen $(n-m)^2$, bzw. $(m-1)^2$ multipliziert zu werden, um für ein Feld $(m-1)-m$ die größten Querkräfte zu erhalten.

Beispiel.

Für den Träger Fig. 104° sind für das Feld 4—5 die größten Querkräfte infolge einer beweglichen indirekten Last zu bestimmen!

Spannweite $l = 14 \cdot 1{,}00 = 14{,}00$ m; Feldweite $\lambda = 1{,}00$ m;

Last $p = 1{,}20$ t/m.

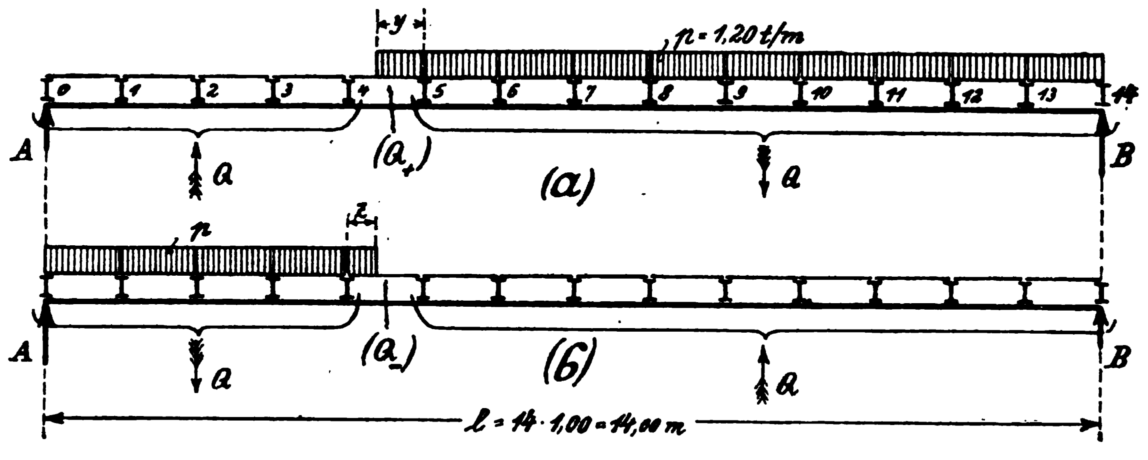


Fig. 104°.

Da wir gleiche Feldweiten haben, benutzen wir die Formeln IIIa. Für die hierin vorkommenden Zahlen n, m und $(m-1)$ ist einzusetzen:

$n = 14$ (der Träger 14 Felder),

$(m-1) = 4$; $m = 5$ (es handelt sich um das Feld 4—5).

Somit erhalten wir:

größte positive Querkraft von Feld 4—5: $Q_{+(4-5)} = \frac{1,20 \cdot 1,00}{2 \cdot 13} \cdot 9^2$

$= 0,046 \cdot 9^2 = +3,7$ t,

„ negative „ „ „ „ : $Q_{-(4-5)} = 0,046 \cdot 4^2 = -0,7$ t.

Diese Zahlen +3,7 und —0,7 haben also folgende Bedeutung: Wenn man auf den vorliegenden Träger die Belastung p in irgendeiner Weise aufgebracht denkt, dann das Feld 4—5 durchschneidet und die Summe der Kräfte links und rechts vom Schnitt bildet, so können sich bei der Summierung zunächst zwei Fälle herausstellen: Entweder treten die Summen Q mit den Pfeilrichtungen von Fig. 104°a (links ↑, rechts ↓), oder mit den Pfeilrichtungen von Fig. 104°b (links ↓, rechts ↑) auf. Welche der beiden Anordnungen sich aber auch ergeben mag, die Größe dieses Betrages Q muß stets zwischen den Grenzen +3,7 und —0,7 bleiben; das heißt: falls sich eine positive Anordnung ergibt, kann die Größe der Summe Q schwanken zwischen 0 und 3,7 t; falls sich eine negative Anordnung ergibt, kann Q schwanken zwischen 0 und 0,7 t. Eine größere Summe Q in positiver Anordnung als 3,7 t, oder eine größere Summe Q in negativer Anordnung als 0,7 t lassen sich bei dem vorliegenden Träger und der vorgeschriebenen Belastung p überhaupt nicht erzielen.

b) Bestimmung von D und V.

Um nun z. B. für die Diagonale D in Fig. 104c, d die größten Spannkräfte zu erhalten, legen wir zunächst den zu D gehörigen Schnitt. Dieser Schnitt durchbricht die die Lasten tragende Gurtung im Felde $(\overline{m-1}) - \overline{m}$. Für dieses Feld $(\overline{m-1}) - \overline{m}$ werden dann die größte positive und die größte negative Querkraft berechnet und hieraus die größten Spannkräfte (Zug und Druck) von D erhalten. Hiermit ist der Stab D erledigt.

In Fig. 104b ist noch gezeigt, welches Feld bei Belastung am Obergurt zu der Vertikalen V gehört. [Nämlich das Feld $(\overline{m-1}) - \overline{m}$.] Aus der Querkraft dieses Feldes wird dann V bestimmt.

Hinsichtlich der Vorzeichen sei an die Untersuchungen von § 7a, 7b erinnert:

linkssteigende Diagonale	positive Querkraft erzeugt	Zug,
	negative „ „	Druck;
rechtssteigende „	positive „ „	Druck,
	negative „ „	Zug.
V zwischen linkssteigenden Diagonalen	positive Q. erzeugt	Druck,
	negative „ „	Zug;
V „ rechtssteigenden „	positive „ „	Zug,
	negative „ „	Druck.

Unter „Vertikalen“ sind natürlich immer Hauptvertikalen gemeint. Zwischenvertikalen werden einfach aus dem Gleichgewicht ihrer Endknotenpunkte bestimmt.

III. Zusammenfassung.

Gurtstäbe. Allgemein ist

$$\text{(I)} \qquad O(U) = \mp \frac{p}{2h} x(l-x).$$

[x = Abstand des Bezugspunktes vom linken Auflager.]

Für den Fall n gleicher Felder λ:

$$\text{(Ia)} \qquad O(U) = \mp \frac{p\lambda^2}{2h} m(n-m).$$

[m = Ordnungsnummer des betreffenden Bezugspunktes.]

Füllungsstäbe. Allgemein ist die größte Querkraft eines Feldes λ_m:

$$\text{(III)} \qquad \underset{+}{Q} = +\frac{p}{2}\frac{x_m'^2}{l-\lambda_m}; \quad \underset{-}{Q} = -\frac{p}{2}\frac{x_{m-1}^2}{l-\lambda_m}.$$

[x_m' bzw. x_{m-1} = Abstand des rechten bzw. linken Knotenpunktes des Feldes vom rechten bzw. linken Ende des Trägers.]

Für den Fall n gleicher Felder λ:

$$\text{(IIIa)} \qquad \underset{+}{Q} = +\frac{p\lambda}{2(n-1)}(n-m)^2; \quad \underset{-}{Q} = -\frac{p\lambda}{2(n-1)}(m-1)^2.$$

[m = Ordnungsnummer des rechten, $m-1$ des linken Knotenpunktes des Feldes.]

Aus der Querkraft folgen dann:

$$D = \frac{1}{\sin\varphi} Q; \qquad V = Q.$$

§ 30.

Beispiele zu § 29.

Erste Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 104a ist für eine gleichmäßig verteilte bewegliche Last von $p = 1{,}20$ t/m zu berechnen!

Spannweite $l = 14\lambda = 14 \cdot 1{,}00 = 14{,}00$ m. Höhe $h = 1{,}20$ m.

Nach den Untersuchungen von § 29 kann man die Berechnung in folgender Form durchführen (s. Tabelle S. 316).

Die größte positive und die größte negative Querkraft eines Feldes ergänzen sich stets zu der Querkraft infolge Vollbelastung.

Statt für die betrachteten Felder die größte positive und negative Querkraft einzeln auszurechnen, hätte man auch so vorgehen können, daß man nur die positiven Querkräfte, aber für sämtliche Felder des Trägers, bestimmt. Denn wegen der Symmetrie ist z. B. die größte negative Querkraft des fünften Feldes von links (Fig. 104d) gleich der größten positiven Querkraft des

Gurtstäbe (t) $O, U = \mp \frac{p\,\lambda^2}{2\,h}\,m\,(n-m)$ $= \mp \frac{1{,}20 \cdot 1{,}0^2}{2 \cdot 1{,}20}\,m\,(14-m)$ $O, U = \mp 0{,}50\,m\,(14-m)$	Größte Querkräfte (t) (positive und negative) $Q^{+}_{(m-1)-m} = +\frac{p\,\lambda}{2(n-1)}(n-m)^2 = +0{,}046(14-m)^2$ $Q^{-}_{(m-1)-m} = -\frac{p\,\lambda}{2(n-1)}(m-1)^2 = -0{,}046\,(m-1)^2$	Diagonalen (t) $D = +\frac{1}{\sin\varphi} \cdot Q$ $\left[\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{1{,}0^2 + 1{,}2^2}}{1{,}2} = 1{,}30\right]$ $D = +1{,}30 \cdot Q$	Vertikalen (t) $V = -Q$ $[V_0 = -A$ $V_7 = -P]$
$U_1 = 0{,}0$	$[A = \frac{1}{2}\,14{,}00 \cdot 1{,}20 = 8{,}4\ \mathrm{t}]$		$[V_0 = -8{,}4]$
$O_1, U_2 = \mp 0{,}50 \cdot 1 \cdot 13 = \mp 6{,}5$	$Q_{0-1} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 13^2 = +7{,}8 \\ -0{,}046 \cdot 0 = 0{,}0 \end{matrix}$	$D_1 = \begin{matrix} +7{,}8 \cdot 1{,}30 = +10{,}1 \\ -0{,}0 \cdot 1{,}30 = 0{,}0 \end{matrix}$	$V_1 = \begin{matrix} -7{,}8 \\ +0{,}0 \end{matrix}$
$O_2, U_3 = \mp 0{,}50 \cdot 2 \cdot 12 = \mp 12{,}0$	$Q_{1-2} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 12^2 = +6{,}7 \\ -0{,}046 \cdot 1^2 = -0{,}1 \end{matrix}$	$D_2 = \begin{matrix} +6{,}7 \cdot 1{,}30 = +8{,}7 \\ -0{,}1 \cdot 1{,}30 = -0{,}1 \end{matrix}$	$V_2 = \begin{matrix} -6{,}7 \\ +0{,}1 \end{matrix}$
$O_3, U_4 = \mp 0{,}50 \cdot 3 \cdot 11 = \mp 16{,}5$	$Q_{2-3} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 11^2 = +5{,}6 \\ -0{,}046 \cdot 2^2 = -0{,}2 \end{matrix}$	$D_3 = \begin{matrix} +5{,}6 \cdot 1{,}30 = +7{,}3 \\ -0{,}2 \cdot 1{,}30 = -0{,}3 \end{matrix}$	$V_3 = \begin{matrix} -5{,}6 \\ +0{,}2 \end{matrix}$
$O_4, U_5 = \mp 0{,}50 \cdot 4 \cdot 10 = \mp 20{,}0$	$Q_{3-4} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 10^2 = +4{,}6 \\ -0{,}046 \cdot 3^2 = -0{,}4 \end{matrix}$	$D_4 = \begin{matrix} +4{,}6 \cdot 1{,}30 = +6{,}0 \\ -0{,}4 \cdot 1{,}30 = -0{,}5 \end{matrix}$	$V_4 = \begin{matrix} -4{,}6 \\ +0{,}4 \end{matrix}$
$O_5, U_6 = \mp 0{,}50 \cdot 5 \cdot 9 = \mp 22{,}5$	$Q_{4-5} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 9^2 = +3{,}7 \\ -0{,}046 \cdot 4^2 = -0{,}7 \end{matrix}$	$D_5 = \begin{matrix} +3{,}7 \cdot 1{,}30 = +4{,}8 \\ -0{,}7 \cdot 1{,}30 = -0{,}9 \end{matrix}$	$V_5 = \begin{matrix} -3{,}7 \\ +0{,}7 \end{matrix}$
$O_6, U_7 = \mp 0{,}50 \cdot 6 \cdot 8 = \mp 24{,}0$	$Q_{5-6} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 8^2 = +3{,}0 \\ -0{,}046 \cdot 5^2 = -1{,}2 \end{matrix}$	$D_6 = \begin{matrix} +3{,}0 \cdot 1{,}30 = +3{,}9 \\ -1{,}2 \cdot 1{,}30 = -1{,}6 \end{matrix}$	$V_6 = \begin{matrix} -3{,}0 \\ +1{,}2 \end{matrix}$
$O_7 \quad = -0{,}50 \cdot 7 \cdot 7 = -24{,}5$	$Q_{6-7} = \begin{matrix} +0{,}046 \cdot 7^2 = +2{,}3 \\ -0{,}046 \cdot 6^2 = -1{,}7 \end{matrix}$	$D_7 = \begin{matrix} +2{,}3 \cdot 1{,}30 = +3{,}0 \\ -1{,}7 \cdot 1{,}30 = -2{,}2 \end{matrix}$	$[V_7 = -1{,}2]$

fünften Feldes von rechts. [Die Laststellungen sind das Spiegelbild voneinander.] Die Rechenarbeit ist natürlich genau dieselbe. Nur weil man bisweilen so vorgegangen findet, daß **sämtliche** Felder **einmal** von links bis rechts durchgerechnet werden, sollte dies erwähnt werden.

Zweite Aufgabe.

Berechne den obigen Träger für Belastung am Untergurt!

Momente und Querkräfte sind unabhängig davon, ob die Belastung am Ober- oder am Untergurt angreift. Die Gurtstäbe und Diagonalen bleiben ebenfalls unverändert. Nur die Vertikalen ändern sich. Denn z. B. für Vertikale V_1 ging vorhin der zugehörige Schnitt im Felde *0—1* durch die Lasten hindurch, während er jetzt im Felde *1—2* die die Lasten tragende Gurtung durchbricht. Auch V_0 und V_7 sind natürlich anders, erstere gleich der Querkraft des Feldes *0—1*, letztere gleich Null.

Insgesamt ergeben sich also für die Vertikalen die Spannkräfte:

$$V_0 = \begin{matrix} -7{,}8 \\ +0{,}0 \end{matrix}; \quad V_1 = \begin{matrix} -6{,}7 \\ +0{,}1 \end{matrix}; \quad V_2 = \begin{matrix} -5{,}6 \\ +0{,}2 \end{matrix}; \quad V_3 = \begin{matrix} -4{,}6 \\ +0{,}4 \end{matrix};$$

$$V_4 = \begin{matrix} -3{,}7 \\ +0{,}7 \end{matrix}; \quad V_5 = \begin{matrix} -3{,}0 \\ +1{,}2 \end{matrix}; \quad V_6 = \begin{matrix} -2{,}3 \\ +1{,}7 \end{matrix}; \quad V_7 = 0{,}0 .$$

Wie man sieht, ist gegenüber der früheren Tabelle jede Vertikale um ein Feld hinuntergerückt.

Dritte Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 104e mit abwechselnd links- und rechtssteigenden Diagonalen und Hilfsvertikalen ist zu berechnen!

Abmessungen und Belastung wie bei erster Aufgabe. (Belastung am Obergurt.)

Gurtstäbe (t) $O, U = \mp \frac{p\lambda^2}{2h} m(n-m)$ $= \mp 0{,}50\, m(14-m)$	Größte Querkräfte (t) $Q^{+}_{(m-1)-m} = + \frac{p\lambda}{2(n-1)}(n-m)^2 = 0{,}046(14-m)^2$ $Q^{-}_{(m-1)-m} = -0{,}046(m-1)^2$	Diagonalen (t) $D = \pm \frac{1}{\sin\varphi} \cdot Q$ $= \pm 1{,}30 \cdot Q$	Vertikalen (t) $V = 0{,}0$ bzw. $= -P$
$O_1 =$ 0,0	$[A = \frac{1}{2}\, 14{,}00 \cdot 1{,}20 = 8{,}4\,\text{t}]$		V_2, V_4, V_6 $= -P = -1{,}20 \cdot 1{,}00$ $= -1{,}20$ t
$O_2, O_3 = -0{,}50 \cdot 2 \cdot 12 = -12{,}0$	$Q_{0-1} = \begin{matrix}+7{,}8\\-0{,}0\end{matrix}$	$D_1 = \begin{matrix}-10{,}1\\+0{,}0\end{matrix}$	$V_0 = -0{,}60$ t
$O_4, O_5 = -0{,}50 \cdot 4 \cdot 10 = -20{,}0$	$Q_{1-2} = \begin{matrix}+6{,}7\\-0{,}1\end{matrix}$	$D_2 = \begin{matrix}+8{,}7\\-0{,}1\end{matrix}$	$V_1, V_3, V_5, V_7 = 0{,}0$
$O_6, O_7 = -0{,}50 \cdot 6 \cdot 8 = -24{,}0$	$Q_{2-3} = \begin{matrix}+5{,}6\\-0{,}2\end{matrix}$	$D_3 = \begin{matrix}-7{,}8\\+0{,}8\end{matrix}$	
$U_1, U_2 = +0{,}50 \cdot 1 \cdot 13 = +6{,}5$	$Q_{3-4} = \begin{matrix}+4{,}6\\-0{,}4\end{matrix}$	$D_4 = \begin{matrix}+6{,}0\\-0{,}5\end{matrix}$	
$U_3, U_4 = +0{,}50 \cdot 3 \cdot 11 = +16{,}5$	$Q_{4-5} = \begin{matrix}+3{,}7\\-0{,}7\end{matrix}$	$D_5 = \begin{matrix}-4{,}8\\+0{,}9\end{matrix}$	
$U_5, U_6 = +0{,}50 \cdot 5 \cdot 9 = +22{,}5$	$Q_{5-6} = \begin{matrix}+3{,}0\\-1{,}2\end{matrix}$	$D_6 = \begin{matrix}+3{,}9\\-1{,}6\end{matrix}$	
$U_7 = +0{,}50 \cdot 7 \cdot 7 = +24{,}5$	$Q_{6-7} = \begin{matrix}+2{,}3\\-1{,}7\end{matrix}$	$D_7 = \begin{matrix}-3{,}0\\+2{,}2\end{matrix}$	

§ 31.
Der Parallelträger mit Einzellasten.

I. Gurtstäbe.

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{M}{h}, \qquad U = +\frac{M}{h}.$$

Um für einen Gurtstab die größte Spannkraft zu erhalten, müssen also die Lasten so gestellt werden, daß für seinen Bezugspunkt m das größte Biegungsmoment M entsteht. Wie bereits in § 28, I, Fig. 101b, besprochen wurde, geschieht dies auf folgende Weise: Eine möglichst schwere Last wird direkt über den Punkt m gestellt, und die übrigen werden so angeordnet, daß die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} R\dfrac{x_m}{l} < P_1 + P_2 \quad + \ldots + P_m, \\ R\dfrac{x'_m}{l} < P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m. \end{cases}$$

Hierin bedeuten $P_1 + P_2 + \ldots + P_m$ die Lasten von links bis einschließlich Punkt m; $P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m$ bedeuten die Lasten von rechts bis einschließlich m. Die Längen x_m und x'_m sind die Abstände des betreffenden Punktes vom linken bzw. rechten Auflager. R ist die Summe aller Lasten. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so stehen die Lasten so, daß für den betreffenden Punkt das größte Biegungsmoment hervorgerufen wird.

Auf diese Weise wird jeder Punkt einzeln vorgenommen und sein größtes Biegungsmoment bestimmt.

Aus den Biegungsmomenten ergeben sich dann nach den Formeln (I) die Gurtkräfte.

II. Füllungsstäbe.

$$\text{(III)} \qquad D = \frac{Q}{\sin\varphi}, \qquad V = Q.$$

a) Die gefährliche Laststellung.

Es kommt also darauf an, für den vorliegenden Belastungsfall: indirekt wirkende Einzellasten, für jedes Feld die größte positive und größte negative Querkraft Q zu erhalten. Diese Aufgabe ist in Band I, § 68 behandelt. Es ergab sich folgende Regel (s. Band I, Fig. 118°; Band II, Fig. 105):

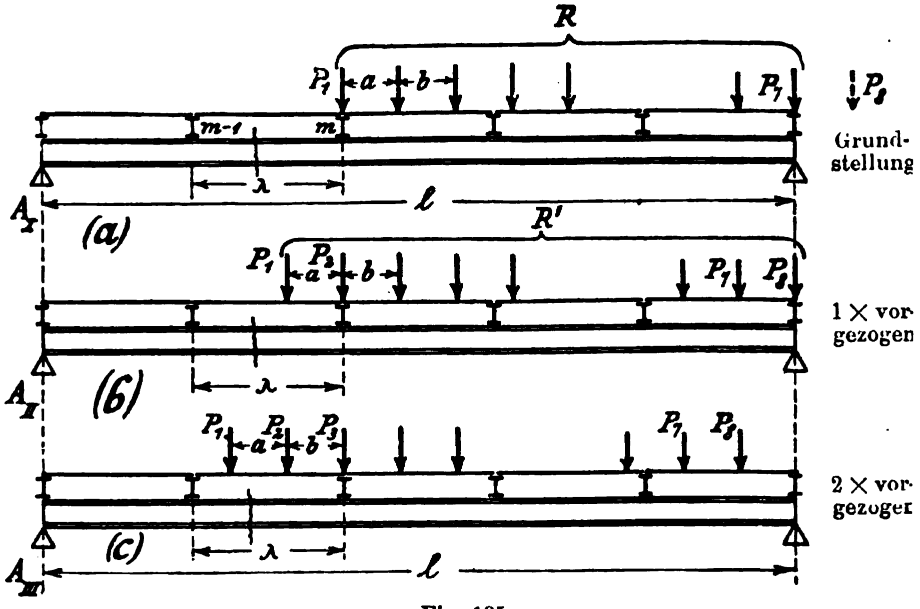


Fig. 105.

Man nimmt die Lasten zunächst in **Grundstellung** an (d. h. die erste Last bis unmittelbar vor dem Felde) und untersucht, ob

$$\text{(IV)} \qquad R \textit{ kleiner} \text{ oder } \textit{größer} \text{ als } P_1 \frac{l}{\lambda}$$

ist. (R = Summe aller Lasten bei Grundstellung, P_1 = erste Last.) Im ersteren Falle bleibt es bei Grundstellung. Im zweiten Falle gibt Grundstellung nicht die größte Querkraft, sondern es muß vorgezogen werden. Dann muß aber noch weiter untersucht werden, ob

$$\text{(V)} \qquad R' \textit{ kleiner} \text{ oder } \textit{größer} \text{ als } (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}$$

ist. (R' = Summe aller Lasten bei vorgezogener Stellung.) Im ersteren Falle ist einmal vorgezogene Stellung maßgebend (d. h. nur die erste Last kommt in das Feld hinein); im zweiten Falle ist **zweimal** vorgezogene Stellung maßgebend (d. h. die ersten zwei Lasten kommen in das Feld hinein).

b) Die größten Querkräfte.

Sobald nun die Laststellung, bei der die größte Querkraft auftritt, erkannt ist, ist es leicht, letztere selbst zu berechnen (Fig. 105):

$$\text{(VI)} \begin{cases} \text{falls Grundstellg. maßgebend:} & \underset{+}{Q} = +A_I\,, \\ \quad\text{„ vorgezog. St. „} & : \underset{+}{Q} = +A_{II} - P_1 \cdot \dfrac{a}{\lambda} \\ & \text{bzw.} \quad = +A_{III} - \dfrac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda}\,. \end{cases}$$

Auf diese Weise ergibt sich die größte positive Querkraft des betreffenden Feldes. Um die größte negative Kraftsumme zu erhalten, läßt man den Zug entsprechend von A aus vorrücken.

c) Die Spannkräfte D und V.

Aus den beiden größten Querkräften eines Feldes ergeben sich dann nach den früheren Formeln sofort die D und V.

III. Zusammenfassung.

Gurtstäbe. Man nimmt eine Laststellung an, bei der eine möglichst schwere Last über dem Bezugspunkte des betreffenden Stabes steht und sieht nach, ob die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} R\dfrac{x_m}{l} < P_1 + P_2 + \ldots + P_m\,, \\[2ex] R\dfrac{x'_m}{l} < P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m\,. \end{cases}$$

Im zutreffenden Falle ist die angenommene Stellung die ungünstigste. Dann das Moment M ausrechnen und:

$$\text{(I)} \qquad O(U) = \mp \frac{M}{h}.$$

Füllungsstäbe. Von Grundstellung ausgehen und hierfür Summe R der Lasten bestimmen. Dann ergibt sich folgendes Schema der möglichen Fälle:

(1) $R < P_1 \frac{l}{\lambda}$: Grundstellung maßgebend,

(2) $R > P_1 \frac{l}{\lambda}$: vorschieben $\begin{cases} \text{a) } R' < (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}\text{: einmal vorschieben} \\ \text{b) } R' > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}\text{: zweimal ,,} \end{cases}$

[R' = Summe der Lasten bei einmal vorgezogener Stellung. Kann auch einfach gleich R genommen werden, da der Unterschied, falls überhaupt vorhanden, klein ist.]

Sobald über die maßgebende Stellung entschieden ist, die Querkraft berechnen:

$$Q = A \qquad \text{(im Falle 1)},$$

$$Q = A - P_1 \frac{a}{\lambda} \qquad (\text{,, ,, } 2),$$

$$Q = A - \frac{P_1(a + b) + P_2 b}{\lambda} \qquad (\text{,, ,, } 3).$$

Aus Q dann, wie gewöhnlich, D und V.

§ 32.

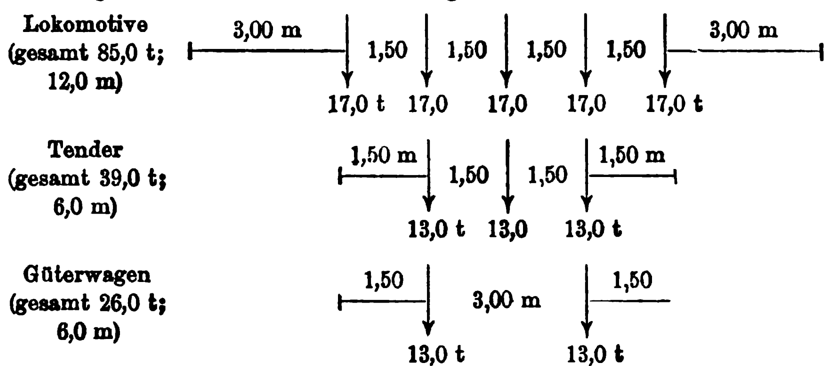
Querkräfte und Momente bei Eisenbahnbrücken.

Bei Brücken, die für ein bestimmtes Lastenschema zu berechnen sind, kann man Querkräfte und Momente in Form von Tabellen zusammenstellen. Namentlich ist dies für die preußisch-hessischen Staatsbahnen geschehen. Im folgenden sollen diese Tabellen gleichzeitig mit den wichtigsten Vorschriften mitgeteilt und erläutert werden. Der betreffende amtliche Erlaß lautet: „Vorschriften für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Überbau auf den Preußischen Staatseisenbahnen. Eingeführt durch Erlaß vom 1. Mai 1903".

I. Belastungen.

Nach den Vorschriften ist als Verkehrslast „ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten

Zahl einseitig angehängter Güterwagen" anzunehmen. Die Abmessungen und Achslasten sind folgende:



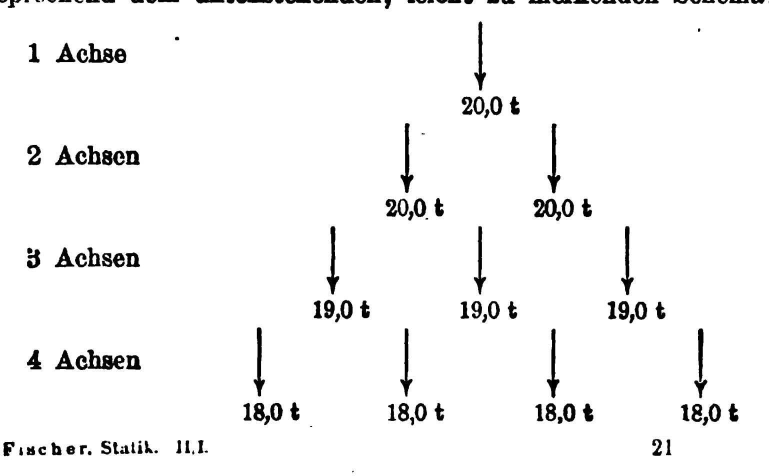
Zu diesen Angaben ist noch folgendes zu bemerken:

a) Sämtliche Zahlen beziehen sich auf *Achs*lasten. Haben wir eine *zweigleisige* Brücke, so müssen wir bei der Berechnung natürlich den Fall berücksichtigen, daß tatsächlich zwei Züge parallel nebeneinander stehen, so daß also auf jeden Hauptträger der Brücke die Achslasten des einen Zuges entfallen. Haben wir aber eine *eingleisige* Brücke, so kommen für jeden Hauptträger nur die halben Achslasten, d. h. die Radlasten, in Betracht. In diesem Falle sind also die obigen Zahlen durch 2 zu dividieren.

b) Die „Vorschriften für das Entwerfen usw." verlangen, daß, sobald sich weniger als fünf Achsen auf der Brücke befinden, die Achsdrücke höher als 17,0 t anzunehmen sind; und zwar heißt es:

Bei 1 oder 2 Achsen sind pro Achse 20 t zu rechnen,
„ 3 „ „ „ „ 19 t „ „
„ 4 „ „ „ „ 18 t „ „

entsprechend dem untenstehenden, leicht zu merkenden Schema:



Diese Vorschrift ist durchaus berechtigt. Denn bei einer kurzen Brücke von z. B. 5,0 m Spannweite machen sich die Radstöße des in Fahrt befindlichen Zuges viel mehr bemerkbar als bei großen Brücken. Dasselbe gilt für die Berechnung der Längs- und Querträger, für die meistens auch weniger als fünf Achsen in Betracht kommen.

c) Da die „Vorschriften" bestimmen, daß der Zug aus zwei Lokomotiven in *ungünstigster Stellung* mit einseitig angehängten Güterwagen bestehen soll, müssen hinsichtlich der Anordnung der Lokomotiven und Tender zwei Möglichkeiten berücksichtigt werden:

1) Lokomotive—Tender—Lokomotive—Tender—Güterwagen,
2) Tender—Lokomotive—Lokomotive—Tender—Güterwagen.

Die zweite Anordnung („Kopf an Kopf") kann auch mit der Lokomotive beginnen (wenn der erste Tender die Brücke bereits verlassen hat).

II. Tabelle für die Auflagerdrücke.

Die Tabelle auf Seite 324 dient dazu, bei einer Eisenbahnbrücke die Berechnung der Auflagerkräfte bei den verschiedenen Stellungen des Zuges zu erleichtern. Es sei z. B. die Aufgabe gestellt: Auf den in Fig. 106 b gezeichneten Brückenträger rücke von *B* aus ein Eisenbahnzug auf. Für die verschiedenen Stellungen dieses Zuges sollen die Auflagerkräfte *A* bestimmt werden.

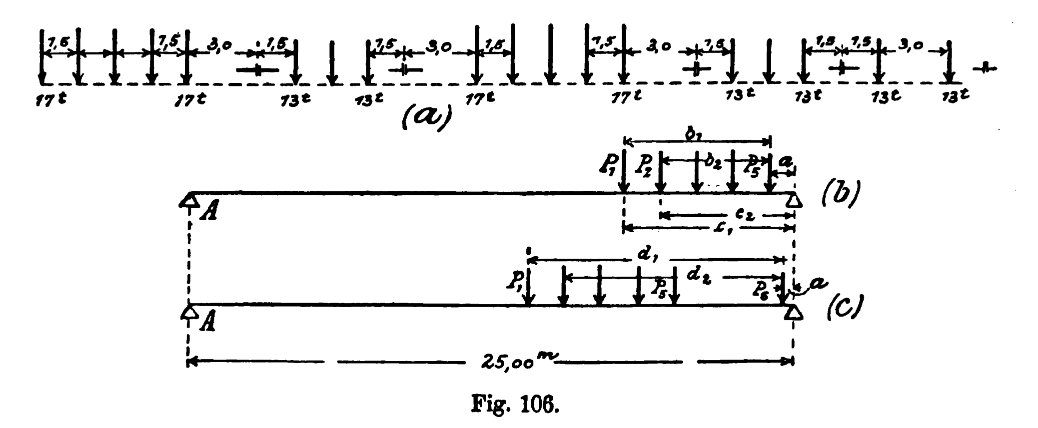


Fig. 106.

In Fig. 106a ist das Lastenschema gezeichnet. Für die Auflagerdrücke kommt im allgemeinen die Anordnung, daß beide Lokomotiven vor ihren Tendern sind, in Betracht. Nun wollen wir von irgendeiner Laststellung ausgehen. Es sei z. B. gerade die erste Lokomotive auf die Brücke gelangt (Fig. 106b). Be-

zeichnen wir die Entfernungen der Achsen P_1, P_2 usw. vom rechten Auflager mit c_1, c_2 usw., so ist:

$$A = \frac{1}{l}(P_1 c_1 + P_2 c_2 + P_3 c_3 + P_4 c_4 + P_5 c_5)\,.$$

Um diesen Ausdruck bequem auszurechnen, wollen wir die Abstände c_1, c_2 usw. der einzelnen Lasten vom Auflager B durch die Abstände b_1, b_2 dieser Lasten von der letzten Last und durch den Abstand a der letzten Last von B ausdrücken:

$$c_1 = b_1 + a\,; \quad c_2 = b_2 + a\,; \quad c_3 = b_3 + a\,; \quad c_4 = b_4 + a\,; \quad c_5 = 0 + a\,.$$

Dann erhalten wir:

$$A = \frac{1}{l}[P_1(b_1 + a) + P_2(b_2 + a) + P_3(b_3 + a) + P_4(b_4 + a) + P_5(0 + a)]$$

$$\text{(I)} \quad A = \frac{1}{l}[(P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 + P_4 b_4 + P_5 \cdot 0) + (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)\,a]\,.$$

Jetzt haben wir A dargestellt durch zwei Summen, die sich folgendermaßen deuten lassen: Der Ausdruck in der ersten Klammer ist nichts anderes als die Summe der statischen Momente aller Kräfte in bezug auf die letzte Kraft. Und der zweite Ausdruck ist das Produkt aus der Summe aller Lasten mal dem Abstand der letzten Last vom Auflager.

Die erste Summe kann nun direkt aus der folgenden Tabelle entnommen werden. Neben der Zahl 5 (Anzahl der auf der Brücke befindlichen Achsen) befindet sich nämlich in der Rubrik „Summe der statischen Momente“ die Zahl 255. Dieses ist die obige Summe der statischen Momente aller auf der Brücke befindlichen Kräfte in bezug auf die letzte Kraft. [Man mache die Kontrolle: Es ist $P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + \ldots = 17{,}0 \cdot 6{,}0 + 17{,}0 \cdot 4{,}5 + 17{,}0 \cdot 3{,}0 + 17{,}0 \cdot 1{,}5 + 17{,}0 \cdot 0{,}0 = 255$.] Somit ist der Inhalt der ersten runden Klammer durch einfaches Nachschlagen in der Tabelle bestimmt.

Die zweite Klammer, nämlich die Summe $P_1 + P_2 + \ldots$ aller auf der Brücke befindlichen Kräfte, ist ebenfalls in der Tabelle angegeben. Wir finden neben der Achszahl 5 angeführt $\Sigma P = 85$ t. [$17{,}0 + 17{,}0 + \ldots = 85{,}0$ t.]

Mit Hilfe dieser Tabellenwerte können wir also den obigen Ausdruck für A schreiben:

$$\text{(Ia)} \qquad A = \frac{1}{l}[255 + 85 \cdot a]\,.$$

Der Abstand a ist natürlich durch die betreffende Zugstellung ge-

Tabelle A: Auflagerdrücke.

Achszahl n	Zuglänge b	Summe der st. Momente ΣPb	Summe der Kräfte ΣP	Achszahl n	Zuglänge b	Summe der st. Momente ΣPb	Summe der Kräfte ΣP
1	0	0	20	31	76,5	19389	443
2	1,5	30	40	32	79,5	20718	456
3	3,0	85,5	57	33	82,5	22086	469
4	4,5	162	72	34	85,5	23493	482
5	6,0	255	85	35	88,5	24939	495
6	10,5	637,5	98	36	91,5	26424	508
7	12,0	784,5	111	37	94,5	27948	521
8	13,5	951	124	38	97,5	29511	534
9	18,0	1509	141	39	100,5	31113	547
10	19,5	1720,5	158	40	103,5	32754	560
11	21,0	1957,5	175	41	106,5	34434	573
12	22,5	2220	192	42	109,5	36153	586
13	24,0	2508	209	43	112,5	37911	599
14	28,5	3448,5	222	44	115,5	39708	612
15	30,0	3781,5	235	45	118,5	41544	625
16	31,5	4134	248	46	121,5	43419	638
17	34,5	4878	261	47	124,5	45333	651
18	37,5	5661	274	48	127,5	47286	664
19	40,5	6483	287	49	130,5	49278	677
20	43,5	7344	300	50	133,5	51309	690
21	46,5	8244	313	51	136,5	53379	703
22	49,5	9183	326	52	139,5	55488	716
23	52,5	10161	339	53	142,5	57636	729
24	55,5	11178	352	54	145,5	59823	742
25	58,5	12234	365	55	148,5	62049	755
26	61,5	13329	378	56	151,5	64314	768
27	64,5	14463	391	57	154,5	66618	781
28	67,5	15636	404	58	157,5	68961	794
29	70,5	16848	417	59	160,5	71343	807
30	73,5	18099	430	60	163,5	73764	820

geben. Ist z. B. $a = 1{,}0$ m, so wäre bei der vorliegenden Brücke für die gezeichnete Laststellung

$$\text{(Ib)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{25{,}0}(255 + 85 \cdot 1{,}0) \\ \quad = \dfrac{1}{25{,}0}\, 340 = 13{,}6 \text{ t.} \end{cases}$$

Dieser einfache Ausdruck (Ib) enthält also die gesamte Ausrechnung des Auflagerdruckes A bei den fünf Lasten $P_1 \ldots P_5$.

Rückt nun der Zug etwas vor, so daß a z. B. gleich 2,0 m wird, so ändert sich in der ersten Klammer gar nichts, denn sowohl die P (die Achsdrücke) als auch die b (die Entfernungen der einzelnen Achsen voneinander) sind unveränderliche Werte. In der zweiten Klammer bleibt die Summe aller Lasten ebenfalls dieselbe — vorausgesetzt, daß durch das Vorschieben keine neue Last auf die Brücke hinzugekommen ist —, so daß nur für a der neue Wert einzusetzen ist. Wir erhalten also für diese neue Stellung

$$A = \frac{1}{25}(255 + 85 \cdot 2{,}0)$$

$$= \frac{1}{25}(255 + 170)$$

$$= 17{,}0 \text{ t.}$$

Denken wir uns nun den Zug noch weiter verschoben, so daß bereits die erste Tenderachse auf die Brücke gelangt ist, Fig. 106c, so dürfen wir die obigen Zahlen natürlich nicht mehr benutzen, weil jetzt eine neue Last, P_6, in den Klammerausdrücken hinzukommt. Der Ausdruck für A lautet jetzt also:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{l}[(P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + P_4 d_4 + P_5 d_5 + P_6 \cdot 0) \\ \quad + (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6)\, a]\,. \end{cases}$$

Die Bedeutung der beiden Klammern ist genau entsprechend wie bei (I). Auch die Ausrechnung finden wir in derselben Weise: Wir schlagen in der Tabelle neben der Achszahl 6 die beiden Werte auf:

$$\Sigma P b = 637{,}5\,, \qquad \Sigma P = 98\,,$$

und haben hiermit die Ausrechnung der obigen beiden Klammern. Ist z. B. die Laststellung so, daß der letzte Abstand $a = 0{,}5$ m ist, so ist also der Auflagerdruck bei sechs Achsen:

$$A = \frac{1}{l}[637{,}5 + 98 \cdot 0{,}5]$$

$$= \frac{1}{25{,}0}(637{,}5 + 49) = 27{,}46 \text{ t.}$$

Verschiebt sich der Zug noch weiter, so daß irgendeine Achszahl n hinaufkommt, so bestimmen wir die zugehörigen Werte $\Sigma P b$ und ΣP und erhalten

$$\text{(III)} \qquad A = \frac{1}{l}[\Sigma P b + (\Sigma P)\, a]\,.$$

Zusatz. Im allgemeinen ist allerdings nicht der Abstand a der letzten Last vom rechten Endpunkte angegeben, sondern der

Abstand c der ersten Last. Dieses ist die sog. „*Belastungslänge*". Dann ergibt sich der Abstand a, indem wir von dem Abstande c die Zuglänge (von der ersten bis zur letzten Last) abziehen. Diese Zuglängen b sind in der obigen Tabelle ebenfalls angegeben. Aus der gegebenen Belastungslänge c und der aufzuschlagenden Zuglänge b finden wir also zunächst den Abstand

$$\text{(IV)} \qquad a = c - b\,,$$

und, sobald wir diesen haben, nach der obigen Formel (III) den Auflagerdruck A:

$$\text{(IIIa)} \qquad A = \frac{1}{l}\left[\Sigma Pb + \Sigma P(c-b)\right].$$

Beispiel.

Eine *eingleisige* Brücke von $l = 40{,}00$ m Spannweite sei in 10 Felder zu 4,00 m geteilt. Der Auflagerdruck A ist zu berechnen für die Fälle, daß der Zug, von B kommend, der Reihe nach bis Punkt *9*, *8*, *7* ... *0* vorgerückt ist (Fig. 107).

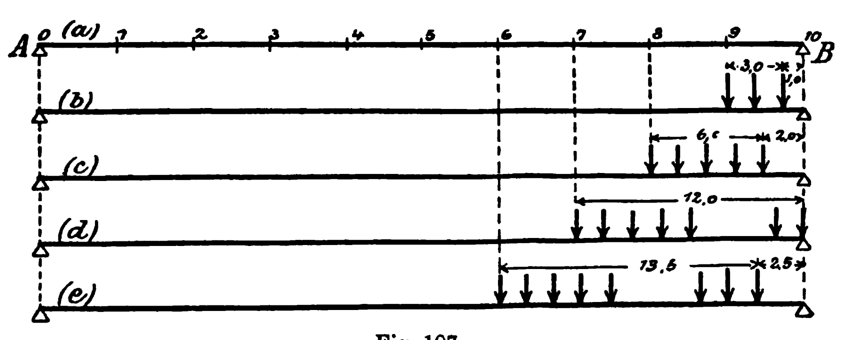


Fig. 107.

1) *Laststellung Fig. 107b.* Der Abstand c der ersten Last vom rechten Lager ist: $c = 4{,}00$ m. Nun sehen wir in der Tabelle nach und finden, daß die Zuglänge b, die einem Abstande von 4,00 m am nächsten kommt, $b = 3{,}00$ m ist. Hieraus folgt dann sofort der Abstand der letzten Last vom Punkte B, $a = 4{,}0 - 3{,}0$. Und ferner finden wir aus der Tabelle die zu dieser Laststellung gehörigen Werte $\Sigma Pb = 85{,}5$ mt und $\Sigma P = 57$ t. [Bei nur drei Lasten muß jede zu 19,0 t genommen werden. Daher ist $\Sigma P = 57$ t.] Hiermit ergibt sich für diese Laststellung:

$$A = \frac{1}{l}\left[85{,}5 + 57\,(4{,}0 - 3{,}0)\right]\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{40{,}0}\left[85{,}5 + 57\right]\cdot\frac{1}{2} = 1{,}78 \text{ t}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist deshalb nötig, weil die obigen Zahlen sich auf Achslasten beziehen, während für unsere *ein*gleisige Brücke pro Hauptträger nur Radlasten in Betracht kommen!

Man kann der Tabelle auch noch die Zahl n der auf der Brücke befindlichen Achsen entnehmen. Doch interessiert die im allgemeinen nicht.

2) *Zusammenstellung der Auflagerdrücke.* In der folgenden Tabelle sind nun für mehrere Zugstellungen, von Punkt *9* bis Punkt *0* (Vollbelastung), die Auflagerdrücke A nach der Formel (IIIa) ausgerechnet. Die ganze Arbeit geht sehr schnell und übersichtlich.

Belastungslänge c (m)	Zuglänge b (m)	ΣPb (mt)	ΣP (t)	$A = \frac{1}{l}[\Sigma Pb + \Sigma P(c-b)] \cdot \frac{1}{2}$ (t)
4,00	3,0	85,5	57	$A_9 = \frac{1}{40,0}[85,5 + 57\,(4,0 - 3,0)]\frac{1}{2} = 1,8$
8,00	6,0	255	85	$A_8 = \frac{1}{40,0}[255 + 85\,(8,0 - 6,0)]\frac{1}{2} = 5,3$
12,00	12,0	784,5	111	$A_7 = \frac{1}{40,0}[784,5 + 111 \cdot 0,0]\frac{1}{2} = 9,8$
.	.	.	.	.
32,00	31,5	4134	248	$A_2 = \frac{1}{40,0}[4134 + 248\,(32.0 - 31,5)]\frac{1}{2} = 53,2$
36,00	34,5	4878	261	$A_1 = \frac{1}{40,0}[4878 + 261\,(36,0 - 34,5)]\frac{1}{2} = 65,9$
40,00	37,5	5661	274	$A_0 = \frac{1}{40,0}[5661 + 274\,(40,0 - 37,5)]\frac{1}{2} = 79,3$

[Das Aufstellen der Tabelle A ist übrigens nicht so umständlich, wie man wohl zunächst annimmt. Hat man z. B. für $b = 6,0$ m ausgerechnet: $\Sigma P = 85$ und $\Sigma Pb = 255$, so ergeben sich für das folgende $b = 10,5$ die entsprechenden Werte: $\Sigma P = 85 + 13 = 98$ und $\Sigma Pb = 255 + 85 \cdot 4,5 = 637,5$, wobei $4,5 = 10,5 - 6,0$ ist. Dieses läßt sich leicht beweisen, indem man ΣPb für $b = 6,0$ m und für $b = 10,5$ m aufstellt und miteinander vergleicht. Man fängt also beim Aufstellen der Tabelle mit $b = 0$ an und geht schrittweis weiter.]

III. Berechnung der Querkräfte.

Aus den Auflagerdrücken ergeben sich auch sofort die Querkräfte: Bei Grundstellung ist die Kraftsumme direkt gleich dem

Auflagerdruck; bei vorgezogener Stellung gleich dem betreffenden Auflagerdruck vermindert um den Gegendruck des Querträgers.

Um also für ein Feld u—v einer Eisenbahnbrücke Fig. 108 die größte Querkraft zu erhalten, wird man insgesamt folgendes tun (vgl. § 31, II): Wir stellen die Lasten in Grundstellung (Fig. 108 a) und bestimmen aus der Belastungslänge c mittels der Tabelle A (durch Aufsuchung der nächstniedrigen Zuglänge) die Summe $R = \Sigma P$ aller Lasten. Dann sehen wir nach, ob

$$\text{(V)} \qquad R < \text{ oder } > P_1 \frac{l}{\lambda}$$

ist. Im ersteren Falle ist Grundstellung maßgebend. Im zweiten Falle ist vorgezogene Stellung maßgebend. Dann müssen wir noch weiter nachsehen, ob

$$\text{(VI)} \qquad R' < \text{ oder } > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}$$

ist und finden hierdurch, ob *ein*- oder *zwei*mal vorgezogene Stellung zu nehmen ist (Fig. 108 b und c). [R' = Summe der Lasten bei einmal vorgezogener Stellung; ist häufig gleich R.]

Sobald die Stellung entschieden ist, ergibt sich die Kraftsumme:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \text{bei Grundstellung:} & Q = +A_I\,, \\ \text{,, einmal vorgez. St.:} & Q = +A_{II} - P_1 \dfrac{a}{\lambda}\,, \\ \text{,, zweimal ,, ,, :} & Q = +A_{III} - \dfrac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda}\,. \end{cases}$$

Hierdurch ist die größte positive Querkraft des betrachteten Feldes bestimmt. Wie man auch den Lastenzug aufstellen wollte, es wäre nicht möglich, seitlich vom Schnitte m eine größere Summe von Kräften zusammenzubekommen, als die obige Summe Q.

Zusatz 1. Wir wissen bereits, daß nach den „Vorschriften" bei ein bis zwei Lasten mit 20,0 t, bei drei Lasten mit 19,0 t und bei vier Lasten mit 18,0 t Achslast gerechnet werden muß. Dann erst fangen die normalen Achslasten von 17,0 t bzw. 13,0 t an. Durch dieses Herausnehmen einzelner Achsen entsteht bei der Berechnung der Querkräfte folgende Besonderheit.

Für eine kurze Brücke (Fig. 108 d) sei für einen Querschnitt m, der beispielsweise 3,20 m von B entfernt ist, die größte positive Querkraft zu bestimmen. Es ist ganz augenscheinlich Grundstellung maßgebend. Lassen wir nun den Zug von B bis m vor-

rücken, so bekommen wir drei Lasten auf den Träger (Fig. 108 d). Also ist die Querkraft:

$$Q = A = \frac{1}{4{,}00}\,19{,}0\,(3{,}20 + 1{,}70 + 0{,}20) = 24{,}2\ \text{t};$$

bzw. mit Benutzung unserer Tabelle A:

$$Q = A = \frac{1}{4{,}00}\,[85{,}5 + 57\,(3{,}2 - 3{,}0)] = 24{,}2\ \text{t}.$$

Denken wir uns nun den Träger nach Fig. 108e belastet, die Lokomotive also anders gestellt, so haben wir nur zwei Lasten

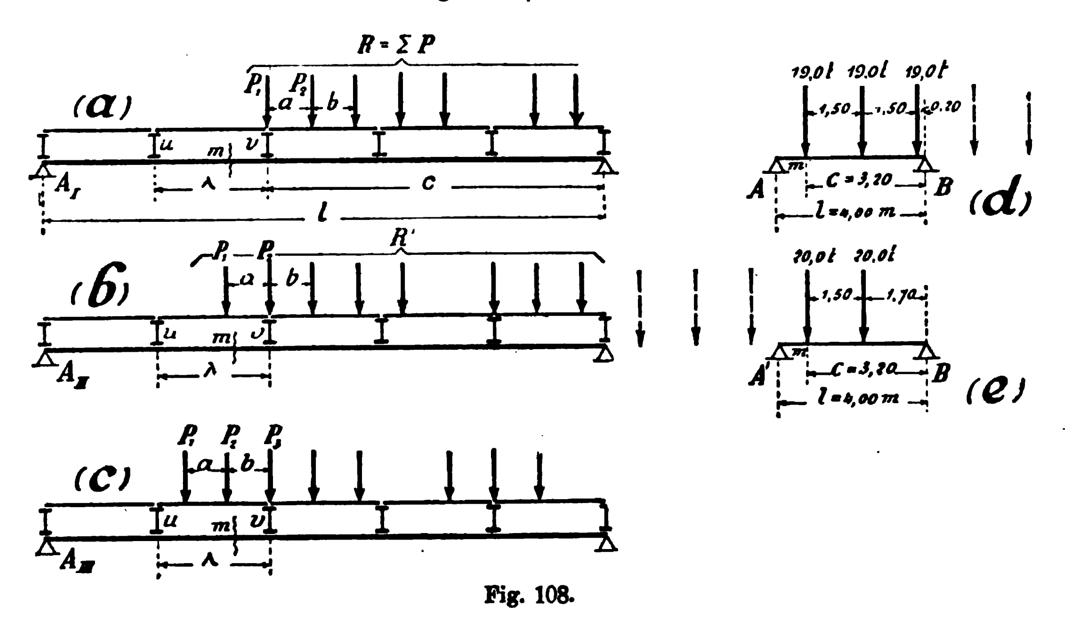


Fig. 108.

auf dem Träger. Bei zwei Lasten müssen aber die Achsen zu 20,0 t gerechnet werden. Folglich ist jetzt die Querkraft:

$$Q' = A' = \frac{1}{4{,}00}\,20{,}0\,(3{,}20 + 1{,}70) = 24{,}5\ \text{t}.$$

Dasselbe Resultat gibt natürlich unsere Tabelle (für $n = 2$ Lasten):

$$Q' = A' = \frac{1}{4{,}00}\,[30 + 40\,(3{,}2 - 1{,}5)] = 24{,}5\ \text{t}.$$

Die zwei Lasten Fig. 108e geben also für die Rechnung eine größere Querkraft als die drei Lasten Fig. 108d. Dies kommt natürlich nur daher, weil bei Einschränkung der Anzahl der Achsen die Drücke derselben willkürlich höher genommen werden. [Außerdem ist zu beachten, daß der Belastungsfall Fig. 108e nur dann

möglich ist, wenn der Querschnitt m nicht zu weit vom Auflager A entfernt ist. Denn sonst würde noch eine dritte Last von links auf den Träger hinaufkommen, und die angenommene Laststellung käme überhaupt nicht in Betracht.]

Die „Vorschriften“ tragen dieser möglichen Erhöhung der Querkraft infolge einer anderen Stellung der Lasten (Fig. 108e und d) Rechnung. Sie bestimmen nämlich, daß bei gewissen Belastungslängen c nicht so viel Lasten aufzubringen sind, wie hinaufgehen können (Fig. 108d), sondern so viel, daß der sich rechnungsmäßig ergebende Wert von Q so groß wie möglich wird (Fig. 108e); entsprechend folgender Tabelle:

Tabelle B: Hilfstabelle für kleine Belastungslängen.

Belastungslänge c (m)	Anzahl der anzunehmenden Achsen n	Zuglänge b (m)	ΣPb (mt)	ΣP (t)
1,50—3,26	2 (zu 20,0 t)	1,50	30	40
3,26—5,10	3 („ 19,0 t)	3,00	85,5	57
5,10—7,15	4 („ 18,0 t)	4,50	162	72

Nach dieser Tabelle ist also die Querkraft zu berechnen, falls der Querschnitt innerhalb 7,15 m vom rechten Auflager liegt. (Auf den Abstand vom linken Auflager wird keine Rücksicht genommen.) Liegt der Querschnitt weiter als 7,15 entfernt, so tritt Tabelle A in Kraft; d. h. dann wird der Zug in der gewöhnlichen Anordnung in Fahrtrichtung von rechts nach links bis zu dem betreffenden Querschnitte angenommen.

Zusatz 2. Tabelle A ist für die Zuganordnung entworfen: Lok.—Tender—Lok.—Tender. In manchen Fällen ergibt aber die Anordnung: (Tender)—Lok.—Lok.—Tender größere Querkräfte. Allerdings nicht mit dem Tender an der Spitze, sondern man muß annehmen, daß der Tender die Brücke bereits verlassen hat, so daß zwei Lokomotiven an der Spitze stehen. In den Brückenbauvorschriften ist dieser Fall aber nicht berücksichtigt. Deshalb kann man diese Untersuchung sparen. Die Unterschiede sind auch ziemlich gering.

IV. Berechnung der Momente.

Die Berechnung der an den einzelnen Punkten infolge der beweglichen Belastung entstehenden größten Momente ist bei Eisenbahnbrücken sehr einfach. In den „Vorschriften“ finden sich nämlich folgende Tabellen angegeben:

Tabelle C: Maximalmomente bei verschiedenen Spannweiten L.

Spannweite L (m)	Maximalmoment M_{max} (mt)	Zuwachs von M_{max} (bei $\Delta L = 1{,}0$ m) (mt)	Spannweite L (m)	Maximal-Moment M_{max} (mt)	Zuwachs von M_{max} (bei $\Delta L = 1{,}0$ m) (mt)	Spannweite L (m)	Maximalmoment M_{max} (mt)	Zuwachs von M_{max} (bei $\Delta L = 1{,}0$ m) (mt)
1,0	**5,00**	5,00	**15**	**243,9**	26,1	**60**	**2900**	81,5
1,2	6,00	5,00	16	270,0	27,8	62	3063	84,5
1,4	7,00	5,00	17	297,8	29,2	64	3232	85,0
1,6	8,00	5,00	18	327,0	32,8	66	3402	86,5
1,8	9,00	5,00	19	359,8	34,2	68	3575	88,0
2,0	**10,00**	5,00	**20**	**394,0**	37,5	**70**	**3751**	88,0
2,2	11,00	5,00	22	469,0	40,8	72	3927	91,0
2,4	12,00	5,80	24	550,5	40,8	74	4109	93,0
2,6	13,16	9,25	26	632,0	48,1	76	4295	94,5
2,8	15,01	9,35	28	728,2	52,1	78	4484	95,0
3,0	**16,88**	9,40	**30**	**832,3**	53,5	**80**	**4674**	97,0
3,2	18,76	9,50	32	939,2	55,4	82	4868	97,5
3,5	21,61	13,8	34	1050	57,5	84	5063	100
4,0	28,50	14,2	36	1165	60,5	86	5263	101
4,5	35,63	14,2	38	1286	65,0	88	5464	103
5,0	**42,75**	14,3	**40**	**1416**	68,0	**90**	**5669**	104
6	57,00	16,4	42	1552	68,5	92	5876	107
7	73,45	20,1	44	1689	71,5	94	6089	107
8	93,50	21,2	46	1832	72,0	96	6303	109
9	114,7	21,2	48	1976	73,5	98	6520	110
10	**135,9**	21,2	**50**	**2123**	75,0	**100**	**6740**	118
11	157,1	21,3	52	2273	75,0	110	7918	126
12	178,4	21,3	54	2423	77,0	120	9176	134
13	199,7	21,3	56	2577	80,0	130	10520	144
14	221,0	22,9	58	2737	81,5	140	11965	155
15	**243,9**		**60**	**2900**		**150**	**13510**	

Tabelle D: Momente an den einzelnen Querschnitten.

Verhältnis $x : L$	Verhältnis $M_x : M_{max}$	Zunahme des Verhältnisses $M_x : M_{max}$ $\left(\text{bei } \Delta \frac{x}{L} = 1\right)$	Verhältnis $x : L$	Verhältnis $M_x : M_{max}$	Zunahme des Verhältnisses $M_x : M_{max}$ $\left(\text{bei } \Delta \frac{x}{L} = 1\right)$	Verhältnis $x : L$	Verhältnis $M_x : M_{max}$	Zunahme des Verhältnisses $M_x : M_{max}$ $\left(\text{bei } \Delta \frac{x}{L} = 1\right)$
0,00	0,0	4,45	0,20	0,703	2,35	0,40	0,992	0,30
0,02	0,089	4,25	0,22	0,750	2,15	0,42	0,998	0,10
0,04	0,174	4,00	0,24	0,793	2,00	0,44	1,0	0
0,06	0,254	3,85	0,26	0,833	1,75	0,46	1,0	
0,08	0,331	3,60	0,28	0,868	1,55	0,48	1,0	
0,10	0,403	3,40	**0,30**	0,899	1,35	0,50	1,0	
0,12	0,471	3,20	0,32	0,926	1,10			
0,14	0,535	3,00	0,34	0,948	0,95			
0,16	0,595	2,80	0,36	0,967	0,70			
0,18	0,651	2,60	0,38	0,981	0,55			
0,20	0,703		**0,40**	0,992				

Erläuterung zu Tabelle C.

In dieser Tabelle bezeichnen die unter „L" aufgeführten Zahlen die Spannweiten der Brücken. Neben jedem Träger ist, unter M_{max}, das größte Biegungsmoment angegeben, das infolge des Eisenbahnzuges entsteht, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Raddrücke direkt auf den Hauptträger einwirken würden. Die Zahlen in der dritten Kolonne bedeuten den auf die Längeneinheit bezogenen Zuwachs, den das Biegungsmoment erfährt, wenn sich die Spannweite vergrößert. Beim Gebrauch der Tabelle ist zu beachten, daß sich die Angaben auf *Achs*lasten beziehen. Bei einer eingleisigen Brücke, bei der also auf jeden Hauptträger nur die *Rad*lasten entfallen, sind die Zahlen durch 2 zu dividieren.

Beispiel 1. Eingleisige Brücke von $L = 16{,}00$ m Spannweite. Wir finden in der Tabelle neben $L = 16{,}00$ m die Zahl 270,0, dividieren diese durch 2 und erhalten $M_{max} = 135$ mt. Dieses ist also das größte Moment, das an dem Träger infolge der beweglichen Belastung entsteht.

Beispiel 2. Es sei $L = 16{,}25$ m. Da $L = 16{,}25$ in der Tabelle nicht aufgeführt ist, schreiben wir dafür $L = 16{,}00 + 0{,}25$. Den Zuwachs von 0,25 m bezeichnen wir mit ΔL. Nun finden wir zunächst für 16,00 das Moment $M_{max} = 270{,}0$. Ferner zeigt die Tabelle, daß, wenn die Spannweite von 16,00 m aus um $\Delta L = 1{,}0$ m zunehmen würde, das Maximalmoment um 27,8 wachsen würde. In unserem Falle nimmt nun die Spannweite um $\Delta L = 0{,}25$ m zu. Folglich wächst das Moment um $0{,}25 \cdot 27{,}8$. Insgesamt haben wir also für eine Spannweite von $L = 16{,}25$ m das größte Moment der eingleisigen Brücke:

$$M_{max} = (270{,}0 + 0{,}25 \cdot 27{,}8)\frac{1}{2} = 138{,}5 \text{ mt.}$$

Beispiel 3. $L = 4{,}8$ m; eingleisig. Es ist

$$M_{max} = (35{,}63 + 0{,}3 \cdot 14{,}2)\frac{1}{2} = 19{,}9 \text{ mt.}$$

Entstanden ist die Tabelle C, indem man eine Anzahl von Spannweiten untersucht und die Resultate zusammengestellt hat.

Erläuterung zu Tabelle D.

Diese Tabelle gibt die Biegungsmomente an den einzelnen Querschnitten eines Trägers, ausgedrückt in Bruchteilen seines Maximalmomentes. Es ist x die Entfernung des betreffenden

Punktes von dem (ihm zunächst liegenden) Auflager; L ist die gesamte Spannweite. M_x ist das größte Biegungsmoment an der betreffenden Stelle, und M_{max}, wie früher, das größte Biegungsmoment, das überhaupt am Balken vorkommt.

Beispiel 1. Für eine eingleisige Brücke von $L = 16{,}00$ m ist das größte Moment M_x in der Entfernung 3,20 m vom Auflager gesucht. Es ist

$$x = 3{,}20 \text{ m}; \quad L = 16{,}00 \text{ m}; \quad \text{folglich } x : L = 0{,}20\,.$$

Hierfür gibt die Tabelle an:

$$M_x : M_{max} = 0{,}703; \quad \text{folglich} \quad M_x = 0{,}703\, M_{max}\,.$$

Das größte Maximalmoment dieser Brücke haben wir soeben mittels Tabelle C bestimmt. Es war

$$M_{max} = 135 \text{ mt.}$$

Somit ergibt sich das größte Moment an der Stelle x:

$$M_x = 0{,}703 \cdot 135 = 94{,}9 \text{ mt.}$$

Beispiel 2. Für eine eingleisige Brücke von $L = 16$ m ist das größte Moment in einem Abstande $x = \frac{1}{9} L = 1{,}777$ m zu bestimmen! Es ist

$$x : L = 1 : 9 = 0{,}111\,.$$

Da $x : L = 0{,}111$ in der Tabelle nicht aufgeführt ist, schreiben wir dafür

$$x : L = 0{,}100 + 0{,}011\,.$$

Den Zuwachs 0,011 gegenüber 0,100 nennen wir $\Delta \frac{x}{L}$. Nun finden wir in der Tabelle zunächst zu $x : L = 0{,}100$ den Wert 0,403. Ferner steht in der dritten Rubrik, daß, wenn $\Delta \frac{x}{L} = 1$ wäre, das Verhältnis $(M_x : M_{max})$ einen Zuwachs von 3,40 erfahren würde. Da in unserem Falle der Zuwachs $\Delta \frac{x}{L} = 0{,}011$ ist, erfährt also das Verhältnis $(M_x : M_{max})$ einen Zuwachs von $0{,}011 \cdot 3{,}40$. Insgesamt gehört also zu dem Verhältnis $x : l = 0{,}111$ ein Verhältnis

$$M_x : M_{max} = 0{,}403 + 0{,}011 \cdot 3{,}40 = 0{,}440\,.$$

Daraus folgt

$$M_x = 0{,}440 \cdot M_{max} = 0{,}440 \cdot 135{,}0 = 59{,}4 \text{ mt.}$$

[M_{max} ist bereits früher bestimmt.]

Beispiel 3. Für eine eingleisige Brücke von $L = 16{,}00$ m ist das größte Moment der Stelle $x = 3{,}554$ m zu bestimmen! Es ist

$$x : L = 3{,}554 : 16{,}00 = 0{,}222 = 0{,}220 + 0{,}002\,,$$

$$M_x : M_{max} = 0{,}750 + 0{,}002 \cdot 2{,}15 = 0{,}754\,,$$

$$M_x = 0{,}754 \cdot M_{max} = 0{,}754 \cdot 135{,}0 = 101{,}8 \text{ mt.}$$

Entstehung von Tabelle D. Wenn man für die verschiedenen Punkte einer Brücke von der Länge L die größten Momente infolge des Eisenbahnzuges in gewöhnlicher Weise ausrechnet und an den betreffenden Stellen graphisch durch Strecken darstellt, so zeigt es sich, daß die Endpunkte dieser Strecken auf einer Kurve liegen, die in der Mitte auf eine Länge von ca. $0{,}12\,L$ gerade ist und dann in Form einer Parabel nach den Auflagerpunkten abfällt (Kurve *abcd* in Fig. 109). Daher ist in den „Vorschriften" bestimmt: Alle Querschnitte, die sich innerhalb einer Strecke befinden, die symmetrisch zur Trägermitte liegt und eine Länge von $0{,}12\,L$ hat, sind für das Maximalmoment M_{max} zu rechnen. Für diese Querschnitte, in einer Entfernung von $x = 0{,}5\,L - 0{,}06\,L = 0{,}44\,L$ an, ist also das Verhältnis $M_x : M_{max}$ gleich **1.**

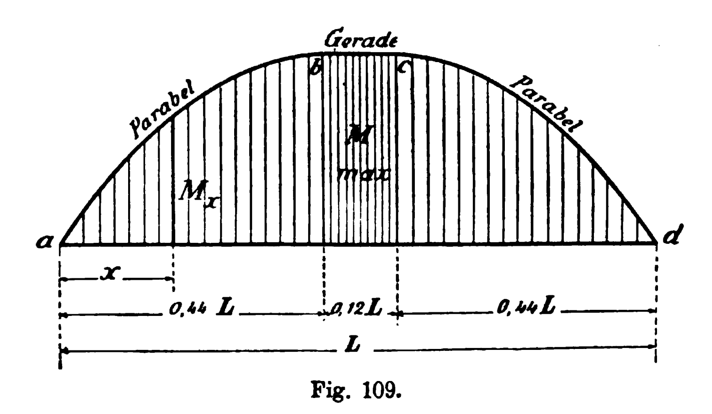


Fig. 109.

Für die übrigen Querschnitte ergibt sich das Verhältnis, indem man die Höhen der Parabel Fig. 109 durch die mittlere Höhe M_{max} und die Horizontalabstände x ausdrückt. Auf diese Weise ergibt sich zu jedem Abstande x eine bestimmte Höhe y der Parabel; d. i. ein bestimmtes Moment M_x (Fig. 109).

V. Zusammenfassung.

1) Auflagerdrücke und Querkräfte. Den Auflagerdruck hatten wir durch die Formel dargestellt:

$$A = \frac{1}{l}\left[\Sigma P b + \Sigma P (c - b)\right].$$

Hierin bedeutet l die Spannweite; $\Sigma P b$ die Summe der statischen Momente aller Lasten in bezug auf die letzte Last; ΣP die Summe aller Lasten; c die Belastungslänge und b die Zuglänge. Die Aus-

rechnung geht in der Reihenfolge vor sich: Zu der angenommenen Laststellung, d. h. der Belastungslänge c, suchen wir in der Tabelle A die nächstniedrigere Zahl, d. i. die Zuglänge b. Neben dieser stehen dann die übrigen Hilfswerte ΣPb und ΣP.

Diese Tabelle A gilt ohne Einschränkung aber nur dann, wenn die Belastungslänge c größer als 7,15 m ist. Bei Belastungslängen c kleiner als 7,15 m kommt es nämlich in manchen Fällen vor, daß man zur Erzielung der größten Auflager- und Querkraft nicht die Belastungslänge voll·bestellen muß, sondern daß man durch einen kürzeren Lastenzug mit erhöhten Achsdrücken eine größere Wirkung erzielt. [Beispielsweise für $c = 3{,}20$ m wäre ein Lastenzug von $b = 3{,}00$ m Länge möglich. Der kürzere Lastenzug von $b = 1{,}50$ m bringt aber eine größere Querkraft hervor. Fig. 108.] Deshalb muß für die kleineren Belastungslängen ($c < 7{,}15$ m) die Hilfstabelle B genommen werden. Für $c > 7{,}15$ gilt Tabelle A.

2) **Momente.** Die Tabelle C liefert für jede Stützweite L das größte vorkommende Moment $M_{\max}$ des Trägers. Letzteres ist für alle Querschnitte, die bis zu $0{,}06\,L$ links und rechts der Mitte liegen, maßgebend. Für die weiter seitlich liegenden Querschnitte ergibt sich das betreffende größte Moment M_x durch Tabelle D, und zwar ausgedrückt in Bruchteilen von $M_{\max}$.

§ 33.

Beispiel zu § 31, 32.

Aufgabe.

Die eingleisige Eisenbahnbrücke Fig. 110 ist für den preußisch-hessischen Lastenzug durchzurechnen!

Spannweite $L = 10 \cdot 4{,}80 = 48{,}00$ m. Höhe $h = 5{,}60$ m.

I. Gurtstäbe.

Zunächst wird das größte Moment des Trägers bestimmt (§ 32, Tabelle C). Da die Brücke eingleisig sein soll, sind die Zahlen der Tabelle durch 2 zu dividieren.

Aus $M_{\max}$ folgen dann mittels Tabelle D die größten Momente M_x an den einzelnen Knotenpunkten. Da die Brücke zehn gleiche Felder hat, ist das Verhältnis des Abstandes x_m eines Knotenpunktes m zu der Spannweite L einfach gleich $m:10$.

Aus den einzelnen Momenten M_x ergeben sich dann die Gurtstäbe.

$L = 48{,}00$ m. $M_{max} = \frac{1}{2}\,1976 = 988$ mt.					
Knotenpunkt	Verhältnis $x : L$	Verhältnis $M_x : M_{max}$	Moment M_x (mt)	Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h} = -\frac{M}{5{,}60}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h} = +\frac{M}{5{,}60}$
1	0,10	0,403	(398)		$U_1,\ U_2 = +\ 71$
2	0,20	0,703	(695)	$O_1,\ O_2 = -124$	
3	0,30	0,899	(888)		$U_3,\ U_4 = +159$
4	0,40	0,992	(980)	$O_3,\ O_4 = -175$	
5	0,50	1,000	988		$U_5 \quad = +176$

Bemerkung. Da bei einem Parallelträger sich die Gurtkräfte zueinander verhalten wie die Momente an den entsprechenden Knotenpunkten, braucht man die Momente M_1, M_2, M_3 und M_4 gar nicht auszurechnen. Man bestimmt vielmehr zunächst $U_5 = \frac{M_5}{h}$ und ermittelt dann die anderen Spannkräfte (O_3, O_4 usw.), indem man U_5 multipliziert mit den in der dritten Kolonne stehenden Verhältniszahlen (0,992 usw.).

II. Füllungsstäbe.

Zur Berechnung der Füllungsstäbe müssen wir für jedes Feld die größte positive und die größte negative Querkraft bestimmen. Um z. B. für Feld *0—1* die größte positive Querkraft zu ermitteln, lassen wir den Zug von B aus zunächst bis *1* vorfahren (Grundstellung), bestimmen die Summe R aller Lasten, die dann auf der Brücke sind, und sehen nach, ob (vgl. § 31, Zusammenfassung)

$$(1) \qquad R < P_1 \frac{l}{\lambda}$$

ist. Trifft dieses zu, so bleibt es bei Grundstellung. Andernfalls muß weiter untersucht werden. Die Summe R ergibt sich nach Tabelle A: Belastungslänge $c = 9 \cdot 4{,}80 = 43{,}20$ m (Fig. 110b); also

Zuglänge $b = 40{,}5$ m (Tabelle A), und $\Sigma P = \frac{287}{2} = 143{,}5$.

Andererseits ist

$$P_1 = \frac{17{,}0}{2}; \qquad \frac{l}{\lambda} = 10\,.$$

Die Gegenüberstellung der Werte R und $P_1 \frac{l}{\lambda}$ liefert also:

$$143{,}5 \ldots 85\,,$$

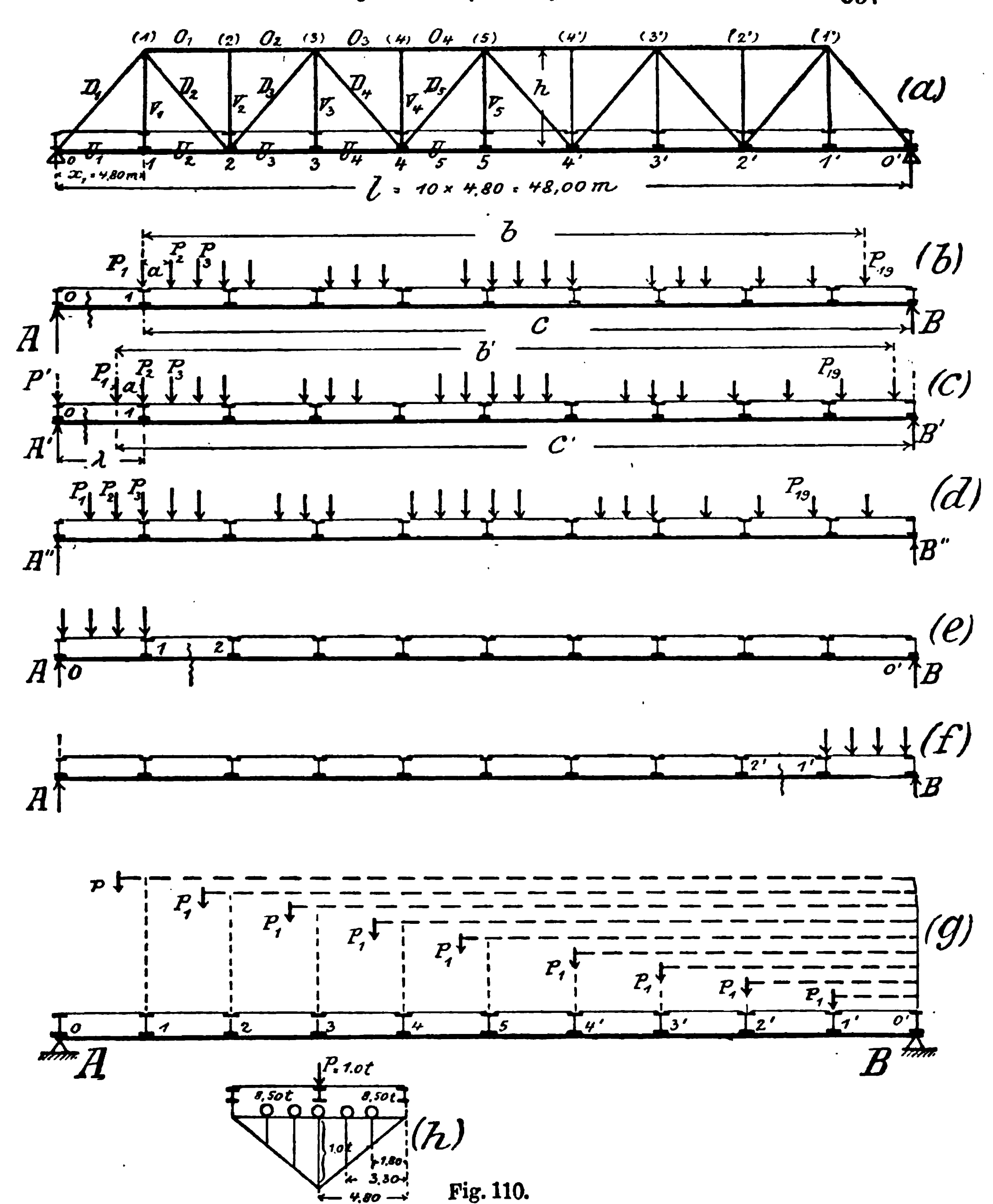


Fig. 110.

d. h. die obige Bedingung ist **nicht** erfüllt. Für das Feld *0—1* ist Grundstellung **nicht** maßgebend.

Also vorgezogene Stellung. Nun untersuchen wir, welche der beiden Bedingungen zutrifft:

$$(2) \quad \begin{cases} R' < (P_1 + P_2)\dfrac{l}{\lambda}, & \text{oder} \\ R' > (P_1 + P_2)\dfrac{l}{\lambda}. \end{cases}$$

Im ersteren Falle ist einmal vorgezogene Stellung (Fig. 110c), im zweiten Falle ist zweimal vorgezogene Stellung maßgebend (Fig. 110d). Als Lastensumme R' ist jetzt die bei einmal vorgezogener Stellung vorhandene Belastung einzuführen. Diese Summe ergibt sich aus der jetzt vorhandenen Belastungslänge c' nach Fig. 110c und Tabelle A:

Belastungslänge bei vorgez. St. $c' = c + 1{,}5 = 43{,}2 + 1{,}5 = 44{,}7$ m,
Zuglänge „ „ „ $b' = 43{,}5$ m,
Summe d. Lasten „ „ „ $R' = 150$.

[Gegenüber der Grundstellung ist also eine Last hinzugekommen.]
Andererseits ist

$$(P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda} = (8{,}5 + 8{,}5)\cdot 10 = 170 \text{ t.}$$

Der Vergleich zeigt, daß

$$R' < (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}$$

ist; d. h. einmal vorgezogene Stellung liefert für das Feld *0—1* die größte positive Querkraft (Fig. 110c). Somit ist über die maßgebende Laststellung entschieden.

In der folgenden Tabelle sind sämtliche Querkräfte zusammengestellt: Zuerst wird über die maßgebende Stellung entschieden, dann der betreffende Auflagerdruck A ausgerechnet (Tabelle A bzw. B) und dann die Querkraft selbst berechnet nach den Formeln:

$$Q = A - P_1\frac{a}{\lambda} \quad \text{(bei vorgezogener Stellung)}$$

bzw. $$Q = A \quad \text{(bei Grundstellung).}$$

Man beachte, daß die Hilfswerte $P_1\dfrac{l}{\lambda}$, $(P_1 + P_2)\dfrac{l}{\lambda}$ und $P_1\dfrac{a}{\lambda}$ nur einmal berechnet zu werden brauchen. Die Werte, die sich auf vorgezogene Stellung beziehen, sind durch einen $'$ hervorgehoben.

Außer der größten positiven muß für jedes Feld noch die größte negative Querkraft bestimmt werden. Für Feld *1—2* z. B. wäre die Stellung Fig. 110e die zu der negativen Querkraft gehörige Grundstellung. Statt aber diese Stellung zu untersuchen, wurden in der Tabelle nur die positiven Querkräfte, diese aber

$P_1 \frac{l}{\lambda} = 8{,}5 \cdot 10 = 85$ t; $(P_1+P_2)\frac{l}{\lambda} = 170$ t					Maßgebende Belastungslänge c	Zuglänge b	$A = \frac{1}{l}[\Sigma P b + \Sigma P(c-b)]$ (t)	$Q' = A' - P_1 \frac{a}{\lambda}$ $= A' - 8{,}0$ bzw. $Q = A$ (t)	$D = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot Q$ [$\sin\varphi = 0{,}76$] (t)
Feld	Belastungslänge c, c'	Summe der Lasten R, R'	Erfüllte Bedingungen	Maßgebende Stellung					
0—1	43,2 44,7	143,5 150,0	$R > P_1 \frac{l}{\lambda}$ $R' < (P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}$	 1 mal vorgez.	44,7	43,5	$A' = \frac{1}{48{,}0}[7844 + 800 \cdot 1{,}2]\frac{1}{2} = 80$	$Q^+_{0-1} = 77$	$D_1 = \begin{matrix} -101 \\ +\ 0 \end{matrix}$
1—2	38,4 39,9	187,0 187,0	$R' < (P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}$	1 mal vorgez.	39,9	37,5	$A' = \frac{1}{48{,}0}[5661 + 274 \cdot 2{,}4]\frac{1}{2} = 66$	$Q^+_{1-2} = 68$	$D_2 = \begin{matrix} +83 \\ -\ 8 \end{matrix}$
2—3	33,6 35,1	124,0 130,5	$R' < (P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}$	1 mal vorgez.	35,1	34,5	$A' = \frac{1}{48{,}0}[4878 + 261 \cdot 0{,}6]\frac{1}{2} = 52$	$Q^+_{2-3} = 49$	$D_3 = \begin{matrix} -64 \\ +\ 8 \end{matrix}$
3—4	28,8 30,3	111,0 117,5	$R' < (P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}$	1 mal vorgez.	30,3	30,0	$A' = \frac{1}{48{,}0}[3781{,}5 + 235 \cdot 0{,}3]\frac{1}{2} = 40$	$Q^+_{3-4} = 37$	$D_4 = \begin{matrix} +49 \\ -14 \end{matrix}$
4—5	24,0 25,5	104,5 104,5	$R' < (P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}$	1 mal vorgez.	25,5	24,0	$A = \frac{1}{48{,}0}[2508 + 209 \cdot 1{,}5]\frac{1}{2} = 29$	$Q^+_{4-5} = 26$	$D_5 = \begin{matrix} -34 \\ +22 \end{matrix}$
5—4'	19,2 —	70,5 —	$R < P_1 \frac{l}{\lambda}$	Grundstellung	19,2	18,0	$A = \frac{1}{48{,}0}[1509 + 141 \cdot 1{,}2]\frac{1}{2} = 17$	$Q^+_{5-4'} = 17$	
4'—3'	14,4 —	62,0 —		Grundstellung	14,4	13,5	$A = \frac{1}{48{,}0}[951 + 124 \cdot 0{,}9]\frac{1}{2} = 11$	$Q^+_{4'-3'} = 11$	
3'—2'	9,6 —	42,5 —		Grundstellung	9,6	6,0	$A = \frac{1}{48{,}0}[255 + 85 \cdot 3{,}6]\frac{1}{2} = 6$	$Q^+_{3'-2'} = 6$	
2'—1'	4,8 —	28,5 —		Grundstellung	4,8	[3,0]	$A = \frac{1}{48{,}0}[85{,}5 + 57 \cdot 1{,}8]\frac{1}{2} = 2$	$Q^+_{2'-1'} = 2$	
1'—0'	0,0 —	0,0 —		Grundstellung			$A = 0$	$Q^+_{1'-0'} = 0$	

für **sämtliche** Felder von *0—0'* berechnet. Denn ist es klar, daß man für Feld *1—2* die größte negative Querkraft erhält, indem man die größte positive Querkraft von Feld *2'—1'* nimmt (Fig. 110e und f); usw.

In Fig. 110g sind die Laststellungen, wie sie sich für die einzelnen Felder als maßgebend herausgestellt haben, eingezeichnet. Dieses Bild wird immer wieder vorkommen: Bei Bestimmung der größten positiven Querkräfte ist für die ersten Felder links die vorgezogene Stellung maßgebend, für die anderen die Grundstellung.

Zusatz: Man kann übrigens ein für allemal bestimmen, von welchem Felde ab vorgezogene Stellung die größere Querkraft ergibt. Wir suchen nämlich in der Tabelle auf, von welchem Felde ab die Summe $R > P_1 \frac{l}{\lambda}$ bzw. $> (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}$ wird. In unserem Falle ist

$$P_1 \frac{l}{\lambda} = 170 \text{ t}; \qquad (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} = 340 \text{ t}.$$

[Für zweigleisige Brücke gerechnet. Soweit es sich nur um die gefährliche Laststellung handelt, gilt für eine zweigleisige Brücke augenscheinlich dasselbe wie für eine eingleisige.] Nun zeigt unsere Tabelle A, daß

ΣP größer als 170 t anfängt bei $b > 21{,}0$ m,

ΣP „ „ 340 t „ „ $b > 52{,}5$ m.

Daraus folgt: Für alle Felder, die näher als 21,0 m an B liegen, ist $\Sigma P < P_1 \frac{l}{\lambda}$; für alle Felder, die weiter als 21,0 m, aber näher als 52,5 m von B entfernt liegen, ist $\Sigma P > P_1 \frac{l}{\lambda}$, aber $< (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda}$. Für die erste Gruppe von Feldern ist also Grundstellung maßgebend, für die zweite Gruppe einmal vorgezogene Stellung.

Auf diese Weise kann man für jede Brücke sofort entscheiden, bis zu welchem Felde Grundstellung maßgebend ist; usw.

Vertikalen. Die Vertikalen sind im vorliegenden System Hilfsvertikalen und werden aus dem Gleichgewicht ihrer Knotenpunkte bestimmt. Hierbei ergibt sich:

$$V_2 = V_4 = 0.$$

Die Spannkräfte in den Vertikalen V_1, V_3 und V_5 sind gleich dem Auflagerdruck eines Querträgers. Die Einflußlinie für eine Vertikale wurde in Fig. 110h gezeichnet: Steht eine Last $P = 1{,}0$ t direkt an der Vertikalen, so wird $V = +1{,}0$ t. Geht die Last

nach den seitlichen Querträgern oder darüber hinaus, so wird $V = 0$. Durch Verbindung der Endpunkte der Ordinaten ergibt sich hieraus die gesamte Einflußlinie (Fig. 110h). Aus der Form derselben folgt, daß die in Fig. 110h angenommene Laststellung die größte Spannkraft hervorbringen wird, und zwar wird

$$V_1 = V_3 = V_5 = 8{,}50 + 8{,}50 \cdot \frac{1{,}8 + 3{,}3}{4{,}80} \cdot 2$$
$$= 26{,}5 \text{ t}.$$

Hiermit sind sämtliche Spannkräfte der vorliegenden Eisenbahnbrücke infolge beweglicher Last ermittelt.

§ 34.

Träger mit gekrümmter Gurtung bei gleichmäßig verteilter Last.

I. Gurtstäbe.

Die Gurtstäbe werden wieder aus den Knotenpunktsmomenten berechnet. Maßgebende Stellung: **Vollbelastung.** Es ist allgemein:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M}{r} = -\dfrac{M}{h \cdot \cos\beta}\,, \\[2ex] U = +\dfrac{M}{r} = +\dfrac{M}{h \cdot \cos\gamma}\,, \end{cases}$$

worin r das Lot vom Bezugspunkte auf den Gurtstab, h die Trägerhöhe an der Stelle des Bezugspunktes und β bzw. γ der Neigungswinkel des betreffenden Stabes ist.

Für den vorliegenden Fall einer gleichmäßig verteilten Last gehen die Formeln über in (Fig. 111a):

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{p}{2}\,\dfrac{x(l-x)}{h\cos\beta}\,, \\[2ex] U = +\dfrac{p}{2}\,\dfrac{x(l-x)}{h\cos\gamma}\,. \end{cases}$$

Hierin ist x bekanntlich der Abstand des zu dem betreffenden Stabe gehörigen Bezugspunktes vom linken Auflager; $(l - x)$ also der entsprechende Abstand vom rechten Auflager.

Besteht die Spannweite l aus n gleichen Feldern, so setzen wir noch für l und x ihre Werte ein:

$$l = n\lambda\,; \qquad x = m\lambda\,; \qquad l - x = (n - m)\lambda\,,$$

und erhalten:

$$\text{(Ib)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{p\lambda^2}{2}\,\dfrac{m(n-m)}{h\cos\beta}\,, \\[2ex] U = +\dfrac{p\lambda^2}{2}\,\dfrac{m(n-m)}{h\cos\gamma}\,. \end{cases}$$

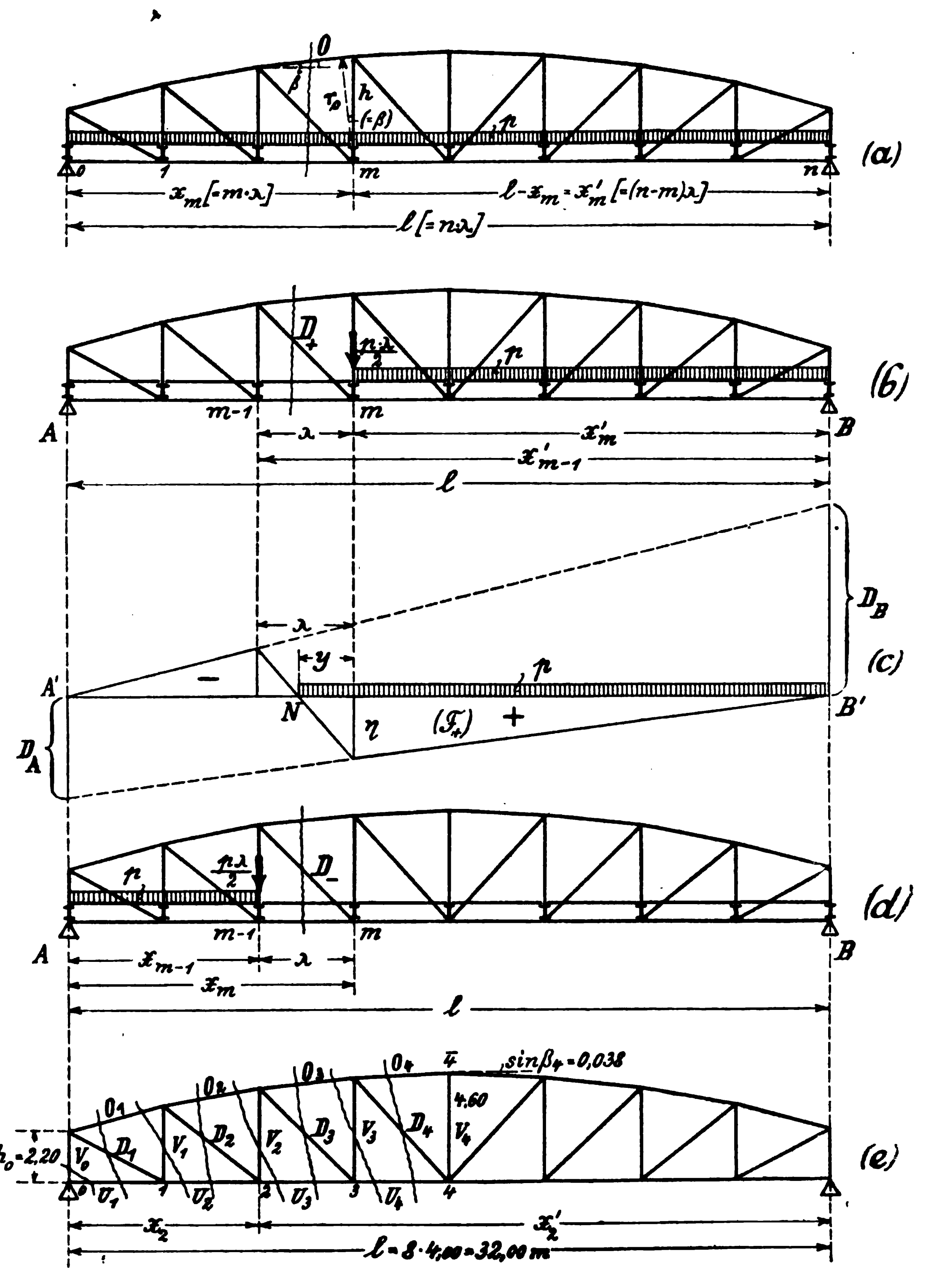


Fig. 111.

II. Füllungsstäbe (Annäherungsmethode).

1. Bezugspunkt „innerhalb".

Wenn der Bezugspunkt des betreffenden Füllungsstabes innerhalb der Spannweite liegt, bietet die Berechnung für eine bewegliche Last p keine Schwierigkeiten. Denn für diesen Fall ist die gefährliche Laststellung sofort vorgeschrieben, nämlich Vollbelastung (§ 28_{II}). Wir dehnen also die bewegliche Last p über den ganzen Träger aus und wenden dann die Formeln an, die wir auch sonst zur analytischen Ermittlung von D und V benutzen $\left[D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{l_u}\right)\right.$, usw. § 7a, 7b$\left.\right]$.

2. Bezugspunkt „außerhalb".

Eine besondere Untersuchung bedarf der Fall, daß der Bezugspunkt des betreffenden Füllungsstabes außerhalb der Spannweite liegt. Dann ist bekanntlich Teilbelastung maßgebend; es müssen also die positive und die negative Laststellung getrennt untersucht werden. Hierzu wollen wir vorübergehend die Einflußlinie zu Rate ziehen.

Aus der zu dem Stabe D von Fig. 111b skizzierten Einflußlinie (Fig. 111c) ist folgendes ersichtlich: Um z. B. den größten Zug des Stabes D zu erhalten, muß die Belastung von rechts aus bis zum Nullpunkt N in das Feld hineingerückt sein. Zur genauen Berechnung von D muß man also die Lage der Lastscheide N feststellen, dann zwischen B und N belasten und nun für diese Laststellung D ermitteln.

Dieses genaue Verfahren ist etwas umständlich (s. § 35a). Wir wollen deshalb zunächst ein Annäherungverfahren ableiten: Statt von B bis N zu belasten, belasten wir nur von B bis Knotenpunkt m; fügen aber — da ja ein Teil der Last p fortgelassen ist — an der Spitze der verteilten Last eine besondere Einzellast von der Größe $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ willkürlich zu (Fig. 111b). [Statt der vorgezogenen Stellung Fig. 111c begnügt man sich also mit der Grundstellung Fig. 111b, nimmt aber zum Ausgleich eine kleine Einzellast hinzu.]

Diese Abänderung hat folgende Vorteile: Erstens braucht man nicht die Lage der Lastscheide N zu bestimmen, zweitens läßt sich jetzt die Diagonalkraft D direkt durch den Auflagerdruck A ausdrücken. Denn bei der abgeänderten Stellung (Grundstellung)

haben wir links vom Schnitte als äußere Kraft nur den Auflagerdruck A. Man braucht also nur A zu berechnen, stellt hieraus die Momente M auf und findet die Spannkraft D. Noch übersichtlicher wird die Berechnung, wenn man zunächst $A = 1{,}0$ t annimmt und hierfür die im Stabe D entstehende Spannkraft bestimmt (D_A). Dann erscheint die wirkliche Spannkraft D in der Form:

$$\text{(II)} \qquad D = A \cdot D_A .$$

(Wirklicher Auflagerdruck A mal derjenigen Spannkraft, die bei A gleich einer t entstehen würde.) Führt man jetzt für A seinen Wert ein (Fig. 111b):

$$A = \frac{1}{l}\left(p\, x'_m \cdot \frac{x'_m}{2} + \frac{p\,\lambda}{2} \cdot x'_m\right)$$

$$= \frac{p}{2\,l}\, x'_m\, (x'_m + \lambda)$$

$$\text{(III)} \qquad A = \frac{p}{2\,l}\, x'_m \cdot x'_{m-1} ,$$

so erhält man für D die übersichtliche Formel:

$$\text{(IV)} \qquad D = \frac{p}{2\,l}\, x'_m \cdot x'_{m-1} \cdot D_A .$$

Entsprechend ist der Fall zu behandeln, daß die Belastung links vom Schnitte steht (Fig. 111d). Diese Laststellung liefert (angenähert) den größten Druck im Stabe D:

$$\text{(IIa)} \qquad D = B \cdot D_B$$

$$\text{(IVa)} \qquad = \frac{p}{2\,l}\, x_{m-1} \cdot x_m \cdot D_B .$$

Allgemein hat man also folgendes systematisches Verfahren zur Ermittlung sämtlicher D und V: Zunächst bestimmt man die Spannkräfte, die in den Stäben D und V infolge $A = 1{,}0$ t und $B = 1{,}0$ t entstehen würden (indem man z. B. einen Kräfteplan für $A = 1{,}0$ t, bzw. $B = 1{,}0$ t durchzeichnet). Mit diesen Hilfswerten ergeben sich dann der Reihe nach die wirklichen Spannkräfte, indem man die Werte D_A, D_B usw. mit den wirklichen Auflagerdrücken A, bzw. B multipliziert.

$$\left(A = \frac{p}{2\,l}\, x'_m\, x'_{m-1}\,; \quad B = \frac{p}{2\,l}\, x_{m-1}\, x_m\right).$$

III. Zusammenfassung.

Gurtstäbe.

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} O = -\dfrac{M}{r} = -\dfrac{M}{h\cos\beta} = -\dfrac{p}{2}\dfrac{x\cdot x'}{h\cos\beta} \\ U = +\dfrac{M}{r} = +\dfrac{M}{h\cos\gamma} = +\dfrac{p}{2}\dfrac{x\cdot x'}{h\cos\gamma} \end{cases}$$

Bei gleichen Feldweiten:

$$\text{(Va)}\quad \begin{cases} O = -\dfrac{p\,\lambda^2}{2}\dfrac{m\,(n-m)}{h\cos\beta} \\ U = +\dfrac{p\,\lambda^2}{2}\dfrac{m\,(n-m)}{h\cos\gamma} \end{cases}$$

Füllungsstäbe (für Bezugspunkt außerhalb). Zunächst für sämtliche Füllungsstäbe die Hilfswerte $D_A(V_A)$ und $D_B(V_B)$ zusammenstellen. Dann gelten für einen Stab $D(V)$, der zu einem Felde $(m-1)-m$ gehört (Fig. 111b und d), die Formeln:

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} D = \dfrac{p}{2l}\cdot x'_m\cdot x'_{m-1}\cdot D_A & \text{[bei rechtsseit. Belast.],} \\ D = \dfrac{p}{2l}\cdot x_{m-1}\cdot x_m\cdot D_B & \text{[„ linksseit. „].} \\ V = \dfrac{p}{2l}\cdot x'_m\cdot x'_{m-1}\cdot V_A & \text{[bei rechtsseit. Belast.],} \\ V = \dfrac{p}{2l}\cdot x_{m-1}\cdot x_m\cdot V_B & \text{[„ linksseit. „].} \end{cases}$$

(Die Vorzeichen der D und V folgen aus den Vorzeichen der Hilfswerte D_A usw.)

Um in den obigen Formeln für D und V die richtigen Abstände x'_m usw. zu nehmen, lege man zu dem betreffenden Stabe den Schnitt und beachte, in welchem Felde dieser Schnitt die die Lasten tragende Gurtung durchbricht (Fig. 111e). Von diesem Felde sind dann die Abstände zu nehmen. Und zwar bedeuten: x'_m und x'_{m-1} die Abstände der beiden Feld-Knotenpunkte nach rechts hin, x_{m-1} und x_m die Abstände nach links hin.

Bei gleichen Feldern wird man die Längen l, x'_m usw. noch durch die Feldweite λ ausdrücken und entsprechend kürzen.

Zusatz 1. Bei der Aufstellung der Formeln für die Füllungsstäbe ist augenscheinlich derselbe Gedankengang eingeschlagen wie bei der Entwicklung der Einflußlinien (§ 25, zweite Methode). In der Tat kann man obige Formel IV für die Diagonale D auch direkt aus der Einflußlinie Fig. 111c ableiten ($D = p \cdot F$); nur muß man — hierin besteht eben die Annäherung der Methode — statt der Länge y die Länge λ nehmen. Aus diesem Vergleich sieht man auch, daß die Annäherungsmethode zugunsten der Sicherheit rechnet.

Zusatz 2. Wie bereits am Anfange gesagt, bezieht sich die Methode nur auf Füllungsstäbe mit Bezugspunkt „außerhalb". Die Lage des Bezugspunktes erkennt man am einfachsten natürlich aus der Systemfigur. Es sei aber als weiteres Kennzeichen auch daran erinnert, daß bei Bezugspunkt außerhalb die Hilfswerte D_A und D_B (V_A und V_B) verschiedene Vorzeichen haben (§ 28 II).

§ 35.

Beispiel zu § 34.

Aufgabe.

Der Halbparabelträger Fig. 111e ist für eine bewegliche gleichmäßig verteilte Last von $p = 2{,}0$ t/m zu berechnen!

Spannweite $l = 8 \cdot \lambda = 32{,}00$ m; Feldweite $\lambda = 4{,}00$ m.
Endvertikale $h_0 = 2{,}20$ m; Stich der Parabel $f = 2{,}40$ m;
(Mittelvertikale 4,60 m).

Die Berechnung ist in den folgenden Tabellen durchgeführt:

Geometrische Angaben. Zunächst sind die Parabelordinaten y berechnet. Hieraus ergeben sich die Trägerhöhen $h = (h_0 + y)$ und schließlich die Neigungswinkel β und φ.

Gurtstäbe. Dann sind die Gurtstäbe berechnet, wobei natürlich die für gleiche Feldweiten entwickelten Formeln benutzt sind.

Füllungsstäbe. Bei den Füllungsstäben sind zunächst die Hilfswerte D_A usw. entwickelt. Hierbei beachte man, daß das Moment infolge $A = 1{,}0$ t für einen Knotenpunkt m beträgt: $M = +1{,}0 \cdot x_m = +x_m$; entsprechend infolge $B = 1{,}0$ t: $M = +1{,}0 \cdot x'_m = +x'_m$. Schließlich sind auf Grund dieser Hilfswerte die wirklichen Spannkräfte D und V berechnet. Bei diesen Formeln muß man sorgfältig darauf achten, zu welchem Felde der betreffende Stab gehört, um keine Fehler hinsichtlich der einzusetzenden Abstände x'_m usw. zu machen (Fig. 111e). Da wir gleiche Feldreihen λ haben, sind die vorkommenden Längen l usw. als Vielfache von λ eingeführt und

dann entsprechend gekürzt, wodurch sich sehr bequeme Ausrechnungen ergeben. (Auch bei der Tabelle D_A usw. hätte man λ vor die Klammer ziehen können.)

Ausnahme: Die Vertikale V_4 ist eine Zwischenvertikale und wird direkt aus dem Gleichgewicht ihres oberen Knotenpunktes bestimmt (O_4 zunächst als Zug angenommen):

$$V_4 = -2 \cdot O_4 \cdot \sin\beta_4 .$$

Der Stab V_4 ist also direkt proportional dem Stabe O_4 und erhält, wie dieser, seinen Größtwert bei Vollbelastung.

Geometrische Angaben.

Spannweite $L = 32{,}00$ m. Feldweite $\lambda = 4{,}00$ m. Felderzahl $n = 8$.					
Knotenpunkt m	Parabelordinaten y $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 2{,}40}{(8\lambda)^2} x(l-x)$ $= 0{,}15 \text{ m } (8-m)$	Trägerhöhen h	Neigungswinkel		
			Obergurt	Diagonalen	
0	$y_0 =$ 0,00	$h_0 = 2{,}20$			
1	$y_1 = 0{,}15 \cdot 1 \cdot 7 = 1{,}05$	$h_1 = 3{,}25$	$\cos\beta_1 = 0{,}967$	$\cos\varphi_1 = 0{,}876$	$\sin\varphi_1 = 0{,}452$
2	$y_2 = 0{,}15 \cdot 2 \cdot 6 = 1{,}80$	$h_2 = 4{,}00$	$\cos\beta_2 = 0{,}983$	$\cos\varphi_2 = 0{,}775$	$\sin\varphi_2 = 0{,}632$
3	$y_3 = 0{,}15 \cdot 3 \cdot 5 = 2{,}25$	$h_3 = 4{,}45$	$\cos\beta_3 = 0{,}994$	$\cos\varphi_3 = 0{,}707$	$\sin\varphi_3 = 0{,}707$
4	$y_4(=0{,}15 \cdot 4 \cdot 4) = 2{,}40$	$h_4 = 4{,}60$	$\cos\beta_4 = 0{,}999$	$\cos\varphi_4 = 0{,}669$	$\sin\varphi_4 = 0{,}743$

1. Gurtstäbe.

Trägerhöhen h (m)	Neigungswinkel [$\gamma = 0^\circ$ $\cos\gamma = 1{,}0$]	Obergurt (t) $O = -\frac{p\lambda^2}{2} \frac{m(n-m)}{h \cdot \cos\beta}$ $= -16{,}0 \frac{m(8-m)}{h \cdot \cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{p\lambda^2}{2} \frac{m(n-m)}{h \cdot \cos\gamma}$ $= +16{,}0 \frac{m(8-m)}{h \cdot 1{,}0}$
$h_0 = 2{,}20$			$U_1 =$ 0,0
$h_1 = 3{,}25$	$\cos\beta_1 = 0{,}967$	$O_1 = -16{,}0 \frac{1 \cdot 7}{3{,}25 \cdot 0{,}967} = -35{,}7$	$U_2 = +16{,}0 \frac{1 \cdot 7}{3{,}25} = +34{,}5$
$h_2 = 4{,}00$	$\cos\beta_2 = 0{,}983$	$O_2 = -16{,}0 \frac{2 \cdot 6}{4{,}00 \cdot 0{,}983} = -48{,}8$	$U_3 = +16{,}0 \frac{2 \cdot 6}{4{,}00} = +48{,}0$
$h_3 = 4{,}45$	$\cos\beta_3 = 0{,}994$	$O_3 = -16{,}0 \frac{3 \cdot 5}{4{,}45 \cdot 0{,}994} = -54{,}2$	$U_4 = +16{,}0 \frac{3 \cdot 5}{4{,}45} = +53{,}9$
$h_4 = 4{,}60$	$\cos\beta_4 = 0{,}999$	$O_4 = -16{,}0 \frac{4 \cdot 4}{4{,}60 \cdot 0{,}999} = -55{,}8$	

2. Füllungsstäbe.

a) Hilfswerte D_A, V_A und D_B, V_B.

Stab	$D_A = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$ $V_A = -D_A \cdot \sin\varphi$	$D_B = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$ $V_B = -D_B \cdot \sin\varphi$
D_1	$\frac{1}{0,876}\left(\frac{4,00}{3,25} - \frac{0,00}{2,20}\right) = +1,41$	$\frac{1}{0,876}\left(\frac{28,00}{3,25} - \frac{32,00}{2,20}\right) = -6,76$
D_2	$\frac{1}{0,775}\left(\frac{8,00}{4,00} - \frac{4,00}{3,25}\right) = +0,99$	$\frac{1}{0,775}\left(\frac{24,00}{4,00} - \frac{28,00}{3,25}\right) = -3,37$
D_3	$\frac{1}{0,707}\left(\frac{12,00}{4,45} - \frac{8,00}{4,00}\right) = +0,99$	$\frac{1}{0,707}\left(\frac{20,00}{4,45} - \frac{24,00}{4,00}\right) = -2,18$
D_4	$\frac{1}{0,669}\left(\frac{16,00}{4,60} - \frac{12,00}{4,45}\right) = +1,17$	$\frac{1}{0,669}\left(\frac{16,00}{4,60} - \frac{20,00}{4,45}\right) = -1,52$
V_0	$V_0 = -1,00$	–
V_1	$-1,41 \cdot 0,482 = -0,68$	$+6,76 \cdot 0,482 = +3,26$
V_2	$-0,99 \cdot 0,632 = -0,63$	$+3,37 \cdot 0,632 = +2,13$
V_3	$= 0,99 \cdot 0,707 = -0,70$	$+2,18 \cdot 0,707 = +1,51$

b) Größte Stabkräfte (in t).

Stab	Belastung rechts: $S = \frac{p}{2l} \cdot x'_m \cdot x'_{m-1} \cdot S_A$	Belastung links: $S = \frac{p}{2l} \cdot x_{m-1} \cdot x_m \cdot S_B$
D_1	$\frac{2,0}{2 \cdot 8\lambda} \cdot 7\lambda \cdot 8\lambda \cdot (+1,41) = +39,4$	$\frac{2,0}{2 \cdot 8\lambda} \cdot 0 = 0$
D_2	$\frac{2,0 \cdot \lambda}{2 \cdot 8} \cdot 6 \cdot 7 \cdot (+0,99) = +20,8$	$0,5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3,37) = -3,4$
D_3	$0,5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (+0,99) = +14,9$	$0,5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-2,13) = -6,4$
D_4	$0,5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (+1,17) = +11,7$	$0,5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1,52) = -9,1$
V_0	$0,5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (-1,00) = -28,0$	$0,5 \cdot 0 = 0$
V_1	$0,5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (-0,68) = -14,3$	$0,5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (+3,26) = +3,3$
V_2	$0,5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-0,63) = -9,8$	$0,5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (+2,13) = +6,4$
V_3	$0,5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-0,70) = -7,0$	$0,5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (+1,51) = +9,1$
Vertikale V_4 (Zwischenvertikale): $V_4 = -2\,O_4 \sin\beta_4 = -2 \cdot (-55,8) \cdot 0,088 = +4,3$ t.		

Übungsaufgabe: Berechne den Träger für $l = 10\,\lambda = 10 \cdot 3,50 = 35,00$ m; Endvertikale 2,50 m; Mittelvertikale 5,00 m; $p = 3,0$ t/m.

§ 35a.

Ergänzungen zu § 34 und § 35.

I. Genaue Formel für die Füllungsstäbe.

Die vorhin benutzte Methode zur Berechnung der D und V war insofern eine Annäherung, als wir mit einer vereinfachten Laststellung (Grundstellung) gearbeitet haben (vgl. Fig. 111c und b). Zur **genauen** Ermittlung der Spannkräfte müssen wir natürlich die richtige gefährliche Laststellung zugrunde legen; d. h. wir müssen zunächst die Lage der Lastscheide N berechnen, dann die Lasten bis zur Lastscheide aufstellen und hierauf die Spannkraft bestimmen.

1. Analytische Bestimmung der Lastscheide N.

Um für die Diagonale D des Trägers Fig. 111'a die Lage des Punktes N zu finden, betrachten wir den Teil seitlich vom Schnitte. An diesem Teile mögen zunächst zwei Hilfswerte bestimmt werden: Erstens die Spannkraft, die im Stabe D infolge eines angenommenen Auflagerdruckes $A = 1{,}0$ t entstehen würde (Fig. 111'c); zweitens die Spannkraft, die im Stabe D infolge einer im Punkte $(m-1)$ angenommenen Last $P' = 1{,}0$ t entstehen würde (Fig. 111'd). Den ersteren Hilfswert D_A haben wir ja auch bereits vorhin benutzt. Man bestimmt ihn analytisch oder indem man von A aus einen Kräfteplan bis zum Stabe D zeichnet. Den zweiten Hilfswert $D_{P'}$ kann man ebenfalls analytisch bestimmen, oder auch nach *Culmann*, oder mittels Kräfteplan. (Bei letzterem werden dann alle Spannkräfte links von P' zu Null, so daß man sofort zu D gelangt.) Dieser Hilfswert $D_{P'}$ ist übrigens dasselbe, was wir bei der vereinfachten Darstellung der Einflußlinien mit D_1'' bezeichnet haben; § 28a, Fig. 92'e.

Jetzt möge in dem zur Diagonale D gehörigen Felde an einer Stelle y eine Last P stehen (Fig. 111'a). Dann haben wir am linken Auflager nicht den Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t, sondern:

$$A = \frac{P \cdot (x_m' + y)}{l} \text{ (tonnen)}.$$

Und am Knotenpunkte $(m-1)$ haben wir nicht eine Last $P' = 1{,}0$ t, sondern es wird dorthin durch den Längsträger übertragen:

$$P' = \frac{P \cdot y}{\lambda} \text{ (tonnen)}.$$

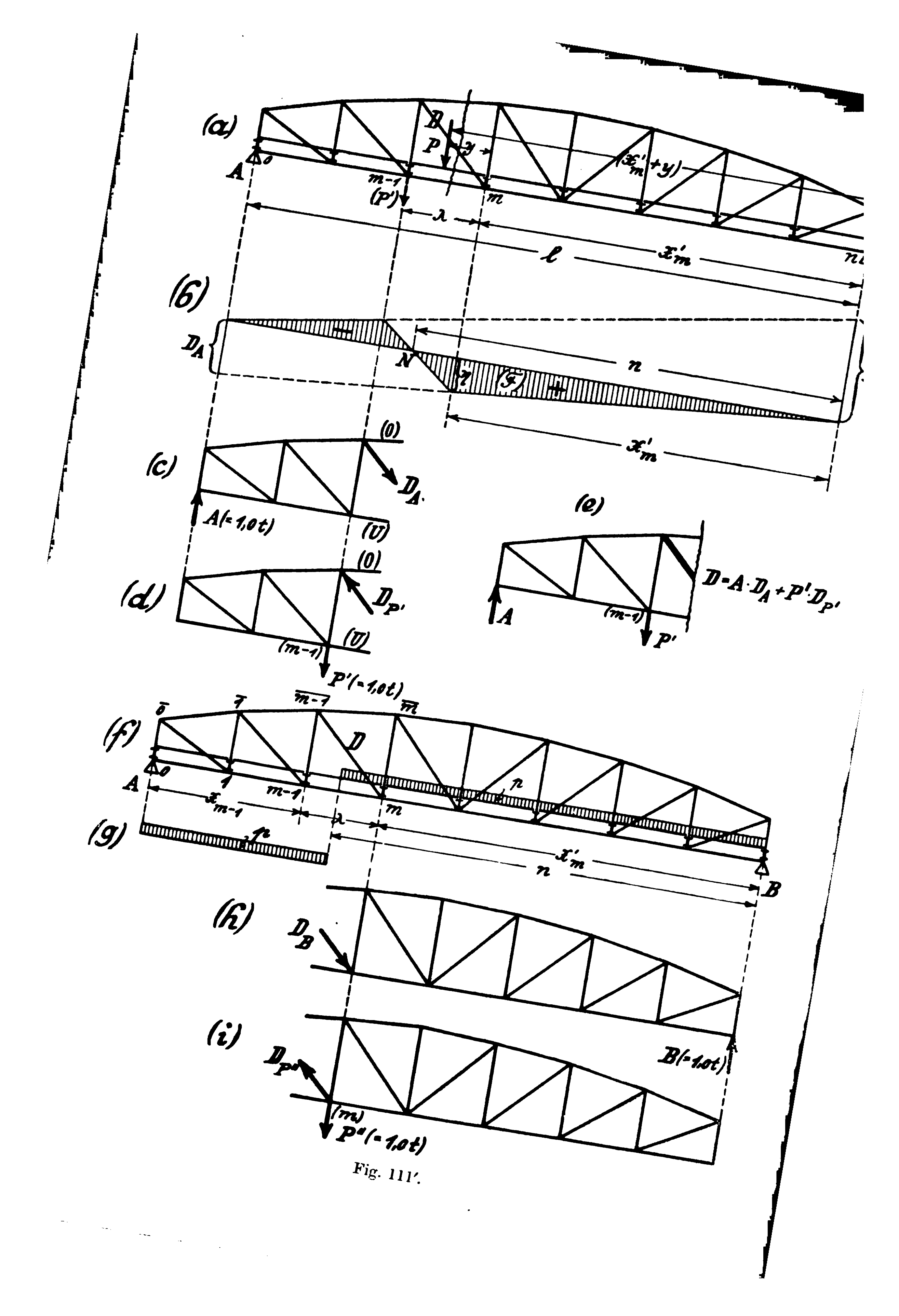

(a)
A
P
$m-1$
(P')
m
λ
l
x'_m
(x'_m+y)
(b)
D_A
N
n
x'_m
(c)
$A(=1{,}0\,t)$
D_A
(O)
(U)
(d)
$D_{P'}$
$(m-1)$
$P'(=1{,}0\,t)$
(e)
$D=A\cdot D_A+P'\cdot D_{P'}$
A
$(m-1)$
P'
(f)
D
A
x_{m-1}
$m-1$
m
p
(g)
B
(h)
D_B
(i)
$D_{P''}$
(m)
$P''(=1{,}0\,t)$
$B(=1{,}0\,t)$

Fig. 111′.

Und schließlich haben wir im Stabe D von A herrührend nicht D_A, sondern $A \cdot D_A$, und von P' herrührend nicht D_P, sondern $P' \cdot D_{P'}$; von **beiden** Kräften herrührend also (Fig. 111′e):

$$D = A \cdot D_A + P' \cdot D_{P'}$$

$$\text{(I)} \qquad D = P \frac{(x'_m + y)}{l} \cdot D_A + P \frac{y}{\lambda} \cdot D_{P'}$$

Dieses ist also die Spannkraft, die die Last P in Fig. 111′a im Stabe D hervorruft; ausgedrückt durch die Stellung der Last (Abstand y) und durch die beiden Hilfswerte D_A und $D_{P'}$.

Hinsichtlich der Vorzeichen ist noch folgendes zu bemerken: Bei der Ausrechnung von D_A und $D_{P'}$ werden wir sehen, daß diese beiden Hilfswerte verschiedene Vorzeichen haben. Bestimmt man z. B. in Fig. 111′c und d die Spannkräfte D_A und $D_{P'}$ nach Ritter — indem man den Bezugspunkt von D als Schnittpunkt von O und U konstruiert —, so ergibt sich D_A als Zug, $D_{P'}$ als Druck. In der obigen Summe (I) ist also das zweite Glied negativ. Wir schreiben aber D zunächst als die Summe der beiden Wirkungen A und P' und setzen dann später die richtigen Vorzeichen ein.

Mit Hilfe der obigen Formel (I) läßt sich nun rechnerisch untersuchen: An welcher Stelle muß die Last P stehen, damit die Diagonalkraft D gleich „Null“ herauskommt? Wir setzen den Ausdruck für D gleich Null und lösen die hierdurch erhaltene Gleichung nach y auf. Dann ergibt sich:

$$\text{(Ia)} \qquad P \cdot \frac{x'_m + y}{l} \cdot D_A + P \cdot \frac{y}{\lambda} \cdot D_{P'} = 0$$

$$\frac{x'_m + y}{l} \cdot D_A + \frac{y}{\lambda} \cdot D_{P'} = 0$$

$$\frac{x'_m}{l} \cdot D_A + \frac{y}{l} \cdot D_A + \frac{y}{\lambda} \cdot D_{P'} = 0$$

$$y\left(\frac{D_A}{l} + \frac{D_{P'}}{\lambda}\right) = -x'_m \frac{D_A}{l}$$

$$y \cdot \frac{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}{l \cdot \lambda} = -x'_m \frac{D_A}{l}$$

$$y = x'_m \frac{-D_A \cdot \lambda}{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}$$

In diesem Abstande y vom Punkte m muß also eine Last P aufgestellt sein, damit die Diagonalkraft D gerade den Wert „Null“ hat; d. h. in diesem Abstande y befindet sich der zum Stabe D gehörige Nullpunkt N (Fig. 111′b).

Somit ist die Lage der Lastscheide N unter Benutzung von D_A und $D_{P'}$ rechnerisch bestimmt. Für das Folgende wollen wir auch noch den Abstand $n = (x'_m + y)$ der Lastscheide N vom rechten Auflager anschreiben:

$$n = x'_m + y = x'_m + x'_m \frac{-D_A \cdot \lambda}{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}$$

$$= x'_m \left(1 + \frac{-D_A \cdot \lambda}{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}\right)$$

$$= x'_m \frac{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l - D_A \cdot \lambda}{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}$$

$$\text{(III)} \qquad n = x'_m \frac{D_{P'} \cdot l}{D_A \cdot \lambda + D_{P'} \cdot l}.$$

2. Ausrechnung der größten Spannkraft D.

Nachdem jetzt die Länge der Belastungsstrecke bestimmt ist, bietet die weitere Ausrechnung von D keine Schwierigkeiten (Fig. 111′f): Wir stellen die Last p auf die Länge n auf, berechnen den Auflagerdruck A, der bei dieser Laststellung am linken Auflager entsteht; ferner die Last P', die bei dieser Laststellung durch den Längsträger nach dem Punkte $(m-1)$ übertragen wird, und setzen diese Werte A und P' in die Formel $D = A \cdot D_A + P' \cdot D_{P'}$ ein. (Denn diese Formel gilt stets, sobald links vom Schnitte ein Auflagerdruck A und eine Last P' wirken.)

Dieser Rechnungsgang, der ja der naheliegendste ist, führt aber zu etwas langwierigen mathematischen Umformungen. Schneller kommen wir zu einer brauchbaren Schlußformel, wenn wir außerdem noch die Einflußlinie für D betrachten. Dann ergibt sich D als das Produkt: Belastung $p \times$ Inhalt der darunterliegenden Einflußfläche; also (Fig. 111′f und b):

$$D = p \cdot F = p \cdot \tfrac{1}{2} n \cdot \eta.$$

Hierin wird für n der vorhin gefundene Wert (III) eingesetzt:

$$n = x'_m \frac{D_{P'} \cdot l}{(D_{P'} \cdot l + D_A \cdot \lambda)};$$

ferner kann η durch D_A ausgedrückt werden (Fig. 111′b):

$$\eta = D_A \cdot \frac{x'_m}{l};$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$D = p \cdot \tfrac{1}{2} x'_m \frac{D_{P'} \cdot l}{(D_{P'} \cdot l + D_A \cdot \lambda)} \cdot \frac{D_A \cdot x'_m}{l}$$

$$= \frac{p}{2} \frac{x'^2_m \cdot D_{P'}}{(D_{P'} \cdot l + D_A \cdot \lambda)} \cdot D_A$$

(IV) $$\boxed{D = \frac{p}{2} \frac{x'^2_m}{\left(l + \lambda \frac{D_A}{D_{P'}}\right)} \cdot D_A}$$ (bei rechtsseitiger ungünstigster Laststellung).

Hiermit haben wir die Spannkraft der Diagonalen D unter genauer Innehaltung der gefährlichen Laststellung bestimmt.

8. Weiterführung der Formeln.

In derselben Weise wird der Fall untersucht, daß die Belastung in der linksseitigen ungünstigsten Stellung steht (Fig. 111′g). Dann brauchen wir die beiden Hilfswerte:

D_B = Spannkraft in D infolge $B = 1{,}0$ t (Fig. 111′h),
$D_{P''}$ = „ „ „ „ einer in m hängenden Last $P'' = 1{,}0$ t (Fig. 111′i).

An Stelle des Abstandes x'_m tritt jetzt der entsprechende linksseitige Abstand x_{m-1}. Die Feldweite λ dagegen bleibt natürlich dieselbe. Somit ergibt sich für linksseitige ungünstigste Stellung die Formel:

(IVa) $$\boxed{D = \frac{p}{2} \frac{x^2_{m-1}}{\left(l + \lambda \frac{D_B}{D_{P''}}\right)} \cdot D_B}$$ (bei linksseitiger ungünstigster Laststellung).

Somit sind auch die genauen Formeln für die größten Diagonalspannkräfte entwickelt. Die Hilfswerte D_A, $D_{P'}$ bzw. D_B, $D_{P''}$ sind sämtlich mit ihren Vorzeichen einzuführen. Hierdurch ergibt sich dann von selber, daß der eine der obigen Werte der größte Zug, der andere der größte Druck der Diagonalen D_m ist.

Vertikalen. Die Vertikalen werden nach denselben Formeln bestimmt wie die Diagonalen, nur daß an Stelle von D der Buchstabe V gesetzt wird. Demgemäß lauten die Formeln:

(V) $$\begin{cases} V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x'^2_m}{\left(l + \lambda \frac{V_A}{V_{P'}}\right)} \cdot V_A & \text{(für rechtsseitige ungünst. Belastung),} \\ V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x^2_{m-1}}{\left(l + \lambda \frac{V_B}{V_{P''}}\right)} \cdot V_B & \text{(„ linksseitige „ „).} \end{cases}$$

Bei den obigen Formeln muß sorgfältig darauf geachtet werden, zu welchem Felde der betreffende Stab gehört. Beispielsweise gehört die dritte Vertikale V von Fig. 111'f zum Felde $(m-1)-m$; von diesem Felde müssen also die Abstände x' (rechts) und x (links) genommen werden. (Würde dagegen in Fig. 111'f die Belastung am Obergurt angreifen, so würde V zum Felde $\overline{1}-(\overline{m-1})$ gehören; die einzuführenden Abstände x' und x wären somit andere.)

II. Zusammenstellung der Hilfswerte D_A, $D_{P'}$, usw.

Bei der analytischen Bestimmung der Füllungsstäbe ist es namentlich wichtig, die gebrauchten Hilfswerte D_A usw. schnell bei der Hand zu haben. Die grundsätzliche Berechnung dieser Werte geschieht natürlich wie bei jeder anderen Belastung. Die für den praktischen Gebrauch geeignetsten Methoden und Formeln sollen im folgenden zusammengestellt werden.

1. Hilfswerte D_A, V_A.

Rechnerisch. Die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t in den Diagonalen werden am zweckmäßigsten mit der Formel bestimmt:

$$(1) \qquad D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right).$$

Die Momente M_o und M_u sind einfach gleich 1,0 t mal dem Abstande des betreffenden Punktes vom Auflager A. Hierdurch gestaltet sich die Ausrechnung sehr einfach.

Die Vertikalen ergeben sich dann für den meistens vorliegenden Fall, daß eine Gurtung des Trägers horizontal verläuft, aus dem Gleichgewicht der einzelnen Knotenpunkte:

$$V = -D \cdot \sin\varphi .$$

Man berechnet also zunächst die Diagonalen und folgert hieraus die Vertikalen. (Beispiel für diese Berechnung der D_A und V_A s. § 35.) Für den Fall, daß beide Gurte des Trägers gekrümmt sind, dienen zur Berechnung der Vertikalen die Formeln von § 7a, 7b.

Zeichnerisch ergeben sich die Hilfswerte D_A, V_A durch einen Kräfteplan, den man am Punkte A mit 1,0 t als einzige äußere Kraft anfängt. (Beispiele für einen derartigen Kräfteplan: Fig. 86b, Fig. 98.)

2. Hilfswerte D_B, V_B.

Rechnerisch ergeben sich die Werte D_B, V_B nach den entsprechenden Formeln wie D_A, V_A.

Zeichnerisch findet man D_B, V_B bei einem symmetrischen Fachwerk am einfachsten, indem man den für $A = 1{,}0$ t bereits angefangenen Kräfteplan auch für die rechte Trägerhälfte durchzeichnet. Denn bei einem symmetrischen Träger ist die Spannkraft eines Stabes infolge $B = 1{,}0$ t gleich der Spannkraft des spiegelbildlich gelegenen Stabes infolge $A = 1{,}0$ t. (Beispiel für einen solchen Kräfteplan s. Fig. 98.)

Da ein solcher von A bis zum letzten Felde rechts durchgezeichneter Kräfteplan zum Schlusse ziemlich unhandlich wird, empfiehlt es sich öfters, ihn ungefähr in der Mitte abzubrechen und dann in kleinerem Maßstabe weiter zu zeichnen.

Zusatz: In der folgenden Fig. 111ᵃ sind die obigen Formeln für D und V mit einigen Abänderungen zusammengestellt. Gleich-

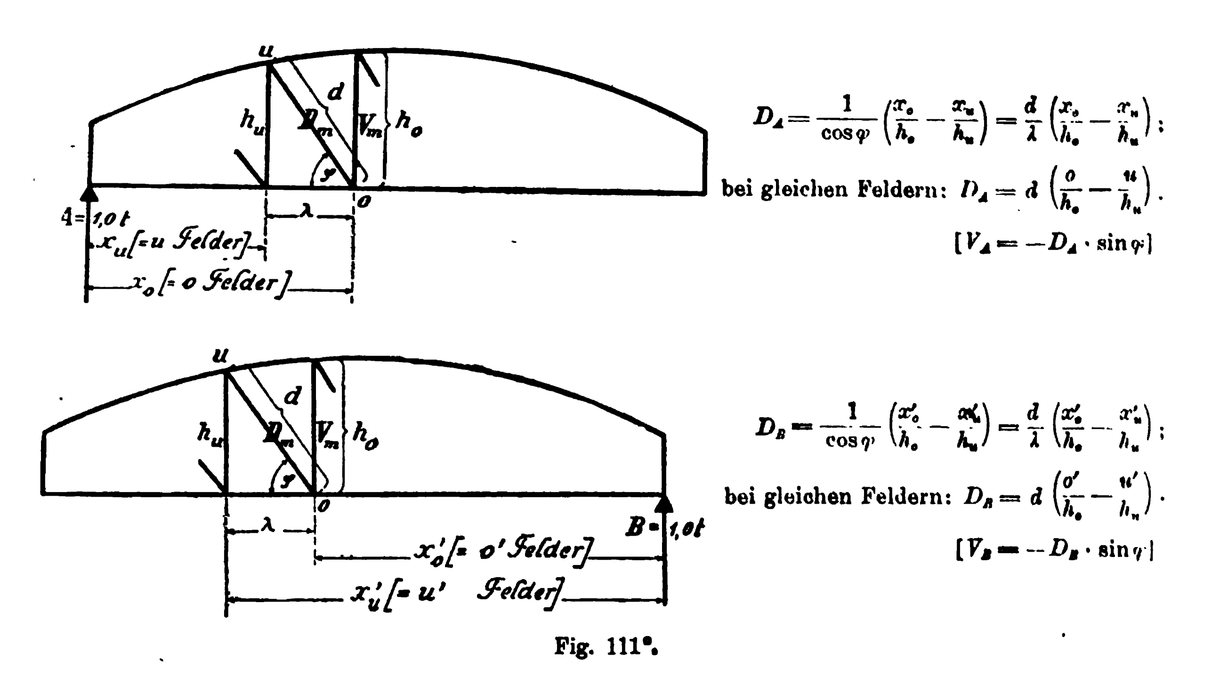


Fig. 111ᵃ.

zeitig ist darauf hingewiesen, daß man bei gleich langen Feldern λ statt der Abstände x_o usw. nur die Felderzahl o usw. einzuführen braucht.

Lasten am Untergurt.

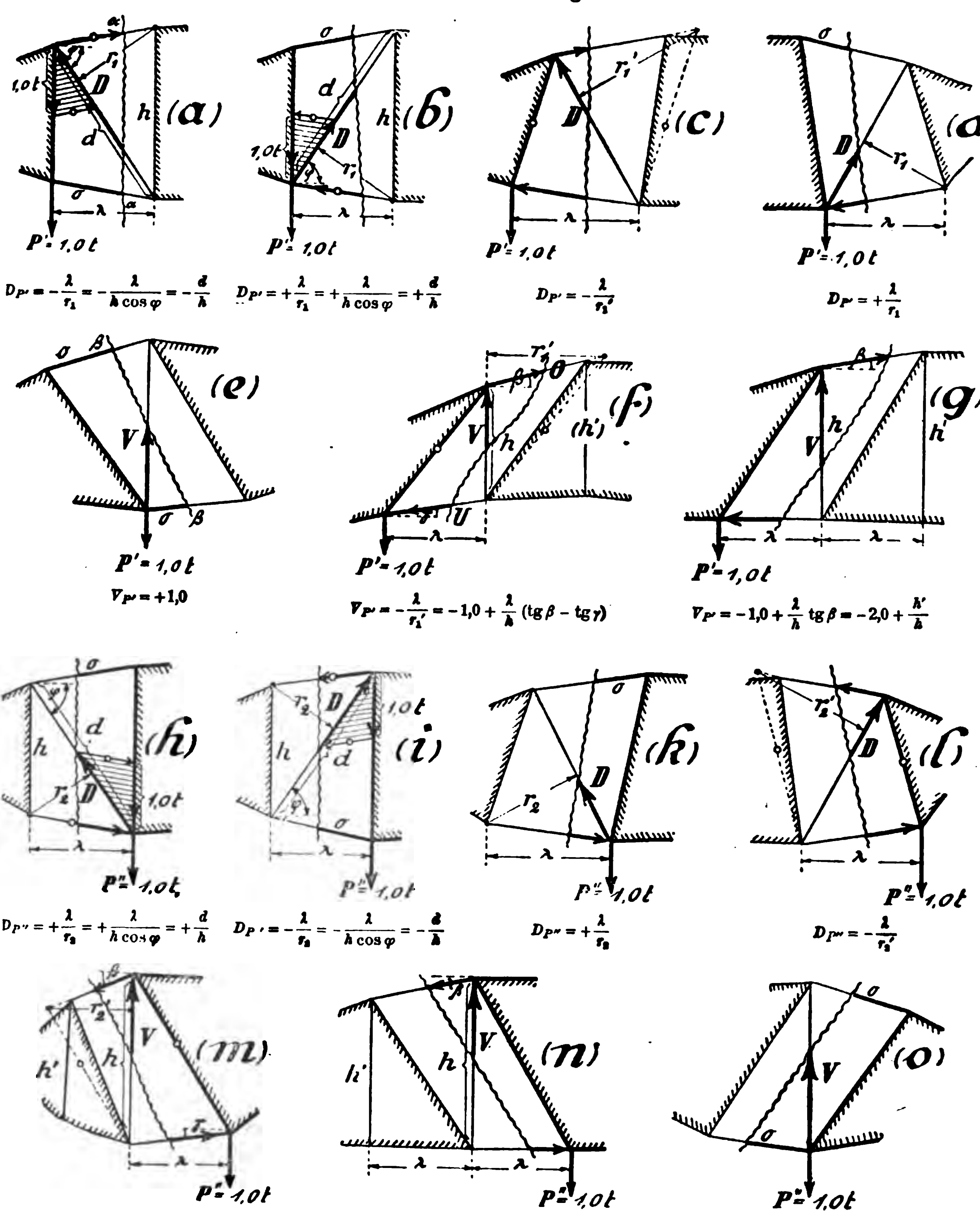
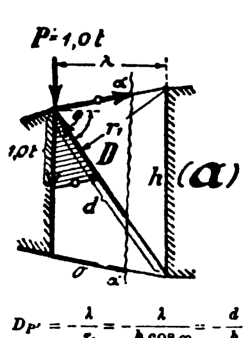


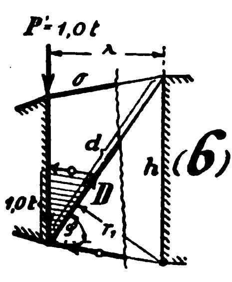
Fig. 112.

$D_{P'}$, $D_{P''}$, $V_{P'}$, $V_{P''}$.

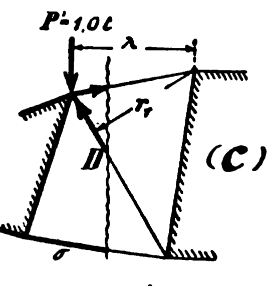
Lasten am Obergurt.



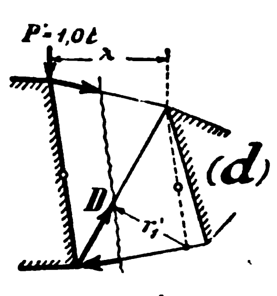
$D_{P'} = -\frac{\lambda}{r_1} = -\frac{\lambda}{h\cos\varphi} = -\frac{d}{h}$



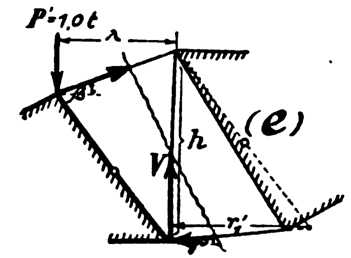
$D_{P'} = +\frac{\lambda}{r_1} = +\frac{\lambda}{h\cos\varphi} = +\frac{d}{h}$



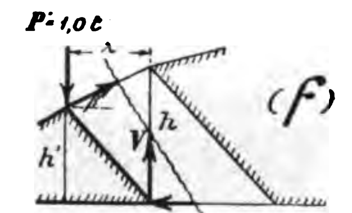
$D_{P'} = -\frac{\lambda}{r_1}$



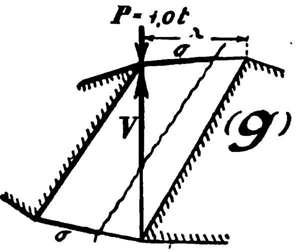
$D_{P'} = +\frac{\lambda}{r_1'}$

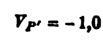


$V_{P'} = +\frac{\lambda}{r_1'} = +1{,}0 + \frac{\lambda}{h}(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta)$

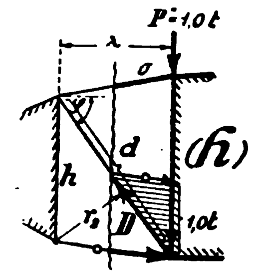


$V_{P'} = +1{,}0 - \frac{\lambda}{h}\operatorname{tg}\beta = +\frac{h'}{h}$

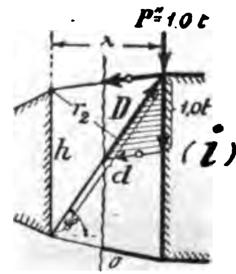




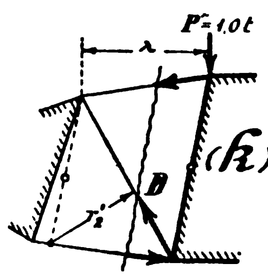
$V_{P'} = -1{,}0$



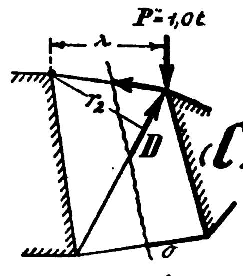
$D_{P''} = +\frac{\lambda}{r_2} = +\frac{\lambda}{h\cos\varphi} = +\frac{d}{h}$



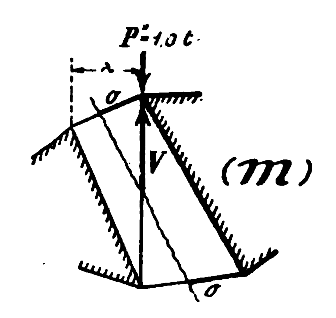
$D_{P''} = -\frac{\lambda}{r_2} = -\frac{\lambda}{h\cos\varphi} = -\frac{d}{h}$



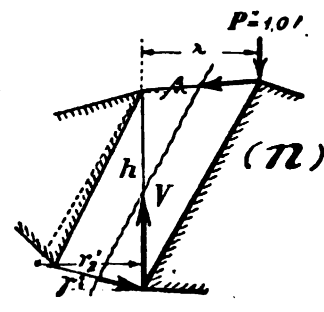
$D_{P''} = +\frac{\lambda}{r_2'}$



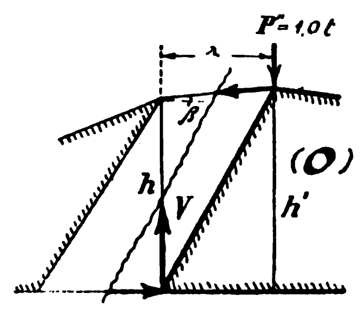
$D_{P''} = -\frac{\lambda}{r_2}$



$V_{P''} = -1{,}0$



$V_{P''} = +\frac{\lambda}{r_2'} = +1{,}0 + \frac{\lambda}{h}(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta)$



$V_{P''} = +1{,}0 + \frac{\lambda}{h}\operatorname{tg}\beta = +\frac{h'}{h}$

Fig. 113.

8. Hilfswerte $D_{P'}$, $V_{P'}$; $D_{P''}$, $V_{P''}$.

Die Spannkraft $D_{P'}$ ist diejenige Kraft, die im Stabe D entsteht, wenn der linke Trägerteil für sich genommen und unmittelbar am Schnitte mit einer Last von 1,0 t beansprucht wird. Entsprechend ergibt sich die Spannkraft $D_{P''}$, wenn man den rechten Trägerteil für sich nimmt, ihn unmittelbar am Schnitte mit 1,0 t belastet und die hierdurch im Stabe D entstehende Spannkraft ermittelt.

Genau dieselben Belastungsfälle haben wir aber bereits in § 28a, Absatz II, und § 28b behandelt. So wurde in Fig. 92′e der Fall untersucht, daß am linken Teile im Punkte $(m-1)$ eine Last $P = 1{,}0$ t hängt und die zugehörige Stabkraft D berechnet. Diese Spannkraft wurde damals D_1'' genannt, und zwar ergab sich:

$$D_1'' = -\frac{\lambda}{r_1}.$$

Entsprechend wurde in Fig. 92′h der rechte Trägerteil betrachtet und die im Stabe D entstehende Spannkraft — sie wurde D_2'' genannt — bestimmt. Man sieht, daß diese beiden Werte D_1'' und D_2'' genau dasselbe sind wie unsere jetzigen Werte $D_{P'}$ und $D_{P''}$. In § 28b wurden ferner noch andere Systeme für den Belastungsfall $P' = 1{,}0$ t, bzw. $P'' = 1{,}0$ t untersucht und die hierbei im Stabe D entstehenden Spannkräfte berechnet. Schließlich wurden diese Werte D_1'' (entsprechend $D_{P'}$) und D_2'' (entsprechend $D_{P''}$) in Fig. 92‴ von § 28b zusammengestellt.

In den Fig. 112, 113 ist diese Zusammenstellung von Fig. 92‴ wiederholt. Um die Tabelle möglichst gebrauchsfertig zu machen, sind hierin die verschiedenen möglichen Fälle (linkssteigende Diagonalen, rechtssteigende Diagonalen usw.) einzeln skizziert und jedesmal die betreffenden Werte hinzugeschrieben. Im Prinzip ist die Aufgabe sehr einfach, da es sich nur darum handelt, die betreffende Last von 1,0 t durch die drei vom Schnitte getroffenen Stäbe im Gleichgewicht zu halten. Natürlich kommt es aber darauf an, die Formeln so umzuformen, bzw. die passende Gleichgewichtsbedingung zu wählen, daß die vorkommenden Größen möglichst bequem aus der Systemfigur zu entnehmen sind.

Parallel zu ziehende Linien sind in Fig. 112, 113 durch kleine Kreise gekennzeichnet. Die Formeln Fig. 112g, n und 113f, o gelten nur für den Fall, daß die eine Gurtung des Trägers h o r i z o n t a l verläuft.

Graphisch bestimmt man die Hilfswerte $D_{P'}$ usw. am besten nach *Culmann*. Die *Culmann*schen Vierecke gehen hierbei meistens in einfache Dreiecke über (s. § 28a, 28b), oder schrumpfen in eine Linie zusammen. Die betreffenden Zerlegungsfiguren kann man direkt in die Systemfigur einzeichnen (Fig. 112, 113).

III. Zusammenfassung zu § 35a.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Formeln zur **genauen** Berechnung der Füllungsstäbe infolge einer beweglichen Last p lauteten:

(IV)
$$D = \frac{p}{2} \cdot \frac{x_m'^2}{\left(l + \lambda \dfrac{D_A}{D_{P'}}\right)} \cdot D_A \qquad \text{[Belastung rechtsseitig],}$$
$$D = \frac{p}{2} \cdot \frac{x_{m-1}^2}{\left(l + \lambda \dfrac{D_B}{D_{P''}}\right)} \cdot D_B \qquad \text{[„ linksseitig],}$$

(V)
$$V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x_m'^2}{\left(l + \lambda \dfrac{V_A}{V_{P'}}\right)} \cdot V_A \qquad \text{[Belastung rechtsseitig],}$$
$$V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x_{m-1}^2}{\left(l + \lambda \dfrac{V_B}{V_{P''}}\right)} \cdot V_B \qquad \text{[„ linksseitig].}$$

Die Bedeutung der hierin vorkommenden Hilfsgrößen D_A, $D_{P'}$ usw. ist durch die Fig. 111′c, d, h und i erläutert; bequeme Methoden und Formeln zur Berechnung dieser Werte sind in Abschnitt II dieses Paragraphen zusammengestellt.

Hinsichtlich der einzuführenden Längen x' usw. sei noch folgendes wiederholt: Die Abstände x_m' und x_{m-1} beziehen sich stets auf das Feld, in dem der betreffende Schnitt α—α bzw. β—β die die **Lasten tragende** Gurtung durchbricht. Und zwar ist x_m' der Abstand des rechten Endpunktes dieses Feldes vom rechten Auflager, und x_{m-1} ist der Abstand des linken Endpunktes vom linken Auflager. Bei **gleichen** Feldern kann man sämtliche Längen durch die Feldweite ausdrücken und dann λ vor die Klammer ziehen und kürzen.

Zum Schlusse sei noch daran erinnert, daß die ganze Untersuchung sich nur auf den Fall bezieht, daß der Bezugspunkt des betreffenden Stabes **außerhalb** der Spannweite liegt. Andernfalls gilt bekanntlich einfach Vollbelastung.

§ 35b.

Beispiel zu § 35a.

Aufgabe.

Der in § 35 angenähert berechnete Halbparabelträger ist nach den genauen Formeln für D und V zu berechnen!

Die Trägerhöhen und Neigungswinkel sind bereits in § 35 bestimmt. Hiernach skizziere der Leser das System für die folgende Berechnung auf.

Die Hilfswerte D_A, D_B und V_A, V_B sind ebenfalls schon in § 35 entwickelt. Es brauchen also nur noch die Werte $D_{P'}$ und $D_{P''}$, $V_{P'}$ und $V_{P''}$ neu berechnet zu werden. Diese Ausrechnung ist in der folgenden Tabelle auf Grund der Formeln von Fig. 112 durchgeführt. (In der Tabelle sind diejenigen Hilfswerte, die weiterhin nicht gebraucht werden — z. B. $D_{P''}$ beim Stabe D_1 — von vornherein ausgelassen.) Mit diesen Hilfswerten ergeben sich dann in der zweiten Tabelle die endgültigen D und V.

a) Hilfswerte $D_{P'}$, $D_{P''}$ und $V_{P'}$, $V_{P''}$.

Stab	$D_{P'} = -\frac{\lambda}{h \cos\varphi}$ (Fig. 112a) $V_{P'} = +1,0$ (Fig. 112e)	$D_{P''} = -\frac{\lambda}{h \cos\varphi}$ (Fig. 112b) $V_{P''} = -2,0 + \frac{h'}{h}$ (Fig. 112n)
D_1	$-\frac{4,0}{3,25 \cdot 0,876} = -1,4$	—
D_2	$-\frac{4,0}{4,00 \cdot 0,775} = -1,3$	$+\frac{4,0}{3,25 \cdot 0,775} = +1,6$
D_3	$-\frac{4,0}{4,45 \cdot 0,707} = -1.2$	$+\frac{4,0}{4,00 \cdot 0,707} = +1,4$
D_4	$-\frac{4,0}{4,60 \cdot 0,669} = -1,3$	$+\frac{4,0}{4,45 \cdot 0,669} = +1,4$
V_0	$+1,0$	
V_1	$+1,0$	$-2,0 + \frac{2,20}{3,25} = -1,3$
V_2	$+1,0$	$-2,0 + \frac{3\,25}{4,00} = -1,2$
V_3	$+1,0$	$-2,0 + \frac{4,00}{4,45} = -1,1$

b) Größte Spannkräfte D und V.

Stab	x'_m / x_{m-1}	D_A / D_B	$D_{P'}$ / $D_{P''}$	$\lambda \cdot \frac{D_A}{D_{P'}}$ / $\lambda \cdot \frac{D_B}{D_{P''}}$	$D = \frac{p}{2} \cdot \frac{x'^2_m}{\left(l+\lambda \frac{D_A}{D_{P'}}\right)} \cdot D_A$ [Belastg. rechts] / $D = \frac{p}{2} \cdot \frac{x^2_{m-1}}{\left(l+\lambda \frac{D_B}{D_{P''}}\right)} \cdot D_B$ [Belastg. links]
D_1	28,00	+1,41	−1,4	$4{,}0 \frac{+1{,}4}{-1{,}4} = -4{,}0$	$D_1 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{28{,}00^2}{32{,}0-4{,}0} \cdot (+1{,}41) = +39{,}4$ t
	0,00	—	—	—	$D_1 = \frac{2{,}0}{2} \cdot 0{,}0 = 0{,}0$ t
D_2	24,00	+0,99	−1,3	$4{,}0 \frac{+1{,}0}{-1{,}3} = -3{,}1$	$D_2 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{24{,}00^2}{(32{,}0-3{,}1)} \cdot (+0{,}99) = +19{,}8$ t
	4,00	−3,37	+1,6	$4{,}0 \frac{-3{,}4}{+1{,}6} = -8{,}5$	$D_2 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{4{,}00^2}{(32{,}0-8{,}5)} \cdot (-3{,}37) = -\ 2{,}3$ t
D_3	20,00	+0,99	−1,2	$4{,}0 \frac{+1{,}0}{-1{,}2} = -3{,}3$	$D_3 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{20{,}00^2}{(32{,}0-3{,}3)} \cdot (+0{,}99) = +18{,}8$ t
	8,00	−2,18	+1,4	$4{,}0 \frac{-2{,}1}{+1{,}4} = -6{,}0$	$D_3 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{8{,}00^2}{(32{,}0-6{,}0)} \cdot (-2{,}18) = -\ 5{,}3$ t
D_4	16,00	+1,17	−1,3	$4{,}0 \frac{+1{,}1}{-1{,}3} = -3{,}4$	$D_4 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{16{,}00^2}{(32{,}0-3{,}4)} \cdot (+1{,}17) = +10{,}4$ t
	12,00	−1,52	+1,4	$4{,}0 \frac{-1{,}6}{+1{,}4} = -4{,}6$	$D_4 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{12{,}00^2}{(32{,}0-4{,}6)} \cdot (-1{,}52) = -\ 7{,}9$ t

Stab	x'_m / x_{m-1}	V_A / V_B	$V_{P'}$ / $V_{P''}$	$\lambda \cdot \frac{V_A}{V_{P'}}$ / $\lambda \cdot \frac{V_B}{V_{P''}}$	$V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x'^2_m}{\left(l+\lambda \frac{V_A}{V_{P'}}\right)} \cdot V_A$ [Belastg. rechts] / $V = \frac{p}{2} \cdot \frac{x^2_{m-1}}{\left(l+\lambda \frac{V_B}{V_{P''}}\right)} \cdot V_B$ [Belastg. links]
V_0	28,00	−1,00	+1,0	$4{,}0 \frac{-1{,}0}{+1{,}0} = -4{,}0$	$V_0 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{28{,}00^2}{(32{,}0-4{,}0)} \cdot (-1{,}00) = -28{,}0$ t
	0,00	—	—	—	$V_0 = +\ 0{,}0$ t
V_1	24,00	−0,68	+1,0	$4{,}0 \frac{-0{,}7}{+1{,}0} = -2{,}8$	$V_1 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{24{,}00^2}{(32{,}0-2{,}8)} \cdot (-0{,}68) = -13{,}4$ t
	4,00	+3,26	−1,3	$4{,}0 \frac{+3{,}3}{-1{,}3} = -10{,}0$	$V_1 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{4{,}00^2}{(32{,}0-10{,}0)} \cdot (+3{,}26) = +\ 2{,}4$ t
V_2	20,00	−0,68	+1,0	$4{,}0 \frac{-0{,}6}{+1{,}0} = -2{,}4$	$V_2 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{20{,}00^2}{(32{,}0-2{,}4)} \cdot (-0{,}68) = -\ 8{,}5$ t
	8,00	+2,18	−1,2	$4{,}0 \frac{+2{,}1}{-1{,}2} = -7{,}1$	$V_2 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{8{,}00^2}{(32{,}0-7{,}1)} \cdot (+2{,}18) = +\ 5{,}5$ t
V_3	16,00	−0,70	+1,0	$4{,}0 \frac{-0{,}7}{+1{,}0} = -2{,}8$	$V_3 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{16{,}00^2}{(32{,}0-2{,}8)} \cdot (-0{,}70) = -\ 6{,}1$ t
	12,00	+1,51	−1,1	$4{,}0 \frac{+1{,}5}{-1{,}1} = -5{,}5$	$V_3 = \frac{2{,}0}{2} \cdot \frac{12{,}00^2}{(32{,}0-5{,}5)} \cdot (+1{,}51) = +\ 8{,}2$ t

[$V_4 = -2 \cdot 0_4 \cdot \sin \beta_4 = +4{,}3$ t.]

§ 36.

Träger mit gekrümmter Gurtung bei Einzellasten.

I. Gurtstäbe

aus den Momenten bestimmen:

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{M}{h \cdot \cos\beta}, \qquad U = +\frac{M}{h \cos\gamma}.$$

Die größten Momente bei Eisenbahnbrücken aus den Tabellen entnehmen. Andernfalls muß für jeden Knotenpunkt diejenige Laststellung ausprobiert werden, bei der sein Biegungsmoment am größten wird (s. § 28, I und § 31, I).

II. Füllungsstäbe.

Es handle sich wieder um solche Füllungsstäbe, die für Teilbelastung zu rechnen sind (Fig. 115). Von rechtsseitiger Grundstellung wird ausgegangen (Fig. 115b). Hierfür ist mit den üblichen Bezeichnungen:

$$\text{(III)} \qquad D = A \cdot D_A.$$

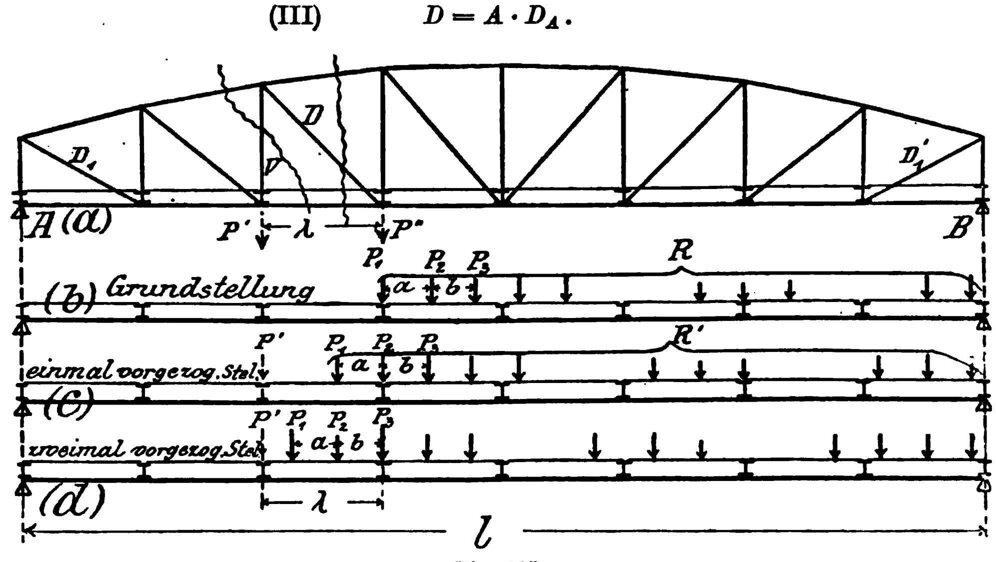


Fig. 115.

Nun wird einmal vorgezogene Stellung betrachtet. Hierfür ist (Fig. 115c):

$$\text{(IIIa)} \qquad D' = A' \cdot D_A + P' \cdot D_{P'}.$$

[A' = Auflagerdruck bei vorgezogener Stellung; P' = Belastung des linken Knotenpunktes infolge des Vorziehens der Belastung; $D_{P'}$ = Spannkraft in D, falls am linken Teile nur eine Kraft P', und zwar im Betrage von gerade 1,0 t, wirkt.]

Aus dem Vergleiche von (IIIa) mit (III) folgt, daß durch das Vorziehen sich die Spannkraft geändert hat um:

$$\text{(IV)} \qquad \Delta D = A' \cdot D_A + P' \cdot D_{P'} - A \cdot D_A$$
$$= (A' - A)\, D_A + P' \cdot D_{P'} = \Delta A \cdot D_A + P' \cdot D_{P'}.$$

[ΔA = Unterschied des Auflagerdruckes bei vorgezogener und bei Grundstellung.] Für die Werte ΔA und P' ist noch einzusetzen:

$$\Delta A = \frac{R \cdot a}{l};$$

denn durch das Vorschieben ist die ganze Lastengruppe R um die Strecke a vorwärts gekommen. Ferner:

$$P' = \frac{P_1\, a}{\lambda}.$$

Setzen wir nun diese Werte in die Formel (IV) ein, so wird:

$$\Delta D = \frac{R\, a}{l} \cdot D_A + \frac{P_1\, a}{\lambda} \cdot D_{P'}$$

$$\text{(V)} \qquad = \left(R + P_1 \frac{l}{\lambda} \frac{D_{P'}}{D_A}\right) \frac{a}{l} D_A.$$

Dieses ist also der Zuwachs, den die Spannkraft der Diagonalen D durch das Vorschieben des Zuges erlitten hat.

Um nun zu entscheiden, ob ΔD positiv oder negativ ist, müssen wir noch auf das Vorzeichen der Größen näher eingehen: Da A und P' entgegengesetzte Richtung haben, so haben sie auch entgegengesetzten Drehungssinn um den (seitlich von A und P' liegenden) Bezugspunkt des betreffenden Füllungsstabes. Daraus folgt, daß auch die Spannkräfte D_A und $D_{P'}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Folglich ist auch der Bruch $D_{P'} : D_A$ stets negativ. In der obigen Klammer ist also das zweite Glied stets negativ. Daraus folgt: Ist R größer als $P_1 \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{D_{P'}}{D_A}$, so ist die ganze Klammer positiv. Dann hat also ΔD die Form: $\Delta D = (+ \ldots) \cdot D_A$; d. h. dann bedeutet ΔD einen Zuwachs der ursprünglichen Stabkraft $D = A \cdot D_A$. Ist aber R kleiner als $P_1 \frac{l}{\lambda} \frac{D_{P'}}{D_A}$, so ist der Klammerausdruck negativ. Dann lautet für ΔD der Ausdruck: $\Delta D = (- \ldots) \cdot D_A$; d. h. dann wird der urprüngliche Betrag $D = A \cdot D_A$ durch ΔD verkleinert. Im ersteren Falle würde also die vorgezogene Stellung eine Vergrößerung, im zweiten Falle eine Verkleinerung der bei Grundstellung entstandenen Stabkraft D herbeiführen.

Falls sich nun vorgezogene Stellung als maßgebend erweist, muß noch unterschieden werden, ob ein- oder zweimal vorzuziehen ist. Die Untersuchung ist genau entsprechend: Man geht von einmal vorgezogener Stellung aus. Die dann auf der Brücke befindliche Lastensumme heiße R'. Nun wird der betreffende Ausdruck ΔD aufgestellt, der den Zuwachs angibt, um den sich die Spannkraft des Stabes D durch das zweite Vorschieben ändern würde. Ist ΔD positiv, so ist das zweite Vorschieben berechtigt; andernfalls nicht.

Insgesamt haben wir also folgendes Schema (für Fahrtrichtung von B nach links):

(1) $R < P_1 \frac{l}{\lambda} \frac{D_{P'}}{D_A}$: Grundstellung maßgebend,

(2) $R > P_1 \frac{l}{\lambda} \frac{D_{P'}}{D_A}$: vorziehen $\begin{cases} \text{a) } R' < (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}\frac{D_{P'}}{D_A} & \text{einmal vorziehen,} \\ \text{b) } R' > (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}\frac{D_{P'}}{D_A} & \text{zweimal} \quad „ \quad . \end{cases}$

Sobald nun über die Stellung entschieden ist, ergibt sich die betreffende Stabkraft selber:

$$\begin{cases} \text{(VIa)} & D = A \cdot D_A & \text{bei Grundstellung,} \\ \text{(VIb)} & D = A' \cdot D_A + P_1 \frac{a}{\lambda} \cdot D_{P'} & „ \text{ einmal vorgez. Stellung.} \\ \text{(VIc)} & D = A'' \cdot D_A + \frac{P_1(a+b)+P_2 b}{\lambda} \cdot D_{P'} & „ \text{ zweimal } „ \quad „ \quad . \end{cases}$$

In derselben Weise kann dreimal vorgezogene Stellung berücksichtigt werden. Dieser Fall kommt aber praktisch kaum vor.

Für Fahrtrichtung von A nach rechts treten in den obigen Formeln an Stelle der Buchstaben A und P' die Buchstaben B und P''; im übrigen bleibt alles dasselbe.

Ferner gelten diese Beziehungen natürlich auch für die Vertikalen. Man braucht nur „D" mit „V" zu vertauschen.

Vorzeichen: Die in den Formeln (VI) vorkommenden Hilfswerte D_A, $D_{P'}$ sind mit ihren Vorzeichen einzusetzen. Dann ergeben die Formeln von selber, ob die Stabkraft D Zug oder Druck ist. Die in den Formeln (1) und (2) vorkommenden Brüche $(D_{P'} : D_A)$ sind dagegen ohne Vorzeichen zu nehmen, da es nur darauf ankommt, ob R größer oder kleiner als das Produkt $P_1 \frac{l}{\lambda} \frac{D_{P'}}{D_A}$ ist.

Hilfswerte D_A, $D_{P'}$ usw. Über die zweckmäßigste Bestimmung dieser Hilfswerte s. § 35a, Absatz II.

§ 37.

Beispiel und Annäherungsmethode zu § 36.

I. Aufgabe.

Der Halbparabelträger Fig. 115 ist für Eisenbahnbelastung zu berechnen!

Zahlenangaben:

Spannweite $l = 8\lambda = 32{,}00$ m; Feldweite $\lambda = 4{,}00$ m.
Endvertikale $h_0 = 2{,}20$ m; Stich der Parabel $f = 2{,}40$ m;
somit Mittelvertikale $h_4 = 2{,}20 + 2{,}40 = 4{,}60$ m.

Die Brücke ist als *eingleisige* Eisenbahnbrücke zu berechnen für den preußisch-hessischen Lastenzug vom 1. Mai 1903 (s. § 32).

Die Berechnung ist in den folgenden Tabellen so durchgeführt, wie man sie in der Praxis anordnen wird, d. h. vor allen Dingen übersichtlich und jede Zahl kontrollierbar. Im einzelnen ist zu den Tabellen zu bemerken:

1. Geometrische Angaben. Diese sind bereits aus den früheren Berechnungen des Trägers für andere Belastungsarten bekannt.

2. Gurtstäbe. Das Maximalmoment der Brücke ist aus der Tabelle C von § 32 zu entnehmen, wobei zu beachten ist, daß die Brücke eingleisig sein soll. Aus dem Maximalmoment folgen dann nach Tabelle D von § 32 die Momente an den einzelnen Knotenpunkten. Aus diesen Momenten ergeben sich hierauf O und U.

3. Füllungsstäbe. Die Bezugspunkte der Füllungsstäbe liegen außerhalb der Spannweite; es ist also Teilbelastung zugrunde zu legen. [Eine Ausnahme macht die mittelste Vertikale.]

Statt nun für jeden Stab rechtsseitige und linksseitige Belastung besonders zu untersuchen, ist nur rechtsseitige Belastung untersucht, aber für sämtliche Stäbe (vom linken bis rechten Auflager). Augenscheinlich ist hierdurch auch linksseitige Belastung erledigt. Denn die Spannkraft z. B. des Stabes D_2 bei linksseitiger Belastung ist wegen der Symmetrie des Trägers gleich der Spannkraft des spiegelbildlich gelegenen Stabes D_2' bei rechtsseitiger Belastung. Es ist also gleichgültig, ob man die eine Trägerhälfte für rechts- und linksseitige Belastung, oder den ganzen Träger nur für rechtsseitige (oder linksseitige) Belastung untersucht.

Hinsichtlich der in der Tabelle vorkommenden Bezeichnungen sei aus § 33 erinnert: Die Belastungslänge c ist die Länge des aufzufahrenden Zuges bei Grundstellung, c' die entsprechende Länge bei vorgezogener Stellung. Es ist also $c' = c + 1{,}5$. Aus diesen Längen ergeben sich dann nach § 32 (Tabelle A bzw. Hilfstabelle B) die Lastensummen und Auflagerdrücke.

1. Geometrische Angaben.

Spannweite $L = 32{,}00$ m. Feldweite $\lambda = 4{,}00$ m. Felderzahl $n = 8$.					
Knotenpunkt m	Parabelordinaten y $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 2{,}40}{(8\lambda)^2} x(l-x) = 0{,}15\text{ m }(8-m)$	Trägerhöhen h	Neigungswinkel		
			Obergurt	Diagonalen	
0	$y_0 =$ 0,00	$h_0 = 2{,}20$			
1	$y_1 = 0{,}15 \cdot 1 \cdot 7 = 1{,}05$	$h_1 = 3{,}25$	$\cos\beta_1 = 0{,}967$	$\cos\varphi_1 = 0{,}876$	$\sin\varphi_1 = 0{,}4\ 2$
2	$y_2 = 0{,}15 \cdot 2 \cdot 6 = 1{,}80$	$h_2 = 4{,}00$	$\cos\beta_2 = 0{,}963$	$\cos\varphi_2 = 0{,}775$	$\sin\varphi_2 = 0{,}632$
3	$y_3 = 0{,}15 \cdot 3 \cdot 5 = 2{,}25$	$h_3 = 4{,}45$	$\cos\beta_3 = 0{,}994$	$\cos\varphi_3 = 0{,}707$	$\sin\varphi_3 = 0{,}707$
4	$y_4 (= 0{,}15 \cdot 4 \cdot 4) = 2{,}40$	$h_4 = 4{,}60$	$\cos\beta_4 = 0{,}999$	$\cos\varphi_4 = 0{,}669$	$\sin\varphi_4 = 0{,}743$

2. Gurtstäbe.

$L = 32{,}00$ m. $M_{max} = 939{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 469{,}6$ mt				Obergurt (t) $O = -\frac{M}{h \cos\beta}$	Untergurt (t) $U = +\frac{M}{h}$
Punkt	Verhältnis $x:L$	Verhältnis $M_x : M_{max}$	Moment M_x		
0	0,0	0,0	$M_0 = 0$		$U_1 = 0$
1	1:8 = 0,125	0,471 + 3,20 · 0,005 = 0,487	$M_1 = 229$	$O_1 = -\frac{229}{3{,}25 \cdot 0{,}967} = -73$	$U_2 = +\frac{229}{3{,}25} = +70$
2	0,250	0,793 + 2,00 · 0,010 = 0,813	$M_2 - 382$	$O_2 = -\frac{382}{4{,}00 \cdot 0{,}963} = -97$	$U_3 = +\frac{382}{4{,}00} = +96$
3	0,375	0,967 + 0,70 · 0,015 = 0,978	$M_3 = 460$	$O_3 = -\frac{460}{4{,}45 \cdot 0{,}994} = -104$	$U_4 = +\frac{460}{4{,}45} = +103$
4	0,500	1,000	$M_4 = 470$	$O_4 = -\frac{470}{4{,}60 \cdot 0{,}999} = -102$	

3. Füllungsstäbe.

a) *Hilfswerte* D_A, $D_{P'}$, V_A, $V_{P'}$.

Stab	Spannkraft infolge	
	$A = 1{,}0$ t. $D_A = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	$P' = 1{,}0$ t. $D_{P'} = \mp \frac{\lambda}{h \cos\varphi}$
D_1	$\frac{1}{0{,}876}\left(\frac{4{,}00}{3{,}25} - \frac{0{,}00}{2{,}20}\right) = +1{,}41$	$-\frac{4{,}00}{3{,}25 \cdot 0{,}876} = -1{,}41$
D_2	$\frac{1}{0{,}775}\left(\frac{8{,}00}{4{,}00} - \frac{4{,}00}{3{,}25}\right) = +0{,}99$	$-\frac{4{,}00}{4{,}00 \cdot 0{,}775} = -1{,}29$
D_3	$\frac{1}{0{,}707}\left(\frac{12{,}00}{4{,}45} - \frac{8{,}00}{4{,}00}\right) = +0{,}99$	$-\frac{4{,}00}{4{,}45 \cdot 0{,}707} = -1{,}27$
D_4	$\frac{1}{0{,}669}\left(\frac{16{,}00}{4{,}60} - \frac{12{,}00}{4{,}45}\right) = +1{,}17$	$-\frac{4{,}00}{4{,}60 \cdot 0{,}669} = -1{,}30$
D_4'	$\frac{1}{0{,}669}\left(\frac{16{,}00}{4{,}60} - \frac{20{,}00}{4{,}45}\right) = -1{,}52$	$+\frac{4{,}00}{4{,}45 \cdot 0{,}669} = +1{,}34$
D_3'	$\frac{1}{0{,}707}\left(\frac{20{,}00}{4{,}45} - \frac{24{,}00}{4{,}00}\right) = -2{,}13$	$+\frac{4{,}00}{4{,}00 \cdot 0{,}707} = +1{,}41$
D_2'	$\frac{1}{0{,}775}\left(\frac{24{,}00}{4{,}00} - \frac{28{,}00}{3{,}25}\right) = -3{,}37$	$+\frac{4{,}00}{3{,}25 \cdot 0{,}775} = +1{,}59$
D_1'	$\frac{1}{0{,}876}\left(\frac{28{,}00}{3{,}25} - \frac{32{,}00}{2{,}20}\right) = -6{,}76$	$+\frac{4{,}00}{2{,}20 \cdot 0{,}876} = +2{,}08$

Stab	Spannkraft infolge	
	$A = 1{,}0$ t. $V = -D \cdot \sin\varphi$	$P' = 1{,}0$ t. $V_{P'} = +1{,}0$ bzw. $= -2{,}0 + \frac{h'}{h}$
V_0	$[V_0 = -1{,}00]$	+1,00
V_1	$-1{,}41 \cdot 0{,}482 = -0{,}68$	+1,00
V_2	$-0{,}99 \cdot 0{,}632 = -0{,}63$	+1,00
V_3	$-0{,}99 \cdot 0{,}707 = -0{,}70$	+1,00
V_3'	$+2{,}13 \cdot 0{,}707 = +1{,}51$	$-2{,}0 + \frac{4{,}00}{4{,}45} = -1{,}10$
V_2'	$+3{,}87 \cdot 0{,}632 = +2{,}13$	$-2{,}0 + \frac{3{,}25}{4{,}00} = -1{,}19$
V_1'	$+6{,}76 \cdot 0{,}482 = +3{,}26$	$-2{,}0 + \frac{2{,}20}{3{,}25} = -1{,}32$
V_0'		

b) Größte Diagonalkräfte.

Stab	Belastungslänge e / e'	Lastensumme R / R'	$P_1 \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{D_{P'}}{D_A} = 17{,}0 \cdot 8 \cdot \frac{D_{P'}}{D_A}$ / $(P_1+P_2)\frac{l}{\lambda}\frac{D_{P'}}{D_A}\left(= 2P_1 \frac{l}{\lambda}\frac{D_{P'}}{D_A}\right)$	Erfüllte Bedingung	Maßgeb. Stellung	Auflagerdruck A / A'	Spannkraft $D = A \cdot D_A$ / $D = A' \cdot D_A + P' \cdot D_{P'}$ $\left[P' = 8{,}5 \cdot \frac{1{,}5}{4{,}0} = 3{,}2\right]$	Zusammenstellung der größten Diagonalkräfte
D_1	28,0	209	$186 \cdot \frac{1{,}41}{1{,}41} = 186$	$R > P_1 \frac{l}{\lambda}\frac{D_{P'}}{D_A}$				$D_1 = {+76{,}4 \atop -\ 0{,}0}$
	29,5	222	$2 \cdot 186 = 272$	$R' < (P_1+P_2)$ ..	1 × vorgez.	$\frac{1}{32{,}0}[8448{,}5 + 222 \cdot 1{,}0]\frac{1}{2} = 57{,}4$	$+57{,}4 \cdot 1{,}41 - 3{,}2 \cdot 1{,}41 = +76{,}4$	
D_2	24,0	209	$186 \cdot \frac{1{,}29}{0{,}93} = 177$	$R > P_1$ ..				$D_2 = {+39{,}6 \atop -\ 7{,}4}$
	25,5	209	$2 \cdot 177 = 354$	$R' < (P_1+P_2)$ ..	1 × vorgez.	$\frac{1}{32{,}0}[2508 + 209 \cdot 1{,}5]\frac{1}{2} = 44{,}2$	$+44{,}2 \cdot 0{,}99 - 3{,}2 \cdot 1{,}29 = +39{,}6$	
D_3	20,0	158	$136 \cdot \frac{1{,}27}{0{,}99} = 175$	$R < P_1$ ..	Grundst.	$\frac{1}{32{,}0}[1720{,}5 + 158 \cdot 0{,}5]\frac{1}{2} = 28{,}2$	$+28{,}2 \cdot 0{,}99 = +27{,}9$	$D_3 = {+27{,}9 \atop -14{,}1}$
D_4	16,0	124	$186 \cdot \frac{1{,}30}{1{,}17} = 151$	$R < P_1$ ..	Grundst.	$\frac{1}{32{,}0}[961 + 124 \cdot 2{,}5]\frac{1}{2} = 19{,}7$	$+19{,}7 \cdot 1{,}17 = +23{,}0$	$D_4 = {+23{,}0 \atop -18{,}7}$
D_4'	12,0	111	$186 \cdot \frac{1{,}34}{1{,}52} = 120$	$R < P_1$ ..	Grundst.	$\frac{1}{32{,}0}[784{,}5 + 111 \cdot 0]\frac{1}{2} = 12{,}3$	$-12{,}3 \cdot 1{,}52 = -18{,}7$	
D_3'	8,0	85	$136 \cdot \frac{1{,}41}{2{,}13} = 90$	$R < P_1$ ..	Grundst.	$\frac{1}{32{,}0}[255 + 85 \cdot 2{,}0]\frac{1}{2} = 6{,}6$	$-6{,}6 \cdot 2{,}13 = -14{,}1$	
D_2'	4,0	57	$186 \cdot \frac{1{,}59}{3{,}37} = 64$	$R < P_1$ ..	Grundst.	$\frac{1}{32{,}0}[85{,}5 + 57{,}0 \cdot 1{,}0]\frac{1}{2} = 2{,}2$	$-2{,}2 \cdot 3{,}37 = -7{,}4$	
D_1'							0,0	

c) *Größte Vertikalkräfte.*

Die Berechnung der Vertikalkräfte führe der Leser selber durch. Die Hilfswerte sind bereits sämtlich vorhanden, und das Schema dürfte jetzt auch klar sein. Es sei aber dringend empfohlen, diese Arbeit durchzuführen, da man derartige Sachen durch das bloße Nachlesen niemals lernen kann. Beim Selberrechnen kommt man auch auf manche Vereinfachungen.

Für V_0 gibt es nur einen (negativen) Wert. V_4 wird aus dem Gleichgewicht des Endknotenpunktes bestimmt (wie in § 35).

II. Annäherungsmethode.

Da die genaue Untersuchung der Füllungsstäbe immerhin etwas Arbeit macht, rechnet man häufig nach folgender Annäherung: Man nimmt nur Grundstellung an. Weil man nun aber nicht sicher ist, daß bei dieser auch die größte Stabkraft entsteht, so erhöht man die erste Achslast willkürlich um ca. 50 %. Durch diese Erhöhung soll also dem Umstande Rechnung getragen werden, daß in Wirklichkeit eventuell vorgezogene Stellung maßgebend ist.

Die Formeln bei dieser Annäherungsmethode lauten demnach:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} D = A \cdot D_A \\ \text{bzw.} \quad = B \cdot D_B , \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} V = A \cdot V_A \\ \text{bzw.} \quad = B \cdot V_B . \end{cases}$$

Man spart auf diese Weise die Werte $D_{P'}$ usw. Überhaupt wird die ganze Rechnung außerordentlich einfach, da nur die Hilfswerte D_A usw. und die Auflagerdrücke A und B zu bestimmen sind.

Die Übereinstimmung dieser Annäherungsmethode mit der genauen Methode ist bei den einzelnen Stäben verschieden. Bei manchen Stäben ist der Unterschied zwischen Grundstellung und vorgezogener Stellung recht bedeutend, so daß hier auch die um 50 % erhöhte erste Last kaum ausreicht. [Der Unterschied hängt von der Gestalt der Einflußlinie ab; namentlich von der Lage der Abschrägung $E'F'$.] Eisenbahnbrücken berechnet man nach der genauen Methode.

Zusatz. Auch bei Parallelträgern kann man mit dieser Annäherungsmethode arbeiten, indem man also auf die Betrachtung von vorgezogenen Stellungen von vornherein verzichtet und zum Ausgleich dieser Ungenauigkeit die erste Last erhöht. Doch ist ja die genaue Berechnung bei Parallelträgern ebenfalls sehr einfach.

§ 38.

Spezialfall: Träger mit zwei Lasten. Beispiel hierzu (Kranträger).

I. Die gefährlichen Laststellungen.

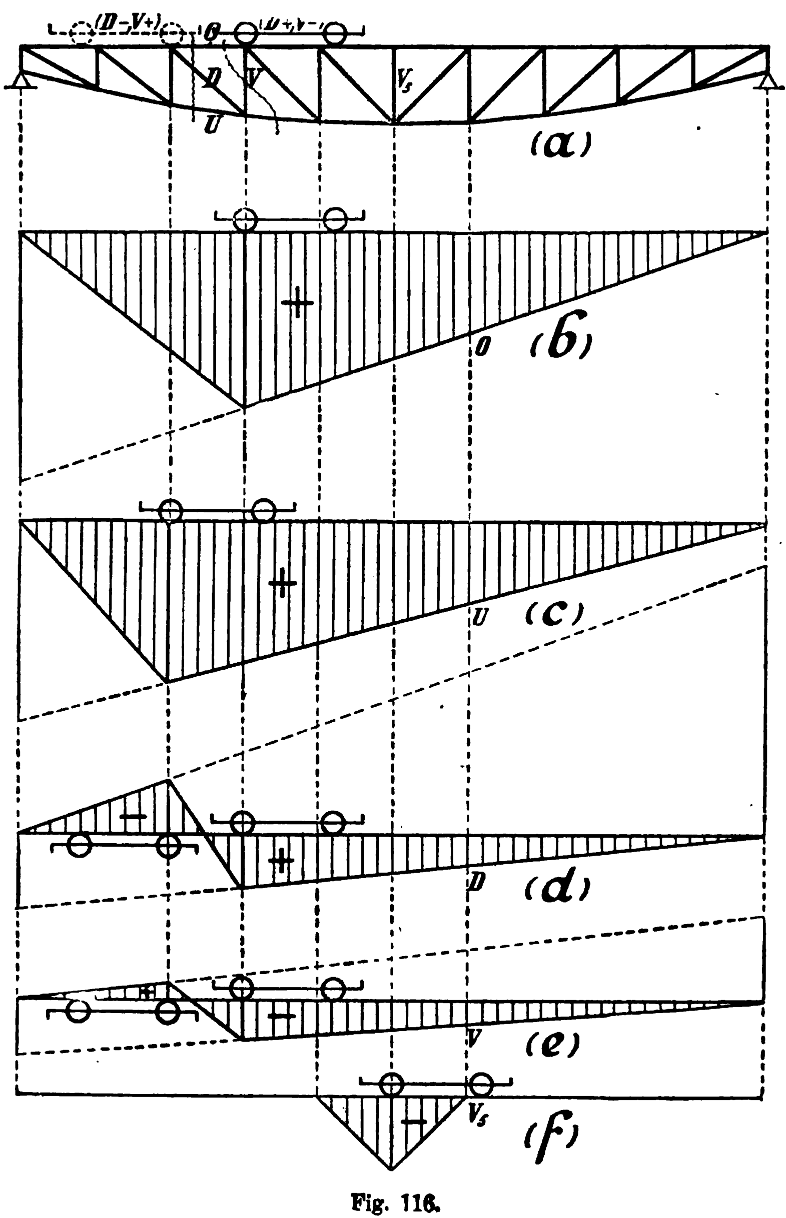


Fig. 116.

Die Berechnung der Spannkräfte bei nur *zwei* beweglichen Lasten wird dadurch vereinfacht, daß die gefährlichen Laststellungen leicht anzugeben sind.

Skizziert man zu solch einem Kranträger die Einflußlinien (Fig. 116), so erkennt man bereits aus der Form derselben folgende Regel hinsichtlich der Laststellungen:

a) Für die **Gurtstäbe** muß die eine (und zwar die schwerere) der beiden Lasten im Bezugspunkte des betreffenden Stabes stehen und die andere nach der Mitte des Trägers zu.

b) Für die **Füllungsstäbe** ist die Lastengruppe in (positive und negative) Grundstellung zu stellen; d. h. einmal rechts und einmal links vor dem durch den Schnitt getroffenen Felde. Sind die Lasten ungleich, so ist die schwerere nach dem Schnitte zu stellen.

Durch diese beiden Regeln ist die sonst so schwierige Frage der Laststellungen erledigt.

II. Berechnung der Spannkräfte.

Nun müssen zu jeder Laststellung die zugehörigen Spannkräfte bestimmt werden. Dies geschieht nach den in den letzten Paragraphen entwickelten Regeln (Träger mit Einzellasten).

Die Gurtstäbe berechnen wir aus den Momenten für die Bezugspunkte:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M}{r} = -\dfrac{M}{h \cdot \cos\beta}, \\ U = +\dfrac{M}{r} = +\dfrac{M}{h \cdot \cos\gamma}. \end{cases}$$

Die Füllungsstäbe werden für rechtsseitige Belastung nach den Formeln bestimmt:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} D = A \cdot D_A, \\ V = A \cdot V_A, \end{cases}$$

worin D_A und V_A die Spannkräfte in den Diagonalen und Vertikalen bedeuten, die durch einen Auflagerdruck $A = 1{,}0$ t hervorgerufen werden. Vorgezogene Stellungen kommen bei keinem Stabe in Betracht; deshalb können wir überall die obigen einfachen Formeln verwenden.

Für linksseitige Belastung lauten die entsprechenden Formeln:

$$\text{(IIa)} \qquad \begin{cases} D = B \cdot D_B, \\ V = B \cdot V_B. \end{cases}$$

Auf diese Weise wird für jeden Füllungsstab der größte Zug und der größte Druck ermittelt.

III. Zahlenbeispiel.

Aufgabe: Der in Fig. 117 gezeichnete Kranträger ist zu berechnen!

Zahlenangaben:

Spannweite $l = 10 \cdot 1{,}50 = 15{,}00$ m; Endvertikale 0,50 m; Mittelvertikale 1,50 m.

Laufkatze: 2 Radlasten zu 10,0 t mit 1,80 m Radstand.

Die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einer Parabel.

a) Zusammenstellung der gefährlichen Laststellungen.

In Fig. 117b—g sind für den Träger Fig. 117a die einzelnen Laststellungen eingetragen und zu jeder derselben die Spannkräfte

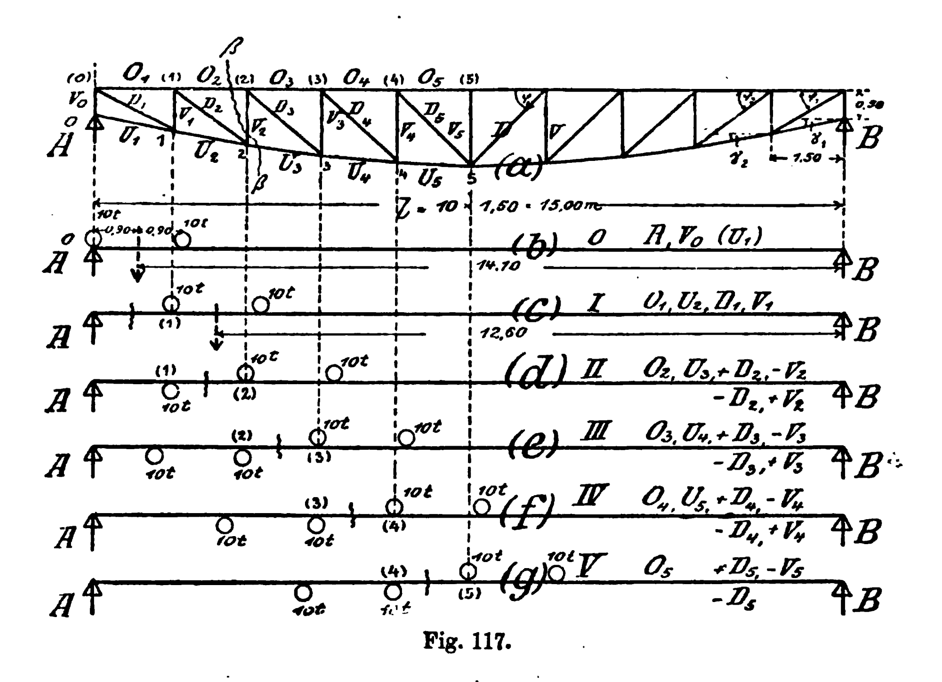


Fig. 117.

zugeschrieben, die bei dieser Stellung ihre Größtwerte erreichen. Stellung *0* ist für den Auflagerdruck *A* und für die Vertikale V_0

maßgebend. [Außerdem für U_1; diese Kraft wird aber gleich Null.] Bei Stellung *I* erhalten die Stäbe O_1, U_2, D_1 und V_1 ihre größten Spannkräfte. Von D_2 und V_2 ab müssen für jeden Füllungsstab *zwei* Stellungen berücksichtigt werden, um die größte positive und die größte negative Spannkraft zu finden. In Fig. 117d—g sind deshalb jedesmal zwei Stellungen eingetragen, oberhalb und unterhalb des Trägers. Für den Stab V_5 ergibt sich aus der Form der Einflußlinie (Fig. 116), daß er seine größte Spannkraft bei der in Fig. 117g oberhalb des Trägers eingetragenen Stellung erhält. In dieser Weise kann man die gefährlichen Laststellungen sehr übersichtlich zusammenstellen.

b) *Ausrechnung der Spannkräfte.*

Die geometrischen Angaben des Systems sind aus § 8, sechste Aufgabe (Tabelle I) zu entnehmen. Die Ausrechnung der Spannkräfte ist in den folgenden Tabellen 2 und 3 durchgeführt. Hierbei ist folgendermaßen vorgegangen:

α) In der Tabelle 2 sind zunächst die Auflagerdrücke A berechnet (wobei die beiden Lasten durch eine Ersatzkraft $R = 20$ t ersetzt wurden), hieraus die Momente und aus diesen die Gurtkräfte. Jede Gurtkraft steht neben der Laststellung, die für sie maßgebend ist.

β) In der Tabelle 3a sind nur die Werte aufgenommen, die für die Berechnung der Stabkräfte gebraucht werden. So kommt z. B. für D_1 die Stellung links vom Schnitt nicht in Frage; deshalb braucht für diesen Stab die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t nicht ausgerechnet zu werden. Das gleiche gilt für V_0 und V_1. Die Vertikale V_5 wird nicht aus den Auflagerdrücken A und B, sondern direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen von Knoten (*5*) bestimmt.

Die Ausrechnung der einzelnen Produkte $A \cdot D_A$ usw. geschieht am übersichtlichsten in der Weise, daß man die bei den Laststellungen $(O - V)$ entstehenden Auflagerdrücke A und B hinschreibt und neben jeden Auflagerdruck diejenigen Stäbe, für die die betreffende Laststellung maßgebend ist.

Auf diese Weise erhält man eine klare und einfache Berechnung des ganzen Systems.

2. Gurtstäbe.

Laststellung	Auflagerdruck A (t)	Moment $M_m = A \cdot x_m$ (mt)	Obergurt $O = -\frac{M}{h}$ (t)	Untergurt $U = +\frac{M}{h \cdot \cos\gamma}$ (t)
0	$20{,}0 \cdot \frac{14{,}10}{15{,}00} = 18{,}8$	$M_0 =$ 0,0		U_1 0,0
I	$20{,}0 \cdot \frac{12{,}60}{15{,}00} = 16{,}8$	$M_1 = 16{,}8 \cdot 1{,}5 = 25{,}2$	$O_1 = -\frac{25{,}2}{0{,}86} = -29{,}3$	$U_2 = +\frac{29{,}3}{0{,}988} = +29{,}8$
II	14,8	$M_2 = 14{,}8 \cdot 3{,}0 = 44{,}4$	$O_2 = -\frac{44{,}4}{1{,}14} = -39{,}0$	$U_3 = +\frac{39{,}0}{0{,}991} = +39{,}4$
III	12,8	$M_3 = 12{,}8 \cdot 4{,}5 = 57{,}6$	$O_3 = -\frac{57{,}6}{1{,}34} = -43{,}0$	$U_4 = +\frac{43{,}0}{0{,}997} = +43{,}0$
IV	10,8	$M_4 = 10{,}8 \cdot 6{,}0 = 64{,}8$	$O_4 = -\frac{64{,}8}{1{,}46} = -44{,}4$	$U_5 = +\frac{44{,}4}{1{,}000} = +44{,}4$
V	8,8	$M_5 = 8{,}8 \cdot 7{,}5 = 66{,}0$	$O_5 = -\frac{66{,}0}{1{,}50} = -44{,}0$	

3. Füllungsstäbe.

a) *Hilfswerte D_A, V_A und D_B, V_B:*

Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t		Spannkräfte infolge $B = 1{,}0$ t	
$D_A = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	$V_A = -D \cdot \sin\varphi$	$D_B = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$	$V_B = -D \cdot \sin\varphi$
$D_1 = \frac{1}{0{,}868}\left(\frac{1{,}50}{0{,}86} - 0{,}0\right) = +2{,}01$	$V_0 = -1{,}00$		
$D_2 = \frac{1}{0{,}796}\left(\frac{3{,}00}{1{,}14} - \frac{1{,}50}{0{,}86}\right) = +1{,}11$	$V_1 = -1{,}11 \cdot 0{,}605 = -0{,}67$	$D_2 = \frac{1}{0{,}796}\left(\frac{12{,}00}{1{,}14} - \frac{13{,}50}{0{,}86}\right) = -6{,}50$	
$D_3 = \frac{1}{0{,}743}\left(\frac{4{,}50}{1{,}34} - \frac{3{,}00}{1{,}14}\right) = +0{,}98$	$V_2 = -0{,}98 \cdot 0{,}669 = -0{,}65$	$D_3 = \frac{1}{0{,}743}\left(\frac{10{,}50}{1{,}34} - \frac{12{,}00}{1{,}14}\right) = -3{,}61$	$V_2 = +3{,}61 \cdot 0{,}669 = +2{,}40$
$D_4 = \frac{1}{0{,}717}\left(\frac{6{,}00}{1{,}46} - \frac{4{,}50}{1{,}34}\right) = +1{,}05$	$V_3 = -1{,}05 \cdot 0{,}698 = -0{,}73$	$D_4 = \frac{1}{0{,}717}\left(\frac{9{,}00}{1{,}46} - \frac{10{,}50}{1{,}34}\right) = -2{,}33$	$V_3 = +2{,}33 \cdot 0{,}698 = +1{,}63$
$D_5 = \frac{1}{0{,}707}\left(\frac{7{,}50}{1{,}50} - \frac{6{,}00}{1{,}46}\right) = +1{,}26$	$V_4 = -1{,}26 \cdot 0{,}707 = -0{,}89$	$D_5 = \frac{1}{0{,}707}\left(\frac{7{,}50}{1{,}50} - \frac{9{,}00}{1{,}46}\right) = -1{,}65$	$V_4 = +1{,}65 \cdot 0{,}707 = +1{,}17$

b) *Spannkräfte D und V.*

Laststellung	Auflagerdruck A, B	Diagonalen $D = A \cdot D_A$, $D = B \cdot D$	Vertikalen $V = A \cdot V_A$, $V = B \cdot V_B$
0	$A = 18{,}8$		$V_0 = -18{,}8 \cdot 1{,}00 = -18{,}8$
I	$A = 16{,}8$	$D_1 = +16{,}8 \cdot 2{,}01 = +33{,}8$	$V_1 = -16{,}8 \cdot 0{,}67 = -11{,}3$
II	$A = 14{,}8$ $B = 1{,}0$	$D_2 = \begin{matrix} +14{,}8 \cdot 1{,}11 = +16{,}4 \\ -1{,}0 \cdot 6{,}50 = -6{,}5 \end{matrix}$	$V_2 = \begin{matrix} -14{,}8 \cdot 0{,}65 = -9{,}6 \\ +1{,}0 \cdot 2{,}40 = +2{,}4 \end{matrix}$
III	$A = 12{,}8$ $B = 2{,}8$	$D_3 = \begin{matrix} +12{,}8 \cdot 0{,}98 = +12{,}5 \\ -2{,}8 \cdot 3{,}61 = -10{,}1 \end{matrix}$	$V_3 = \begin{matrix} -12{,}8 \cdot 0{,}73 = -9{,}4 \\ +2{,}8 \cdot 1{,}63 = +4{,}6 \end{matrix}$
IV	$A = 10{,}8$ $B = 4{,}8$	$D_4 = \begin{matrix} +10{,}8 \cdot 1{,}05 = +11{,}3 \\ -4{,}8 \cdot 2{,}33 = -11{,}2 \end{matrix}$	$V_4 = \begin{matrix} -10{,}8 \cdot 0{,}89 = -9{,}6 \\ +4{,}8 \cdot 1{,}17 = +5{,}6 \end{matrix}$
V	$A = 8{,}8$ $B = 6{,}8$	$D_5 = \begin{matrix} +8{,}8 \cdot 1{,}26 = +11{,}1 \\ -6{,}8 \cdot 1{,}65 = -11{,}2 \end{matrix}$	$[V_5 = -10{,}0]$

38a.

Zusammenfassung zum 4. Vortrag.

In diesem Vortrage haben wir die Aufgabe behandelt, die in einem Fachwerkträger infolge einer beweglichen Belastung entstehenden Spannkräfte auf rein rechnerischem Wege zu bestimmen. In der Tat gelang es uns, in einer Anzahl von Fällen die Stabkraftbestimmung durchzuführen, ohne daß es nötig wäre, auch nur einen Strich zu zeichnen. Diese untersuchten Fälle waren:

1. Parallelträger mit gleichmäßig verteilter Last (§ 29, 30).
2. „ „ Einzellasten (§ 31).
3. Träger mit gekrümmter Gurtung mit gleichmäßig verteilter Last (§ 34—35b).
4. Träger mit gekrümmter Gurtung mit Einzellasten (§ 36 bis § 37).

Als besondere Untersuchungen kamen hinzu:

a) Berechnung von Eisenbahnbrücken mittels Tabellen (§ 32, 33).
b) Berechnung von Kranträgern (als Spezialfall zu 4.) (§38).

In allen diesen Fällen ergab die analytische Untersuchung einen schnellen und übersichtlichen Rechnungsgang.

5. Vortrag:

Die rein graphischen Methoden. Besondere Konstruktionen. Zusammenfassung und Aufgaben zu Abschnitt II.

Die graphischen Methoden sind nichts anderes als die zeichnerische Darstellung der im vorigen Vortrage für die Spannkräfte aufgestellten analytischen Ausdrücke: Die Momente werden durch die Momentenfläche dargestellt, die Auflagerdrücke A (für die Formeln $D = A \cdot D_A$ usw.) durch das A-Polygon. Häufig werden die Stabkräfte aber auch direkt zeichnerisch konstruiert, ohne Zurückgreifen auf analytische Formeln.

Wenngleich die graphischen Methoden von diesem Gesichtspunkte aus als eine Weiterbildung der analytischen Methoden er-

scheinen, sind sie in der Praxis doch älter als die letzteren. Dies rührt wohl daher, weil das älteste umfassende Lehrbuch, die graphische Statik von *Culmann*, von vornherein die Statik als einen Teil der Geometrie behandelte. Später wurde es dann Sitte, auch das einfachste analytische Resultat durch eine zeichnerische Form zu verschönern.

Im allgemeinen fehlt diesen rein graphischen Verfahren bei beweglicher Belastung die Übersichtlichkeit der Einflußlinien und die Schnelligkeit der analytischen Methoden.

§ 39.

Träger mit gekrümmter Gurtung bei gleichmäßiger beweglicher Belastung.

I. Gurtstäbe.

Die Ausgangsformeln sind:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} O = -\dfrac{M}{r}, \\ U = +\dfrac{M}{r}. \end{cases}$$

Maßgebende Laststellung: Vollbelastung.

1. Darstellung der Momente M.

Die Momentenfläche bei einer gleichmäßig verteilten Gesamtbelastung p ist bekanntlich durch eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$f = \frac{1}{8} p\, l^2$$

dargestellt; vgl. Band I, § 59. [Man halte Momentenfläche und Einflußfläche für ein Moment auseinander! Erstere gibt für jeden Querschnitt das zugehörige Moment infolge einer feststehenden Belastung; letztere gibt für einen Querschnitt die verschiedenen Momente infolge einer wandernden Last. Bei der ersteren wird das Moment an dem betreffenden Querschnitte gemessen; bei der letzteren unter der betreffenden Laststellung.]

Im vorliegenden Falle wirkt allerdings die Belastung indirekt (Fig. 118a). Die Momentenfläche ist also keine Kurve, sondern ein Vieleck, dessen Ecken unter den Belastungspunkten liegen (vgl. Fig. 109° von Band I). Da nun aber an den Belastungspunkten die Momente bei indirekter Belastung gleich denen bei

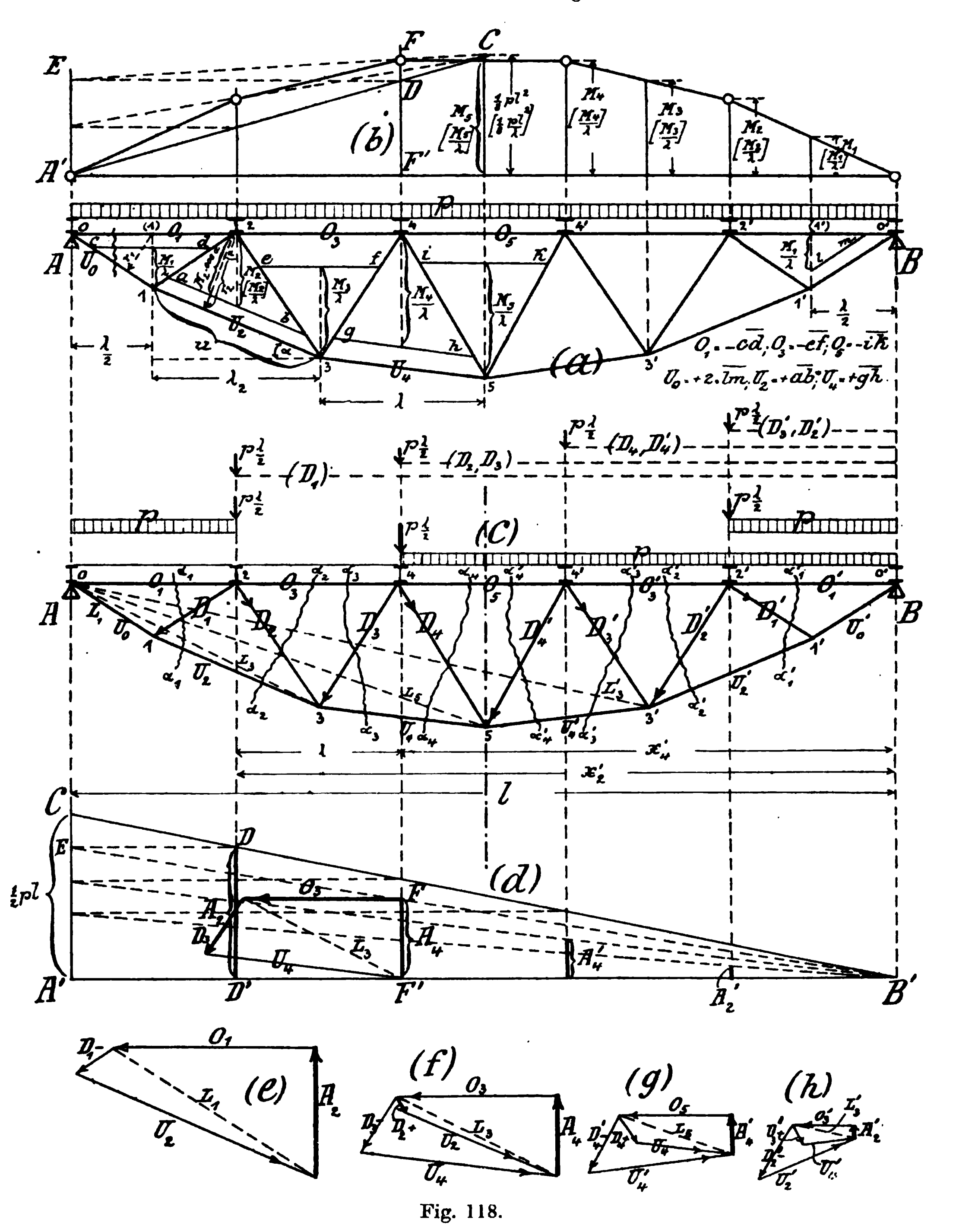


Fig. 118.

direkter Belastung sind, so können an diesen Stellen trotzdem die Parabelordinaten verwendet werden. Und für die übrigen Punkte ergeben sich dann die Momente, indem man durch Verbindung der Parabelordinaten das gesamte Vieleck einzeichnet. Hierdurch ist für jeden Punkt des Trägers das Moment infolge der indirekt wirkenden Gesamtbelastung p zeichnerisch dargestellt.

Konstruktion nach Fig. 118b (vgl. auch Fig. 96c von Band I): Erst $\frac{1}{8} p l^2$ auftragen; dann Linie $A'C$, hierdurch Punkt D bestimmt. Dann Horizontale durch D, hierdurch Punkt E bestimmt. Dann E mit C verbunden und hierdurch Punkt F bestimmt. Hierauf stellt die Strecke FF' das Moment für Knotenpunkt 4 dar. Entsprechend für die anderen Knotenpunkte.

2. Darstellung der Spannkräfte.

Um nun z. B. den Stab U_2 zu ermitteln, ziehen wir durch den Bezugspunkt desselben, Punkt 2, eine vertikale Linie, tragen auf dieser das aus Fig. 118b zu entnehmende Moment M_2 ab und ziehen durch den Endpunkt desselben die Parallele $\overline{ab}$ zum Stabe U_2. Dann stellt diese Strecke $\overline{ab}$ die Spannkraft U_2 im $\lambda_2$fachen Maßstabe dar.

Beweis: Es verhält sich (Fig. 118a):

$$\overline{ab} : M_2 \cdot \cos\alpha = u : r_2 ;$$

folglich ist

$$\overline{ab} = \frac{M_2 \cdot \cos\alpha}{r_2} \cdot u$$

$$= \frac{M_2 \cdot \cos\alpha}{r_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\cos\alpha},$$

$$\overline{ab} = \frac{M_2}{r_2} \cdot \lambda_2 = U_2 \cdot \lambda_2 ,$$

$$\text{(II)} \qquad U_2 = \frac{\overline{ab}}{\lambda_2} .$$

Somit ist mit Hilfe der Momentenfläche die Spannkraft U_2 bestimmt.

Falls die Feldweite λ für alle Felder dieselbe ist, wird man zweckmäßig die Momente bereits im $\frac{1}{\lambda}$fachen Maßstabe auftragen. [Indem man die Pfeilhöhe

$$\text{nicht } f = \frac{1}{8} p l^2 , \quad \text{sondern } f' = \frac{1}{8} \frac{p l^2}{\lambda}$$

macht.] Dann stellt z. B. die Strecke $\overline{ab}$ von Fig. 118a das $\frac{1}{\lambda}$fache des früheren Wertes dar; also

$$\overline{ab} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{M_2}{r_2} \lambda = \frac{M_2}{r_2},$$

$$\text{(IIa)} \qquad \overline{ab} = U_2 .$$

Somit erhält man die Spannkräfte direkt.

In Fig. 118a sind auf diese Weise auch die übrigen Gurtkräfte O_1, O_3, O_5, U_2 und U_4 bestimmt und die Resultate angeschrieben. Um U_0 zu finden, wurde der Punkt (*1*), senkrecht über *1*, als Bezugspunkt genommen. Aus dessen Moment ergibt sich U_0:

$$U_0 = + \frac{M_{(1)}}{r_1} .$$

Die Darstellung dieses Ausdruckes erfolgt natürlich ebenso wie bei den anderen Stäben. Sie ist in Fig. 118a, rechte Seite, durchgeführt: Durch den Bezugspunkt eine vertikale Linie, auf dieser der betreffende Wert $(M : \lambda)$ abgetragen und dann die Parallele zum Stabe. Aus zeichnerischen Gründen wird man diese Parallele diesmal nur über ein halbes Feld ziehen (Fig. 118a, rechte Seite). Dafür muß sie nachher beim Abmessen doppelt genommen werden.

8. Maßstäbe.

Hinsichtlich Maßstab ist zu beachten: Wenn in Fig. 118b in der Mitte der Wert

$$f = \frac{1}{8} p l^2$$

(also ein Moment) aufgetragen ist, dann sind die Strecken $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ usw. in demselben Maßstab zu messen, in dem das Moment f aufgetragen wurde (z. B. 1 cm = ... mt). Werden nun nach Formel (II) diese Momente (*mt*) dividiert durch die Feldweite λ (in *m*), so ergeben sich die Spannkräfte in *t*.

Wenn dagegen in Fig. 118b in der Mitte der Wert

$$f' = \frac{1}{8} \frac{p l^2}{\lambda}$$

aufgetragen ist, so stellt diese Strecke bereits eine Kraft dar; nämlich Moment : Länge = Kraft $\times$ Länge : Länge = Kraft. Die Strecke f' ist also bereits in einem Kräftemaßstab aufzutragen (1 cm = ... t). Die Längen $\overline{ab}$ usw. ergeben dann in demselben Kräftemaßstabe die Spannkräfte.

II. Füllungsstäbe.

Die genaue Berechnung, auf Grund der vorgezogenen Stellungen, erfordert umständliche geometrische Konstruktionen. Man begnügt sich deshalb mit der Darstellung der **Annäherungsmethode**: Für jeden Füllungsstab nur Grundstellung; dafür aber am Anfange der Belastung eine Einzellast von $\frac{1}{2} p \lambda$ (vgl. § 34, II). Es sei daran erinnert, daß diese Annäherungsmethode zugunsten der Sicherheit rechnet.

Ausgangsformeln:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} D = A \cdot D_A & \text{[bei rechtsseitiger Belastung]}, \\ D = B \cdot D_B & \text{[„ linksseitiger „]}. \end{cases}$$

Entsprechend für die Vertikalen V. Die Produkte werden jedoch nicht ausgerechnet, sondern aus dem Auflagerdruck $A(B)$ wird nach *Culmann* direkt D und V gefunden.

1. Laststellung.

Um nach diesem Verfahren z. B. den Stab D_8 von Fig. 118c zu bestimmen, legen wir zunächst den Schnitt $\alpha_8 - \alpha_8$. Dieser trifft die die Lasten tragende Gurtung im Felde *2—4*. Rechtsseitige Belastung für Stab D_8 ist also dann, wenn die Last p von B aus bis Punkt *4* vorgerückt und außerdem in *4* eine Last $\frac{1}{2} p \lambda$ angenommen ist. Hierdurch ist die Laststellung klargelegt.

2. Zugehöriger Auflagerdruck.

Der hierbei entstehende Auflagerdruck beträgt (vgl. § 34, II):

$$A_4 = \frac{1}{2} p \cdot \frac{x_4' \cdot x_2'}{l}.$$

Zunächst wird dieser graphisch dargestellt (Fig. 118d): Strecke $A'C = \frac{1}{2} p l$ gezeichnet, C mit B' verbunden, Punkte *2* und *4* hinuntergelotet, durch D Horizontale DE gezogen, E mit B' verbunden und hierdurch Punkt F bestimmt. Dann ist

$$FF' = A_4.$$

[Beweis: Es ist

$$FF' = A'E \cdot \frac{x_4'}{l} = DD' \cdot \frac{x_4'}{l} = A'C \frac{x_2'}{l} \cdot \frac{x_4'}{l} = \frac{1}{2} p l \frac{x_2'}{l} \cdot \frac{x_4'}{l} = \frac{1}{2} p \frac{x_2' \cdot x_4'}{l} = A_4.]$$

3. Spannkräfte.

Nachdem A_4 bestimmt ist, kann die Spannkraft D_8 direkt nach *Culmann* ermittelt werden, da am linken Teile nur die eine

äußere Kraft A_4 vorhanden ist. Konstruktion: Schnittpunkt von A und O_3 mit dem Schnittpunkt von D_3 und U_4 durch Hilfslinie L_3 verbinden (Fig. 118c), hierauf die Kraft A_4 (Fig. 118d) zunächst zerlegen in O_3 und L_3 und schließlich L_3 in D_3 und U_4. Auf diese Weise ist D_3 für rechtsseitige Belastung bestimmt.

Entsprechend sind in Fig. 118e—h sämtliche Diagonalkräfte für rechtsseitige Belastung ermittelt: Zunächst Schnitte α_1—α_1, α_2—α_2 usw. gelegt und hierdurch Belastungslängen bestimmt (s. Fig. 118c, oben):

für D_1:	rechtsseitige	Belastungslänge	B—2,
„ D_2 und D_3:	„	„	B—4.
„ D_4 und D_4':	„	„	B—$4'$,
„ D_3' und D_2':	„	„	B—$2'$,
„ D_1'	„	„	$= 0$.

Dann sind durch Hinunterloten der Spitze der Belastung die zugehörigen Auflagerdrücke bestimmt (Fig. 118d)

$$A_2, \ A_4, \ A_4', \ A_2' \text{ und } 0,$$

und schließlich ist zu jedem dieser Auflagerdrücke das *Culmann*sche Viereck gezeichnet (Fig. 118e—h). Hiermit ist rechtsseitige Belastung erledigt.

Um nun den Stab D_3 auch für linksseitige Belastung zu bestimmen, müßte die Belastung von A bis 2 angenommen werden (Fig. 118c). Statt dessen: Wegen Symmetrie ist Stab D_3 bei *links*seitiger Belastung gleich dem spiegelbildlich gelegenen Stabe D_3' bei *rechts*seitiger Belastung. Da nun für rechtsseitige Belastung die Stabkräfte bereits sämtlich bestimmt sind, können die Stabkräfte für linksseitige Belastung durch Vertauschung entnommen werden. Durch Fig. 118d—h ist also sowohl rechts- als auch linksseitige Belastung für jeden Stab erledigt.

Die Resultate sind folgende:

D_1 nur Druck (Fig. 118e),

D_2 {bei rechtsseitiger Belastung Zug (Fig. 118f),
„ linksseitiger „ Druck (gleich D_2' in Fig. 118h),

D_3 {bei rechtsseitiger Belastung Druck (Fig. 118f),
„ linksseitiger „ Zug (gleich D_3' in Fig. 118h),

D_4 {bei rechtsseitiger Belastung Zug (Fig. 118g),
„ linksseitiger „ Druck (gleich D_4' in Fig. 118g).

Maßstab: Die Spannkräfte D_1—D_4 sind aus den Fig. 118e—h in demselben Maßstab zu entnehmen, in dem die Kraft $\frac{1}{2} p l = A'O$ in Fig. 118d aufgetragen ist. [Beispiel s. § 41.]

§ 40.

Parallelträger mit gleichmäßig verteilter Belastung.

I. Gurtstäbe.

Ausgangsformeln:

$$\text{(I)} \qquad O\,,\,U = \mp \frac{M}{h}\,.$$

Wir zeichnen die zu dem Träger gehörige Momentenfläche direkt im $\frac{1}{h}$-fachen Maßstabe; d. h. wir tragen in der Mitte einen Pfeil:

$$f = \frac{1}{8}\,\frac{p\,l^2}{h}$$

auf. Im übrigen wie Fig. 118b. Dann stellen die Ordinaten dieser Momentenfläche den Ausdruck $M : h$ dar. Um also einen Gurtstab $O(U)$ zu erhalten, messen wir die an dem Bezugspunkte dieses Stabes befindliche Ordinate y der Momentenfläche und erhalten

$$\text{(II)} \qquad y = \frac{M}{h} = O(U)\,.$$

Somit sind die Gurtstäbe direkt durch die Ordinaten der (im Verhältnis $1 : h$ gezeichneten) Momentenfläche gegeben.

Maßstab: Der Ausdruck $f = \frac{1}{8}\,\frac{p\,l^2}{h}$ stellt eine Kraft dar und ist also in einem Kräftemaßstab aufzutragen. In demselben Kräftemaßstabe sind dann die Ordinaten y abzumessen.

II. Füllungsstäbe.

Ausgangsformeln:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} D = \dfrac{Q}{\sin\varphi}\,, \\ V = Q\,. \end{cases}$$

Für die Querkräfte der verschiedenen Felder läßt sich folgende Darstellung ableiten:

1. Darstellung der Querkräfte.

a) Bei ungleichen Feldweiten. Für das Feld *1—2* des Fachwerkes Fig. 119a ist die Einflußlinie für die Querkraft in Fig. 119b dargestellt durch $A'E'F'B'$ (vgl. Band I, Fig. 110d). Hieraus ergibt sich die größte potitive Querkraft:

$$\underset{+}{Q}_{(1-2)} = p \cdot F = p \cdot \frac{1}{2}\,n_2 \cdot \eta_2 = p \cdot \frac{1}{2}\,n_2 \cdot \frac{1{,}0 \cdot x_2'}{l}\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad \underset{+}{Q}_{(1-2)} = \frac{1}{2}\,p\,\frac{n_2 \cdot x_2'}{l}\,.$$

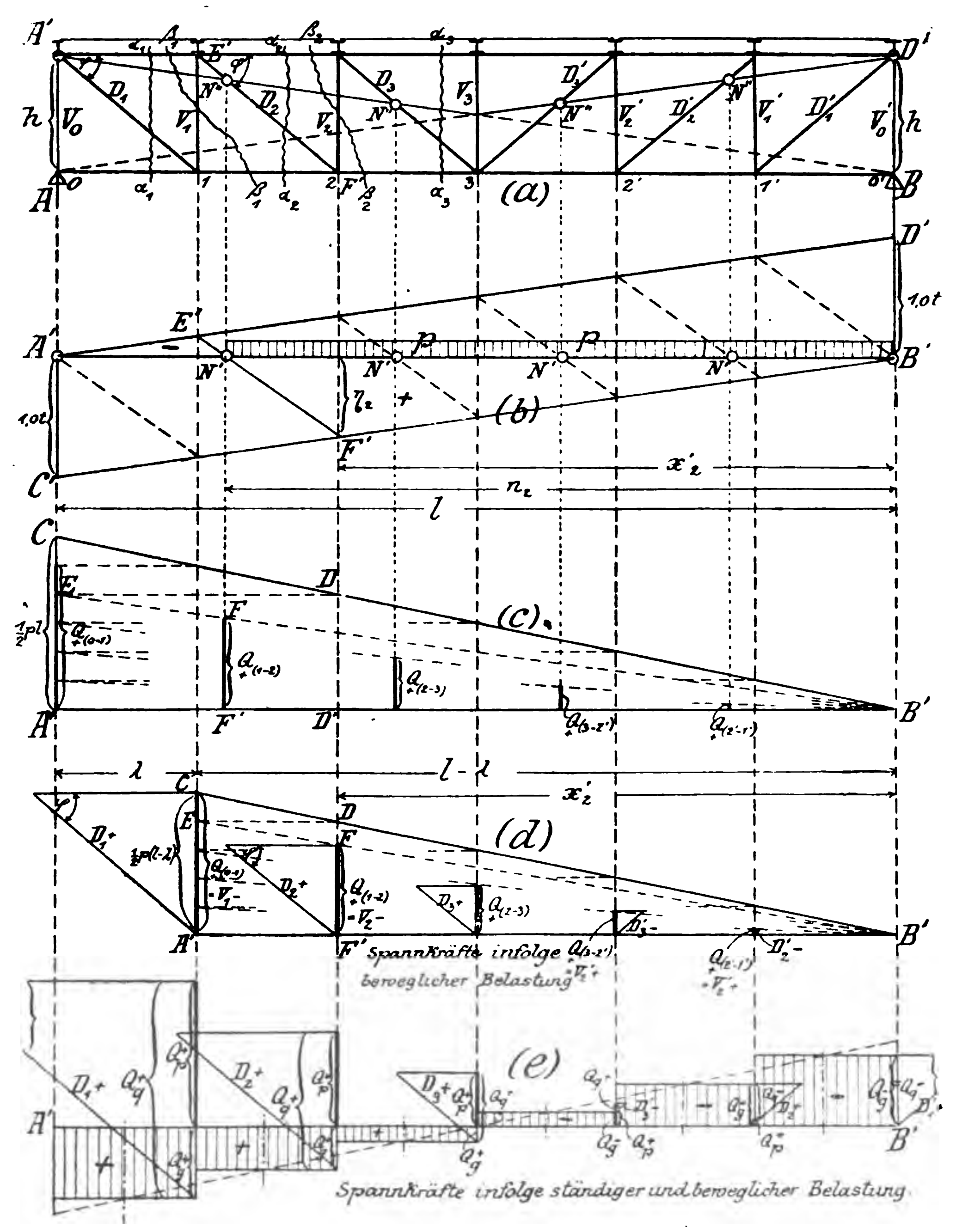

(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
Spannkräfte infolge beweglicher Belastung
Spannkräfte infolge ständiger und beweglicher Belastung

Fig. 119.

Dieser Ausdruck nun läßt sich leicht zeichnen (Fig. 119c): $A'C = \frac{1}{2} p\, l$ aufgetragen, CB' gezogen, auf der Vertikalen durch *2* der Punkt D bestimmt, Horizontale DE gezogen, E mit B' verbunden und auf dieser durch Hinunterloten des Nullpunktes N' der Einflußlinie der Punkt F bestimmt. Dann ist

$$FF' = \underset{+}{Q}_{(1-2)} \, .$$

[Beweis: Es ist

$$FF' = A'E \cdot \frac{n_2}{l} = D'D \cdot \frac{n_2}{l} = A'C \frac{x_2'}{l} \cdot \frac{n_2}{l} = \frac{1}{2} p\, l \frac{x_2'}{l} \cdot \frac{n_2}{l} = \frac{1}{2} p \frac{n_2 \cdot x_2'}{l} = \underset{+}{Q}_{(1-2)} \, .]$$

In derselben Weise sind in Fig. 119c für die anderen Felder (*0—1*, *2—3*, *3—2'*, *2'—1'* und *1'—0'*) die größten positiven Querkräfte bestimmt. Die betreffenden Werte Q sind stets unter dem Nullpunkte N' der betreffenden Einflußlinie abzumessen. [Für das Feld *1'—0'* ist $\underset{+}{Q}$ gleich Null, wie auch die Einflußlinie zeigt.]

Um die Nullpunkte N', und somit auch die Einflußlinien Fig. 119b entbehren zu können, ziehen wir in der Trägerfigur Fig. 119a die Linien AD' und BA'. Deren Schnittpunkte N'' mit den Diagonalen liegen nämlich über den Nullpunkten N' der Einflußlinien. [Beweis: Figur $A'E'F'B$ in Fig. 119a kann ebenfalls als Einflußlinie für Q_{1-2} angesehen werden, nämlich $A'B$ als Nullachse, $A'A = 1{,}0$ t (im Maßstabe $1{,}0 \text{ t} = \lambda$), $BD' = 1{,}0$ t und $E'F'$ als Abschrägung. Also Punkt N'' ebenfalls Nullpunkt. Entsprechend bei den anderen Feldern.] Dann brauchen wir also Fig. 119b überhaupt nicht, sondern bestimmen die Querkräfte direkt aus Fig. 119c, nur unter Benutzung der Punkte N'' der Systemfigur.

b) Bei gleichen Feldern. In dem meistens vorliegenden Falle, daß alle Felder dieselbe Feldweite λ haben, können wir die Querkräfte aber einfacher nach Fig. 119d darstellen: Unter dem ersten Knotenpunkte wird die Strecke

$$A'C = \frac{1}{2} p (l - \lambda)$$

aufgetragen, dann Verbindungslinie CB', Punkt D vertikal unter Punkt *2*, Horizontale DE, Verbindungslinie EB' und hierdurch Punkt F bestimmt. Dann ist:

$$FF' = \underset{+}{Q}_{(1-2)} \, .$$

[Beweis: Es ist, wie leicht zu sehen, $FF' = \frac{1}{2} p \frac{x_2'^2}{l - \lambda}$. Dieses ist aber nach § 29, II der analytische Ausdruck für $\underset{+}{Q}_{(1-2)}$.]

In derselben Weise ist in Fig. 119d für jedes Feld die größte positive Querkraft bestimmt (stets am rechten Endpunkte).

2. Darstellung der Diagonalen und Vertikalen.

Aus den Querkräften folgen D und V. Die V sind direkt durch die Querkräfte dargestellt. Nur muß genau darauf geachtet werden, zu welchem (belasteten) Felde die betreffende Vertikale gehört. [In Fig. 119 ist Belastung am Obergurt angenommen.] Für die Diagonalen ziehen wir bei jeder Querkraft durch den einen Endpunkt die Parallele zu D, durch den anderen Endpunkt eine Horizontale. Dann ist die Hypotenuse des entstandenen rechtwinkligen Dreieckes gleich $\frac{Q}{\sin\varphi} = D$.

Hinsichtlich der Vorzeichen sei erinnert: Eine **positive** Querkraft (die also an dem links vom Schnitte befindlichen Trägerteil nach oben wirkt) bringt in einem Felde

mit *links*steigender Diagonalen $\left\{\begin{array}{l}\text{in der Diagonalen } \textit{Zug} \\ \text{„ „ Vertikalen } \textit{Druck}\end{array}\right\}$,

mit *rechts*steigender „ $\left\{\begin{array}{l}\text{in der Diagonalen } \textit{Druck} \\ \text{„ „ Vertikalen } \textit{Zug}\end{array}\right\}$ hervor.

Umgekehrt wirkt eine **negative** Querkraft.

In Fig. 119d sind nun nach dieser Regel die Spannkräfte D und V aus der größten positiven Querkraft eines jeden Feldes bestimmt. Hiermit ist *rechts*seitige Belastung erledigt.

Gleichzeitig sind hiermit aber auch die Spannkräfte für *links*seitige Belastung erledigt, da man nur zwei symmetrisch gelegene Stäbe miteinander zu vertauschen braucht.

Somit ist für jeden Stab die größte positive und die größte negative Spannkraft dargestellt. [Nur V_8 muß in bekannter Weise besonders bestimmt werden, gleich $-p\lambda$.]

Zusatz. Bei Parallelträgern faßt man mitunter die Berechnung infolge beweglicher Last p zusammen mit der infolge ständiger Last g.

Für die Gurtstäbe zeichnet man dann also eine Parabel mit der Pfeilhöhe $f = \frac{1}{8}(p+g)\frac{l^2}{h}$.

Für die Füllungsstäbe trägt man zunächst von einer Achse $A'B'$ (Fig. 119e) die Querkräfte Q_g infolge der ständigen Belastung g auf. Diese ergeben, wie in Band I, § 64, Fig. 108°, gezeigt wurde, eine Treppenlinie. Sie sind für die linke Trägerhälfte positiv, für

die rechte negativ. Die positiven sind nach unten, die negativen nach oben aufgetragen.

Nun trägt man von derselben Achse aus die Querkräfte Q_p infolge rechtsseitiger beweglicher Belastung auf (also die größten positiven Querkräfte infolge p). Und zwar nach oben. In den Feldern, in denen Q_g und Q_p dasselbe Vorzeichen haben, ist dann die gesamte Querkraft Q_t gleich der Summe der beiden Strecken Q_g und Q_p. In den anderen Feldern ist Q_t gleich der Differenz von Q_g und Q_p und kann positiv oder negativ herauskommen.

Aus den Querkräften Q_t ergeben sich dann nach Fig. 119e die Spannkräfte der Füllungsstäbe, und zwar sind dieses also die Spannkräfte infolge ständiger Belastung auf dem ganzen Träger + beweglicher Belastung *rechts* vom Schnitt. Der andere zu untersuchende Fall (ständige Belastung und *links*seitige bewegliche Belastung) ergibt sich ohne besondere Berechnung durch Vertauschung von je zwei spiegelbildlich liegenden Stäben.

Man sieht, daß die Diagonale D_3 bei rechtsseitiger Belastung Zug, bei linksseitiger Belastung Druck bekommt (nämlich $= D_3'$). Umgekehrt die Diagonale D_3'. Die anderen Diagonalen bekommen nur Zug. Es brauchen also in Fig. 119e die Diagonalen D_1' und D_2' gar nicht bestimmt zu werden, da sie dasselbe Vorzeichen wie D_1 und D_2, dabei aber kleinere Spannkräfte haben.

§ 41.

Beispiele zu § 39, 40.

Erste Aufgabe.

Der „Fischbauchträger“ Fig. 118 ist für eine gleichmäßig verteilte bewegliche Last $p = 0{,}68$ t/m zu berechnen!

Feldweite $\lambda = 4{,}40$ m, Spannweite $l = 5 \cdot \lambda = 22{,}00$ m. Höhe in der Mitte $h = 3{,}90$ m. Die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen auf einer Parabel. [Hiernach zeichne man den Träger maßstäblich auf.]

1) **Gurtstäbe.** Wir berechnen zunächst den Wert

$$f' = \frac{1}{8}\,\frac{p\,l^2}{\lambda} = \frac{1}{8}\,\frac{0{,}68(5\,\lambda)^2}{\lambda} = 9{,}35 \text{ t.}$$

Dieser Wert wurde nun von einer Horizontalen aus aufgetragen, und zwar im Maßstabe 1 cm = 5 t; also $f' = 1{,}87$ cm; hierauf nach Fig. 118b für die Belastungspunkte *2* und *4* die Parabelordinaten konstruiert und deren Endpunkte miteinander ver-

bunden. Hierdurch entsteht dann die gesamte $(M : \lambda)$-Fläche (Fig. 118b, rechte Seite).

Nun wird in der Systemfigur durch den Bezugspunkt eines jeden Stabes eine vertikale Linie gezeichnet, auf dieser die zugehörige Ordinate der $(M : \lambda)$-Fläche aufgetragen und durch deren Endpunkt die Parallele zu dem Stabe gezogen. Diese Parallele stellt dann die betreffende Stabkraft in dem gewählten Maßstabe, 1 cm = 5 t, dar.

Die den Stab U_0 darstellende Linie $\overline{lm}$ (Fig. 118a, rechte Seite) ist nur über ein halbes Feld gezogen, da sie so in die Systemfigur besser hineinpaßt. Dafür ist sie dann beim Abmessen doppelt zu nehmen. Hiermit sind die Gurtstäbe bestimmt. [Der Leser führe die Zeichnung **maßstäblich** aus und kontrolliere sie analytisch.]

2) Füllungsstäbe. Wir berechnen zunächst den Wert

$$\frac{1}{2} p\, l = \frac{1}{2} 0{,}68 \cdot 22{,}0 = 7{,}48 \text{ t}.$$

Dieser Wert wurde als Strecke $A'C$ aufgetragen, und zwar wurde für die Füllungsstäbe der Maßstab 1 cm = 3 t gewählt; also $A'C = 2{,}5$ cm (Fig. 118d). Der Endpunkt C dieser Strecke wird dann mit dem Punkte B' verbunden. Nun wird von jedem Felde der *linke* Knotenpunkt hinuntergelotet bis zum Schnitt mit CB', dieser Schnittpunkt horizontal nach $A'C$ übertragen und von hier aus die Verbindungslinie mit B' gezogen. Diese letztere Verbindungslinie schneidet auf der durch den *rechten* Endpunkt des betreffenden Feldes gezogenen Vertikalen denjenigen Auflagerdruck A ab, der bei *rechts*seitiger Belastung des Feldes entsteht. Der Auflagerdruck ist also immer am rechten Endpunkte des Feldes dargestellt.

Aus den Auflagerdrücken ergeben sich dann nach der *Culmann*schen Methode sämtliche Füllungsstäbe infolge rechtsseitiger Belastung. Natürlich muß man genau darauf achten, zu welchem Felde jeder Stab gehört und dann den Auflagerdruck dieses Feldes nehmen.

Durch Vertauschung je zweier spiegelbildlich gelegenen Stäbe ergeben sich auch die Spannkräfte infolge linksseitiger Belastung; d. h. man erhält für jeden Füllungsstab den größten Zug und größten Druck. [Der Leser führe die Zeichnung nach Fig. 118d–h maßstäblich aus und kontrolliere sie analytisch nach § 35, II.]

Zweite Aufgabe.

Der Parallelträger Fig. 119a ist für Eigengewicht $g = 0,4$ t/m und eine bewegliche Belastung von $p = 0,8$ t/m zu berechnen!

Feldweite $\lambda = 2,0$ m; Spannweite $l = 6 \cdot \lambda = 12,0$ m; Höhe $h = 1,7$ m.

1) **Gurtstäbe.** Man zeichne eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$f = \frac{1}{8}(g + p)\frac{l^2}{h} = \frac{1}{8}(0,4 + 0,8)\frac{12,0^2}{1,7}$$
$$= 12,7 \text{ t.}$$

Die Ordinaten dieser Parabel an den einzelnen Bezugspunkten ergeben die betreffenden Gurtkräfte.

2) **Füllungsstäbe.** Zunächst zeichnen wir die Querkräfte infolge ständiger Belastung $g = 0,4$ t/m. Wir tragen also in den Punkten A' und B' einer Nullachse $A'B'$ (Fig. 119e) je den Wert

$$\frac{1}{2} g l = \frac{1}{2} 0,4 \cdot 12,0 = 2,4 \text{ t}$$

auf, und zwar zu verschiedenen Seiten der Nullachse. (Gewählter Maßstab: 1 cm = 2 t; also 1,2 cm anzutragen.) Dann ziehen wir die schräge Linie, die durch die Mitte von $A'B'$ hindurchgeht, loten nun die Mitten der einzelnen Felder hinunter und erhalten hierdurch die Treppenlinie, die die Querkräfte infolge ständiger Last angibt. Unter jedem Felde des Trägers ist also durch die schraffierte Fläche (Querkraftfläche) seine Querkraft Q_g dargestellt. Für die linke Hälfte ist Q_g positiv, für die rechten Felder negativ.

Nun zeichnen wir in demselben Maßstabe die Querkräfte infolge beweglicher Last $p = 0,8$ t/m. Und zwar für jedes Feld infolge rechtsseitiger, ungünstigster Laststellung. Wir tragen also (Fig. 119d) unter dem rechten Endpunkte des ersten Feldes den Wert

$$\frac{1}{2} p (l - \lambda) = \frac{1}{2} 0,8 \cdot 10,0 = 4,0 \text{ t}$$

als Strecke $A'C$ auf. Der Maßstab ist jetzt bereits vorgeschrieben zu: 1 cm = 2 t; also ist $A'C = 2,0$ cm darzustellen. Nun verbinden wir C mit B'. Dann wird von jedem Felde der *rechte* Endpunkt hinuntergelotet bis zum Schnitt mit CB'; dieser Schnittpunkt wird auf $A'C$ projiziert und die Verbindungslinie mit B' gezogen. Letztere Verbindungslinie schneidet auf der durch den *rechten* Endpunkt des betreffenden Feldes gezogenen Vertikalen die größte Querkraft dieses Feldes infolge *rechts*seitiger Belastung ab. Die größte positive Querkraft eines Feldes infolge der be-

weglichen Last p ist also stets unter dem rechten Endpunkte dieses Feldes dargestellt.

Diese Werte Q_p, die sämtlich positiv sind, werden nun an die Werte Q_g von Fig. 119e angetragen, und zwar am rechten Endpunkte eines jeden Feldes. Da die positiven Werte von Q_g nach unten von $A'B'$ liegen, werden die Werte Q_p von $A'B'$ aus nach oben aufgetragen. Dann addieren sich nämlich direkt die positiven Q_p mit den positiven Q_g (Fig. 119e bei Feld *0—1*, *1—2* und *2—3*). Und die negativen Werte von Q_g subtrahieren sich von selber von den Werten Q_p (Fig. 119e bei Feld *3—2'*, *2'—1'* und *1'—0'*; für das letztere ist $Q_p = 0$). Die gesamte Querkraft Q_q eines Feldes infolge ständiger Last g und ungünstigster *rechts*seitiger Belastung p ist also stets auf dem rechten Ende dieses Feldes dargestellt und ist zu messen zwischen dem Endpunkte der Ordinate Q_g und dem Endpunkte der Ordinate Q_p. Für die linke Trägerhälfte ist Q_q positiv; für die rechte Hälfte positiv oder negativ, je nachdem Q_p oder Q_g überwiegt.

Aus den Werten Q_q sind dann D und V bestimmt. In Fig. 119a gehören D_1 und V_1 zu der Querkraft des Feldes *0—1*; D_2 und V_2 zu Feld *1—2* usw. V ist direkt gleich Q. D wird aus Q durch Ziehen einer Parallelen gefunden.

Sobald für ein Feld der rechten Trägerhälfte die Gesamtquerkraft Q_q negativ herauskommt, brauchen wir die zu diesem Felde gehörigen Stäbe D und V gar nicht erst zu bestimmen. Denn diese Stäbe haben dann dasselbe Vorzeichen wie die entsprechenden Stäbe der linken Trägerseite. (Links positive Querkraft und linkssteigende Diagonalen; rechts negative Querkraft und rechtssteigende Diagonalen. Das Vorzeichen bleibt sich also gleich.) Die Spannkraft ist aber geringer. Nur wenn sich für ein rechtes Feld ebenfalls eine positive Querkraft ergibt, erhält die betreffende (rechtssteigende) Diagonale bzw. Vertikale ein anderes Vorzeichen als die entsprechend gelegene (linkssteigende) Diagonale der linken Seite. Dann müssen also beide Diagonalen bestimmt werden, um den größten Zug und größten Druck zu erhalten. (Es kommen hierbei immer die Diagonalen der mittleren Felder in Betracht.)

Der Leser führe die Zeichnung maßstäblich aus und kontrolliere sie analytisch. Die Zwischenvertikale V_3 erhält ihre größte Spannkraft bei größter Belastung des Knotenpunktes (*3*); also $V_3 = -(g + p)\lambda = -1{,}20 \cdot 2{,}0 = -2{,}40$ t.

§ 42.

Träger mit gebogener Gurtung bei Einzellasten.

I. Gurtstäbe.

Ausgangsformeln:

$$\text{(I)} \qquad O, U = \mp \frac{M}{h \cdot \cos}.$$

1. Darstellung der Momente.

Die größten Momente der verschiedenen Querschnitte werden in bekannter Weise zeichnerisch mittels Seilpolygon bestimmt (vgl. Band I, § 69, Fig. 120 und 122). Für den in Fig. 120 dar-

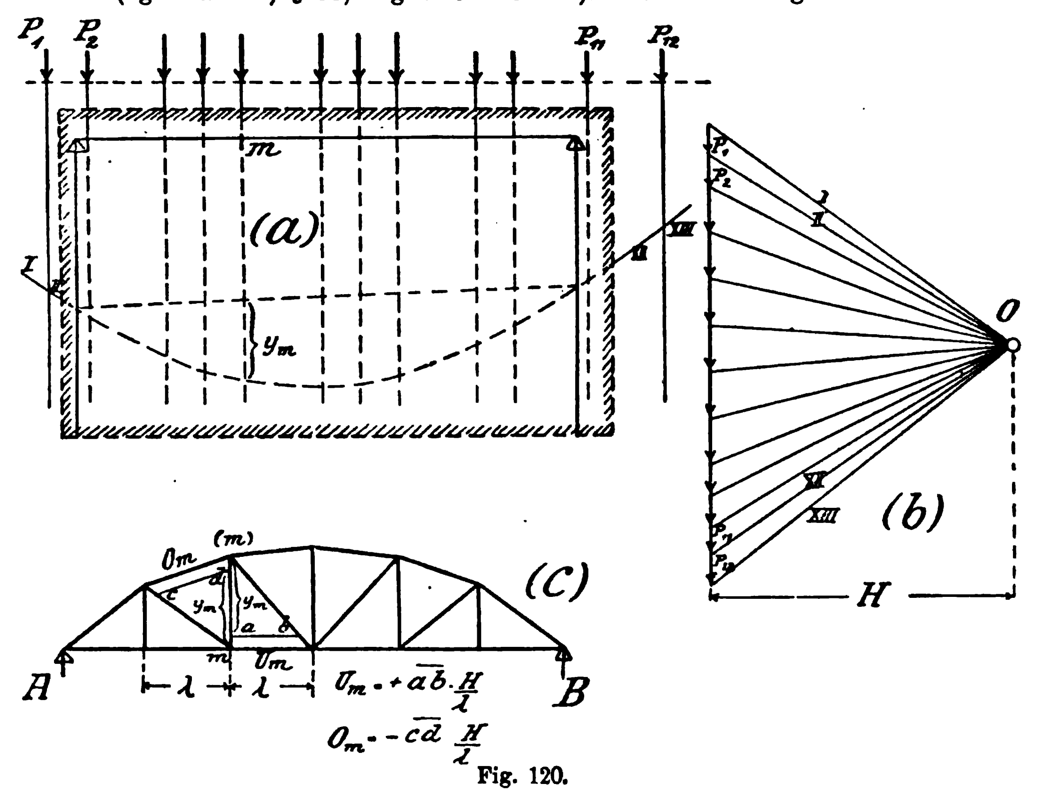


Fig. 120.

gestellten Träger würde sich die Ermittlung folgendermaßen gestalten: Zunächst wird der Lastenzug horizontal aufgezeichnet, und zwar so lang, daß wir den Träger unter diesem Lastenzug hin und her schieben können. Die Zuganordnung (falls diese noch variabel ist) wird so getroffen, daß die schwersten Lasten möglichst zu einer Gruppe von nahe beieinander stehenden Kräften vereint

sind, an die sich dann die leichteren Lasten anschließen. Dann werden die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander gereiht und das Seilpolygon gezeichnet (Fig. 120b und a).

Um nun das größte Moment für den Knotenpunkt m zu finden, wird der Träger auf ein Stück Pauspapier gezeichnet (in Fig. 120a schraffiert), auf diesem der Punkt m markiert und durch die Auflager die Vertikalen gezogen. Dann legt man den Träger so unter die Lasten, daß über Punkt m eine möglichst schwere Last steht und außerdem in der Nähe von m möglichst viel schwere und eng zusammenstehende Lasten sich befinden. Die Schnittpunkte, in denen die (auf dem Pauspapier gezeichneten) Auflagervertikalen das Seilpolygon treffen, werden durch die Schlußlinie verbunden (die man zunächst noch nicht einzeichnet, sondern durch ein angelegtes Lineal markiert) und hierdurch der Abstand y_m bestimmt. Dann ist das bei dieser Laststellung entstehende Moment

$$M_m = H \cdot y_m .$$

Da aber nicht sicher ist, daß diese Laststellung auch wirklich das größte Moment ergibt, so verschieben wir das Pauspapier so, daß der Punkt m unter eine andere Last gelangt, markieren die neue Schlußlinie und haben hiermit den neuen Abstand y'_m. Ist nun der frühere Abstand y_m (den wir im Stechzirkel behalten haben) größer als y'_m, so ergibt die erste Stellung das größere Moment, und umgekehrt. Auf diese Weise probiert man die in Betracht kommenden Stellungen aus (meistens nicht mehr als zwei oder drei). Für die das größte Moment ergebende Stellung wird dann der Träger endgültig mit der Schlußlinie und dem Abstande y unter die Lasten eingetragen. Somit ist Punkt m erledigt.

In derselben Weise werden für die anderen Knotenpunkte die größten Momente bestimmt.

2. Darstellung der Stabkräfte.

Da nun die Momente bestimmt sind, kann die weitere Behandlung der Aufgabe genau so erfolgen wie beim Träger mit verteilter Belastung (vgl. Fig. 118a): Um den Stab U_m in Fig. 120c zu bestimmen, ziehen wir durch den Bezugspunkt m dieses Stabes eine vertikale Linie (in der Systemfigur bereits vorhanden). Auf dieser tragen wir jetzt aber zweckmäßig nicht das Moment M_m bzw. den Wert $(M_m : \lambda)$ auf, sondern einfach die zugehörige Ordinate y_m aus dem Seilpolygon, und ziehen durch deren End-

punkt die Parallele zu U_m. Dann besteht folgende Beziehung: Hätten wir M_m aufgetragen, so wäre nach § 39, I die Parallele $\overline{ab} = \lambda \cdot U_m$. Jetzt haben wir aber nur y_m aufgetragen; das ist der H te Teil von M_m (denn es ist $M_m = H \cdot y_m$, also $y_m = M_m : H$). Folglich bekommen wir auch nur den H ten Teil des Resultates; d. h. es ist

$$\overline{ab} = \lambda\, U_m \cdot \frac{1}{H}\,.$$

Hieraus folgt für U_m der Wert:

$$\text{(II)} \qquad U_m = \overline{ab} \cdot \frac{H}{\lambda}\,.$$

Entsprechend (Fig. 120c):

$$\text{(IIa)} \qquad O_m = \overline{cd} \cdot \frac{H}{\lambda}\,.$$

In derselben Weise sind die anderen Gurtstäbe zu bestimmen. Zur Bequemlichkeit der Rechnung wird man natürlich die Polweite H als ein Vielfaches der Feldweite λ nehmen.

Maßstab. Zunächst wird für die Kräfte ein Maßstab angenommen, nach dem sie in Fig. 120b dargestellt werden. Hierauf wird die Polweite H als ein Mehrfaches der Feldweite λ genommen, z. B. H gleich $4\,\lambda$, und diese Strecke H im Längenmaßstab der Figur aufgetragen. Dann ergeben die Längen $\overline{ab}$ usw. in demselben Maßstabe, in dem die Lasten aufgetragen wurden, die Spannkräfte.

II. Füllungsstäbe.

Ausgangsformeln:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} D = A \cdot D_A & \text{bei Grundstellung,} \\ D = A \cdot D_A + P' \cdot D_{P'} & \text{„ vorgezogener Stellung,} \end{cases}$$

usw.

1. Darstellung der Auflagerdrücke.

Die Auflagerdrücke werden bei Einzellasten graphisch mittels A-Polygon bestimmt (vgl. Band I, § 21, II, Fig. 50f). Die Konstruktion ist bekanntlich folgende: Wir denken uns den Lastenzug von B aus bis A vorgefahren (Fig. 121b) und bestimmen hierdurch zunächst, wieviel Lasten auf der Brücke Platz haben. Diese Lasten werden nun (in einem zu wählenden Kräftemaßstabe) auf der Vertikalen durch A aufgetragen (Fig. 121e), wobei die Reihenfolge so ist, daß die erste Last von Fig. 121b bei der Aufreihung in Fig. 121e zu unterst kommt. Dann tragen wir in Fig. 121e die Abstände a, b usw. der Lasten von rechts nach links an

(d. h. wir kehren den Zug von Fig. 121b gewissermaßen um) und zeichnen das Seilpolygon, das in diesem Falle den Namen *A-Polygon* führt. Denn es hat folgende Eigenschaft: Ist der Lastenzug P_1, P_2 usw. von B aus bis zu irgendeiner Stelle vorgerückt (Fig. 121c), so ergibt die unter der ersten Last gemessene Ordinate des A-Polygons den durch diese Laststellung hervorgerufenen Auflagerdruck A an. Der Maßstab, in dem diese Ordinate abzumessen ist, ist derselbe, in dem die Kräfte P_1, P_2 usw. aneinander gereiht wurden.

Um die Auflagerdrücke möglichst groß zu erhalten, wird man natürlich bei der Zuganordnung die schwersten Lasten an die Spitze nehmen.

Auf diese Weise sind die Auflagerdrücke einfach darzustellen.

[Man halte A-Polygon und Einflußlinie für A auseinander. Das erstere gibt für einen bestimmten Lastenzug unter der ersten Last den gesamten Auflagerdruck an. Bei letzterer können die Lasten beliebig gruppiert werden und man muß, um zu jeder Gruppierung den Auflagerdruck A zu erhalten, jede Last einzeln mit ihrer Ordinate multiplizieren.]

2. Darstellung der Stabkräfte.

a) Genaues Verfahren (Berücksichtigung von vorgezogenen Stellungen). Das Verfahren werde an den Stäben V_2 und V_2' von Fig. 121a erläutert.

α) *Aufsuchung der gefährlichen Laststellung.*

Um für den Stab V_2 die maßgebende Laststellung zu finden, beginnen wir mit (rechtsseitiger) Grundstellung. Wir lassen also den Zug bis zu dem zu V_2 gehörigen Schnitte β—β vorfahren (Fig. 121c). Der bei dieser Stellung entstehende Auflagerdruck ergibt sich aus dem A-Polygon gleich A_3. Nun schieben wir den Zug vor (Fig. 121d) und messen den jetzt entstehenden Auflagerdruck A gleich A_3'. Der Unterschied der beiden Auflagerdrücke ergibt sich dann durch Ziehen einer Horizontalen:

$$A_3' - A_3 = \varDelta A_3 \quad \text{(Fig. 121e).}$$

Um diesen Betrag hat also der Auflagerdruck A durch das Vorziehen der Belastung zugenommen.

Nun ist aber durch das Vorziehen des Zuges noch eine Last P' in dem links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte *2* entstanden. Die Größe dieser Kraft finden wir graphisch, indem wir für das Feld λ ein besonderes kleines A-Polygon zeichnen Fig. 121f).

Ist dann die Last P_1 um die Strecke a in das Feld λ hineingerückt, so ergibt das A-Polygon Fig. 121f den Auflagerdruck P_I', der auf Punkt *2* entfällt. Die Bezeichnung P_I' soll andeuten, daß es sich um *einmal* vorgezogene Stellung handelt. [Dieses kleine A-Polygon kann man natürlich auch direkt in die linke Ecke von Fig. 121e, wo bereits die Lasten P_1 usw. vorhanden sind, einzeichnen. Es genügt

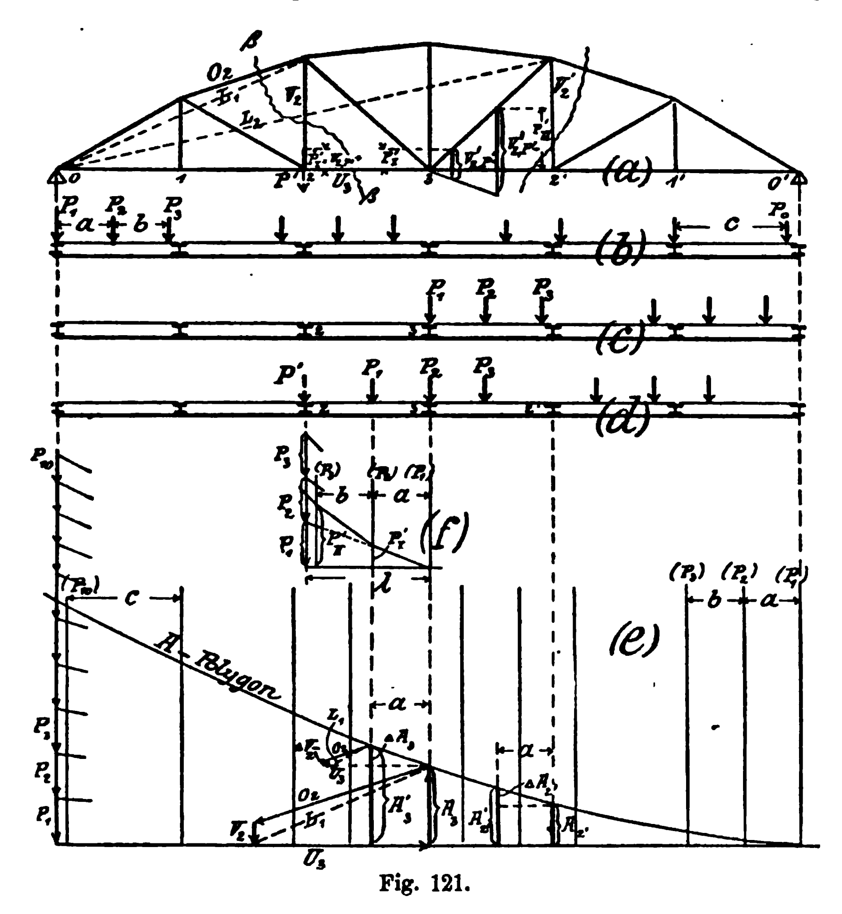


Fig. 121.

die Berücksichtigung von 1—2—3 Lasten, da mehr in ein Feld λ gar nicht hineingehen. Bei kleinen Feldweiten geht dieses Polygon in ein einfaches Dreieck über, da dann nur die erste Last P_1 zu berücksichtigen ist.]

Insgesamt haben wir also durch das Vorziehen der Belastung folgende Änderung: Der Auflagerdruck A_3 ist gewachsen um ΔA_3, im linken Knoten *2* ist eine Last P_I' entstanden. Beide Werte sind in Fig. 121e bzw. f dargestellt.

Nun bestimmen wir den Zuwachs der Spannkraft V, der durch diese beiden Änderungen ΔA_3 und P_I' entsteht. Der durch

ΔA_3 hervorgerufene Zuwachs werde $\Delta V_{2,A}$ genannt. Der durch P_l' hervorgerufene Zuwachs heiße $V_{2,P'}$.

Den ersteren Zuwachs finden wir graphisch nach *Culmann*, indem wir in der Systemfigur die Hilfslinie L_1 ziehen und dann den Auflagerdruck ΔA_3 in Fig. 121e zunächst nach U_3 und L_1, und L_1 weiter nach O_2 und V_2 zerlegen. Hierdurch erhalten wir den Zuwachs $\Delta V_{2,A}$, der zu dem Zuwachs ΔA_3 der Auflagerkraft gehört.

Der zweite Zuwachs wird ebenfalls nach *Culmann* gefunden. Wie wir es mit diesen kleinen Zerlegungsfiguren meistens getan haben, zeichnen wir sie direkt in die Systemfigur ein (Fig. 121a). Die Ermittelung von $V_{2,P'}$ gestaltet sich in diesem Falle besonders einfach, da das *Culmann*sche Viereck in eine gerade Linie übergeht (U_3 und O_2 werden spannungslos, V_2 nimmt P_l' direkt auf). Wir erhalten: $V_{2,P'} = +P_l'$.

Nun vergleichen wir $\Delta V_{2,A}$ mit $V_{2,P'}$. Ihre Vorzeichen sind entgegengesetzt (Fig. 121e und f); und zwar hat $\Delta V_{2,A}$ augenscheinlich immer dasselbe Vorzeichen, wie die Spannkraft V überhaupt infolge des Auflagerdruckes A hat. Die Spannkraft, die bei Grundstellung entsteht, wird also durch das Vorziehen vergrößert um den Betrag $\Delta V_{2,A}$ und vermindert um den Betrag $V_{2,P'}$. Hieraus folgt sofort:

(IV) $\begin{cases} \text{Ist } \Delta V_{2,A} < V_{2,P'}, \text{ so ist Grundstellung maßgebend,} \\ \text{,, } \Delta V_{2,A} > V_{2,P'}, \text{ ,, ,, vorgez. Stellg. ,, .} \end{cases}$

Zusammenfassend haben wir also folgendes: Wir zeichnen in dem A-Polygon die zu dem Schnitte β—β gehörigen Auflagerdrücke A (bei Grundstellung) und A' (bei vorgezogener Stellung) ein, ermitteln ihre Differenz ΔA und bestimmen nach *Culmann* die hierzu gehörige Spannkraft ΔV_A. Dann bestimmen wir (mittels eines kleinen A-Polygons) den durch das Vorziehen im linken Knotenpunkte entstehenden Druck P' und (nach *Culmann*) die durch P' im Stabe V hervorgerufene Spannkraft $V_{P'}$. Aus dem Vergleiche von ΔV_A und $V_{P'}$ nach den obigen Formeln (IV) ergibt sich dann, welche Stellung maßgebend ist.

Falls sich vorgezogene Stellung ergibt, muß noch weiter untersucht werden, ob ein- oder zweimal vorzuziehen ist. Dann muß also der neue Auflagerdruck A_3'' gezeichnet und hieraus die Differenz $A_3'' - A_3'$ bestimmt werden. Ferner die Kraft P_{ll}', die bei zweimal vorgezogener Stellung links vom Schnitte auftritt (Fig. 121f). Nun wird wieder einerseits die zu $(A_3'' - A_3')$, andrerseits die zu P_{ll}' gehörige Spannkraft bestimmt. Aus dem Vergleiche

dieser beiden Spannkräfte erfährt man dann, ob durch das zweimalige Vorziehen eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Stabkraft entsteht.

In Fig. 121 ergibt sich für die Vertikale V_2, daß Grundstellung maßgebend ist. Für V_2' ist die Untersuchung ebenfalls in Fig. 121 angedeutet. Wenn man sie vollständig durchführt, so ergibt sich, daß vorgezogene Stellung maßgebend ist. Dann muß also noch weiter untersucht werden, ob ein- oder zweimal vorgezogene Stellung zugrunde zu legen ist. Für erstere ist die Kraft P_I', für letztere P_{II}' zu nehmen. [Die Kräfte P_I' und P_{II}' bleiben für alle Felder gleich, da — gleiche Feldweiten vorausgesetzt — das gleiche Polygon Fig. 121f für alle Felder zu verwenden ist.]

β) Bestimmung der Stabkräfte.

Sobald über die gefährliche Laststellung entschieden ist, ist die eigentliche Bestimmung der Stabkräfte ein leichtes. In Fig. 121 hatte sich für den Stab V_2 Grundstellung ergeben. Dann wird einfach zu dem zugehörigen Auflagerdruck A_3 ein *Culmann*sches Viereck gezeichnet (Fig. 121e), und die Stabkraft ist bestimmt. Hätte sich vorgezogene Stellung ergeben, so würde man zunächst zu A_3' die Zerlegungsfigur zeichnen. Von der sich hierbei ergebenden Spannkraft muß dann aber noch die durch P_I' hervorgerufene Spannkraft abgezogen werden, um die richtige Spannkraft V zu erhalten.

In entsprechender Weise hat man zu verfahren, falls zweimal vorgezogene Stellung zu berücksichtigen ist.

Bisher haben wir nur rechtsseitige Belastung betrachtet. Dies genügt auch. Denn die Wirkung der linksseitigen Belastung eines Stabes ist wegen der Symmetrie gleich der Wirkung der rechtsseitigen Belastung bei dem spiegelbildlich gelegenen Stabe.

b) Annäherungsverfahren. Da die Untersuchung der vorgezogenen Stellung ziemlich umständlich ist, rechnet man bei weniger wichtigen Konstruktionen auch nur mit Grundstellung. Dann muß man aber bei der ersten Last der Sicherheit wegen einen Zuschlag (von mindestens 50 %) machen. Trotzdem kann es vorkommen, daß die Annährungsmethode zu kleine Spannkräfte ergibt.

Übungsaufgabe: Der Leser berechne nach dieser graphischen Methode den in Fig. 121a gezeichneten Träger. Spannweite $l = 6 \cdot 4{,}0 = 24{,}0$ m, Höhe $h = 4{,}30$ m. Knotenpunkte des Obergurtes auf einer Parabel. Belastung durch Eisenbahnzug (eingleisig).

§ 43.

Parallelträger mit Einzellasten.

I. Gurtstäbe.

Ausgangsformeln:

$$O, U = \mp \frac{M}{h}.$$

Die Momente werden wiederum mittels eines Seilpolygones gefunden, wobei für jeden Querschnitt mehrere Stellungen auszuprobieren sind. Die Polweite H wird jetzt aber als ein Vielfaches der Trägerhöhe h genommen. Denn es ist:

$$\text{(I)} \qquad O, U = \mp \frac{M}{h} = \frac{H \cdot y}{h},$$

$$\text{(II)} \qquad O, U = \mp y \cdot \frac{H}{h}.$$

Das heißt: Eine Gurtkraft ist gleich der zu dem betreffenden Bezugspunkte gehörigen Ordinate y des Seilpolygons, multipliziert mit dem Verhältnis von Polweite zu Trägerhöhe. Ist also H als das $k$fache von h genommen, so wird direkt:

$$\text{(IIa)} \qquad O, U = \mp k \cdot y.$$

II. Füllungsstäbe.

Ausgangsformeln:

$$\text{(III)} \qquad Q = \frac{D}{\sin\varphi}; \quad V = Q.$$

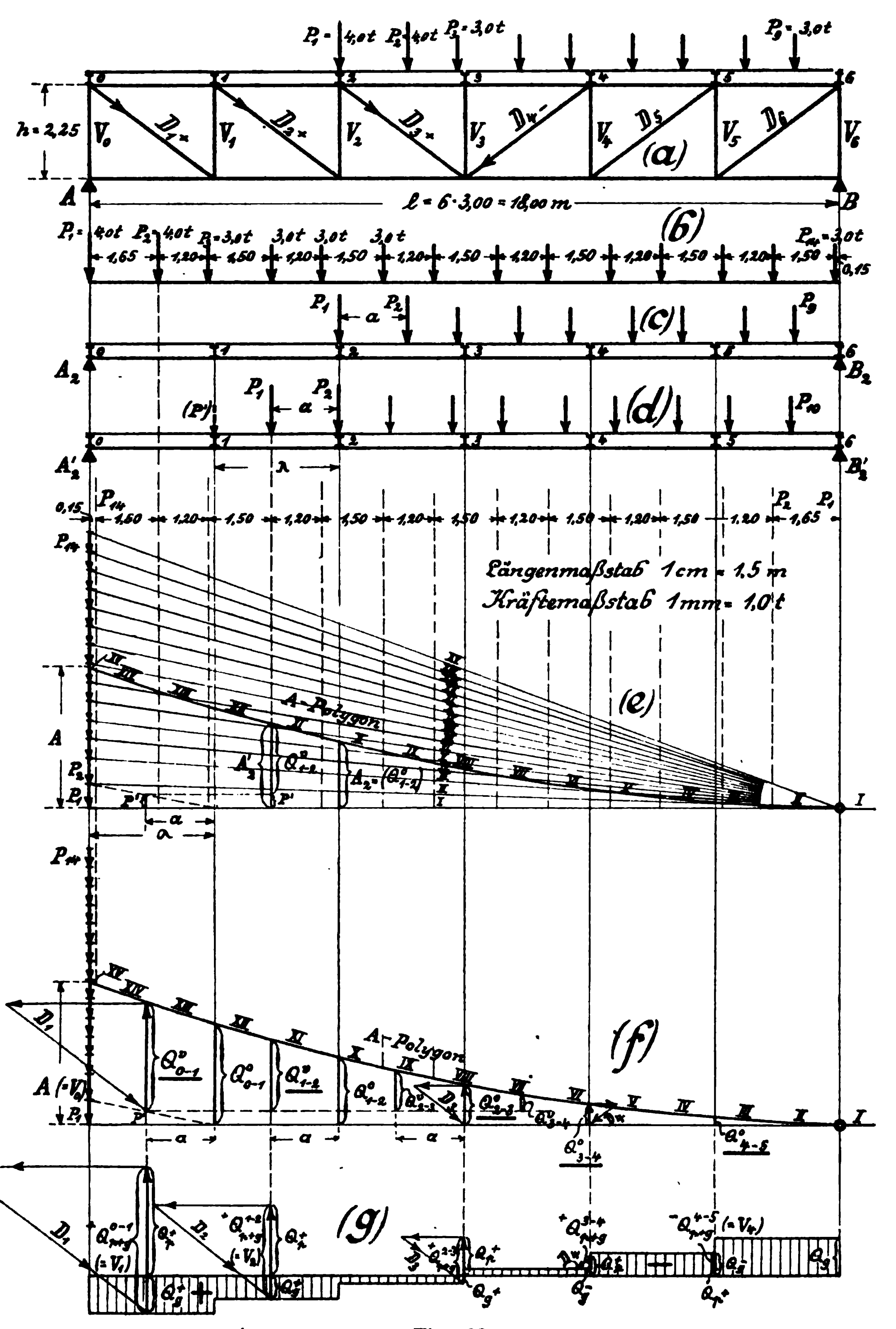
1. Darstellung der Querkräfte.

Zunächst zeichnen wir für die betreffende Belastung $P_1 \, . \, . \, P_4$ das A-Polygon (Fig. 122b und e). Ist nun die Belastung z. B. für das Feld *1—2* in Grundstellung (Fig. 122a und c), so ist die Querkraft Q^0_{1-2} gleich dem Auflagerdruck A_2, letzterer dargestellt durch die unter Punkt *2* gemessene Ordinate des A-Polygons. Rückt die Belastung in vorgezogene Stellung (Fig. 122d), so ist

$$Q^v_{1-2} = A'_2 - P' = A'_2 - P_1 \frac{a}{\lambda}.$$

Der Auflagerdruck A'_2 ist im A-Polygon direkt unter der Last P_1 vorhanden. Der abzuziehende Betrag P' ist in Fig. 122e in der linken Ecke durch eine kleine Hilfskonstruktion dargestellt (entsprechend dem Polygon Fig. 121f). Diese Strecke P' wird nun auf A'_2 hinüberprojiziert, so daß der obere Teil von A'_2 direkt die Differenz

$$A'_2 - P' = A'_2 - P_1 \frac{a}{\lambda} = Q^v_{1-2}$$



(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
h = 2,25
l = 6·3,00 = 18,00 m
Längenmaßstab 1 cm = 1,5 m
Kräftemaßstab 1 mm = 1,0 t
A-Polygon

Fig. 122.

angibt. Durch Vergleich von $Q^{\bullet}_{1-2}$ und $Q^{\prime}_{1-2}$ findet man dann, ob Grundstellung oder vorgezogene Stellung für das Feld die größere Querkraft abgibt.

In derselben Weise kann man entscheiden, ob eventuell zweimal vorgezogene Stellung maßgebend ist. Dann ist die Querkraft $Q = A'' - P'_{II}$, worin A'' der Auflagerdruk A bei der zweimal vorgezogenen Stellung und P'_{II} der Auflagerdruck des Punktes *1* ist. Analytisch ist

$$P'_{II} = \frac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda} \quad \text{(vgl. auch Fig. 121 f).}$$

Graphisch ergibt es sich mittels eines kleinen, zu der Feldweite λ gezeichneten A-Polygons. [Zweckmäßig in die linke Ecke von Fig. 122e einzuzeichnen, um dann P'_{II} einfach hinüberprojizieren zu können.] Zweimal vorgezogene Stellung kommt übrigens bei kleineren Parallelträgern selten vor.

Nach der vorbeschriebenen Methode sind nun für sämtliche Felder die größten Querkräfte infolge rechtsseitiger Belastung bestimmt. [Der Deutlichkeit wegen ist hierzu eine besondere Fig. 122f genommen.] Die für die einzelnen Felder maßgebenden Querkräfte sind unterstrichen.

2. Darstellung der Stabkräfte.

Aus den Querkräften ergeben sich die Füllungsstäbe. Die Vertikalen sind direkt gleich Q. Die Diagonalen werden gefunden durch Ziehen von Parallelen zu D. In Fig. 122a ist Belastung am Obergurt angenommen. Folglich gehört der Stab V_1 zum Felde *0*—*1*; usw. Hinsichtlich der Vorzeichen von D und V sei auf die Zusammenstellung in § 40 verwiesen.

Zusatz. Beim Parallelträger verbindet man bisweilen die Berechnung infolge Eigengewicht mit der infolge beweglicher Last. In Fig. 122g ist auch dies gezeigt. Die Querkräfte Q_g infolge einer ständigen Last ($g = 0{,}8$ t/m) sind in Fig. 122g durch die bekannte Treppenlinie dargestellt. Die Querkräfte Q_p infolge der (rechtsseitigen) Betriebslast sind aus Fig. 122f übernommen und an die Nullachse von Fig. 122g nach oben angesetzt. Die Querkräfte Q_p sind für jedes Feld positiv, da ja rechtsseitige Belastung die größte positive Querkraft erzeugt. Die Querkräfte Q_g sind für die einzelnen Felder teils positiv, teils negativ. Da nun in Fig. 122g einerseits die positiven Werte Q_g nach unten, die negativen Q_g nach oben hin abgetragen sind, andererseits die (positiven) Werte Q_p sämtlich nach oben aufgetragen sind, so

summieren sich von selber die positiven Q_g mit den positiven Q_p, und subtrahieren sich die negativen Q_g und positiven Q_p. Für jedes Feld erscheint also die größte Querkraft Q_{p+g} infolge Eigengewicht und rechtsseitiger Verkehrslast.

Aus diesen Werten Q_t sind dann D und V bestimmt. Hierbei wird die linke Trägerseite vollständig untersucht. Die rechte Seite aber nur so weit, als die Querkraft positiv ist. Sobald diese anfängt, negativ zu werden, stellt sich für die betreffenden Stäbe D und V dasselbe Vorzeichen ein, wie es die spiegelbildlich gelegenen Stäbe der linken Hälfte haben, während der Betrag der Spannkraft kleiner ist als für die linke Seite (vgl. § 41, Schluß). Die Spannkraft dieser Stäbe D und V bietet dann also weiter kein Interesse für die Dimensionierung des Bauwerkes.

§ 44.

Spezialfall: Träger mit zwei Lasten. Beispiel hierzu (Kranträger).

1. Die gefährlichen Laststellungen.

Für einen Träger mit nur zwei Lasten haben wir in § 38, an Hand der Einflußlinien Fig. 116, bestimmte Regeln aufgestellt, nach denen man für jeden Stab sofort die maßgebende Laststellung angeben kann:

a) Für einen *Gurtstab* muß die eine (schwerere) Last über dem Bezugspunkte stehen; die andere seitlich davon nach der Trägermitte zu.

b) Für einen *Füllungsstab* müssen die Lasten in Grundstellung stehen.

Beispiel: Bei dem in Fig. 123a gezeichneten Kranträger steht die eine Last über den Bezugspunkten (*1*) und *1*. Folglich ist diese Laststellung maßgebend für die Gurtstäbe U_2 und O_1. Ferner steht die Belastung in Grundstellung zu Feld *0*—*1*. Folglich ist diese Laststellung maßgebend für die Füllungsstäbe D_1 und V_1.

Aus dieser Einfachheit in der Laststellung ergibt sich zunächst für die Füllungsstäbe folgendes: Da für einen Füllungsstab nur Grundstellung in Frage kommt, haben wir links von seinem Schnitte immer nur den betreffenden Auflagerdruck A als einzige äußere Kraft. Wir können also direkt aus dem Auflagerdruck A durch Zeichnen einer einfachen *Culmann*schen Zerlegungsfigur die betreffende Kraft D oder V finden.

Nun haben wir aber vorhin an dem Beispiele gesehen, daß dieselbe Laststellung, die für zwei Füllungsstäbe (D_1 und V_1) maß-

gebend war, auch für zwei Gurtstäbe (O_1 und U_2) maßgebend ist. Wenn wir also D_1 und V_1 durch ein *Culmann*sches Viereck bestimmen, so können wir dieses Viereck auch gleichzeitig für O_1 und U_2 benutzen (vorausgesetzt daß diese beiden Stäbe in dem betreffenden Viereck vorkommen, was aber gerade der Fall ist). Wir haben also bei einem Fachwerke mit nur zwei Lasten die große Vereinfachung, daß die *Culmann*schen Zerlegungsfiguren,

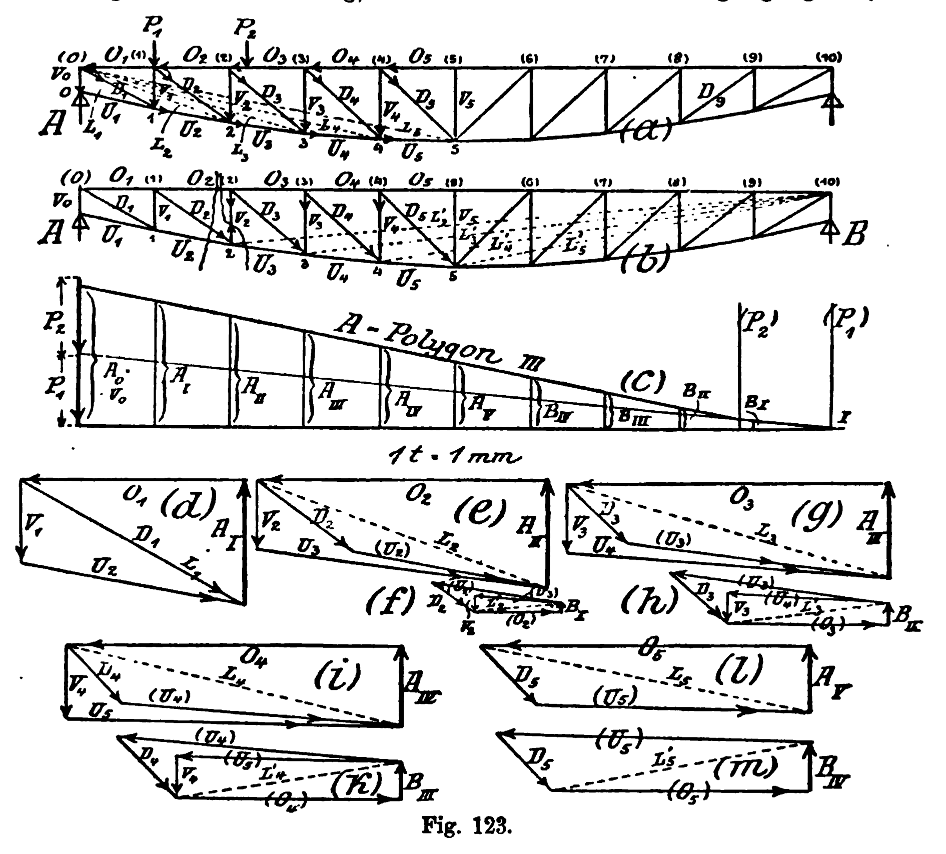


Fig. 123.

die für die Füllungsstäbe sowieso erforderlich sind, zugleich für die Gurtstäbe mitbenutzt werden können. Das ist der Kernpunkt dieses Verfahrens.

2. Bestimmung der Stabkräfte.

a) Rechtsseitige Belastung.

Um den Auflagerdruck A für alle Laststellungen zu haben, zeichnen wir zu den beiden Lasten P_1 und P_2 das A-Polygon Fig. 123c.

(0). Ist die Belastung vom linken Auflager aus bis zum Punkte *(0)* vorgerückt, so ist der bei dieser Laststellung entstehende Auflagerdruck dargestellt durch die unter der ersten (linken) Last gemessene Ordinate A_0 (Fig. 123 c). Dieses ist der größte Auflagerdruck, den das Lastensystem hervorbringen kann. Da sich aus dem Gleichgewicht des Punktes *0* direkt angeben läßt, daß die Spannkraft in der Vertikalen $V_0 = -A$ ist, so haben wir durch die Strecke A_0 gleichzeitig die größte im Stabe V_0 auftretende Kraft. Der Stab U_1 ist gleich Null.

(1). Nun stellen wir die Lasten so auf, daß das linke Rad über *(1)* steht. Diese Laststellung ist maßgebend für O_1, U_2, D_1 und V_1. Der jetzt entstehende Auflagerdruck ist in Fig. 123 c dargestellt durch die unter der linken Last gemessene Ordinate A_I des A-Polygons. Denken wir uns nun einen Schnitt durch die drei Stäbe O_1, D_1 und U_1 gelegt, so haben wir an dem links von diesem Schnitte liegenden Fachwerkteile (bestehend aus dem Stabe V_0) die vier Kräfte A_I, O_1, D_1 und U_1. Da A_I bekannt ist, können wir die drei anderen nach *Culmann* ermitteln: Wir bringen je zwei der Kräfte, z. B. A_I und O_1, und D_1 und U_1, zum Schnitt, verbinden die Schnittpunkte durch eine Gerade L_1 (zusammenfallend mit D_1), tragen A_I auf (Fig. 123 d) und ziehen durch Anfangs- und Endpunkt von A_I die Parallelen zu O_1 und L_1 ($= D_1$). Hiermit haben wir die Spannkräfte O_1 und D_1 bestimmt.

Außerdem legen wir aber bei dieser Laststellung noch einen Schnitt durch die Stäbe U_2, V_1 und O_1 und betrachten das Gleichgewicht des abgetrennten Teiles [Dreieck *0 (0) 1*]. An diesem greifen die vier Kräfte A_I, O_1, V_1 und U_2 an. Um V_1 und U_2 zu finden, verbinden wir den Schnittpunkt von A_I und O_1 mit dem Schnittpunkte von V_1 und U_2 durch die Gerade L_1. Die Zerlegung von A_I in O_1 und L_1 ist bereits in Fig. 123 d durchgeführt. Wir haben also nur noch L_1 in V_1 und U_2 zu zerlegen. Die Pfeile werden wieder so eingezeichnet, daß A_I, O_1, V_1 und U_2 ein geschlossenes Polygon ergeben. Hiermit sind auch die beiden Kräfte V_1 und U_2 bestimmt.

Statt V_1 und U_2 in dieser Weise zu ermitteln, hätten wir sie übrigens auch aus dem Gleichgewicht des Punktes *1* finden können. Denn von den vier an diesem Punkte angreifenden Kräften haben wir D_1 und U_1 schon vorher bestimmt (letztere Kraft hatte sich gleich Null ergeben), so daß wir die beiden noch fehlenden Kräfte V_1 und U_2 aus der Bedingung finden können, daß die vier Kräfte U_1, D_1, V_1 und U_2 ein geschlossenes

Polygon ergeben. Die Zeichnung stimmt natürlich mit der vorigen vollständig überein.

Somit haben wir sämtliche vier Kräfte O_1, D_1, V_1 und U_2, für die die Laststellung *I* maßgebend ist, mit Hilfe der Fig. 123d ermittelt.

(2). Nun stellen wir das Lastensystem so, daß die linke Last über Knoten (2) steht. Diese Laststellung ist die gefährliche für die vier Stäbe O_2, D_2, V_2 und U_3. Um diese zu bestimmen, denken wir uns durch die drei Stäbe O_2, D_2 und U_2 in Fig. 123a einen Schnitt gelegt. Bezeichnen wir den jetzt entstehenden Auflagerdruck mit A_{II} (Fig 123c), so bestimmen wir diese drei Kräfte, indem wir den Schnittpunkt von A_{II} und O_2 mit dem Schnittpunkt von D_2 und U_2 durch eine Gerade L_2 verbinden, dann A_{II} auftragen (Fig. 123e), durch Anfangs- und Endpunkt von A_{II} Parallele zu O_2 und L_2 ziehen und L_2 nach D_2 und U_2 zerlegen. Dann sind O_2, D_2 und U_2 ermittelt. [Letztere Spannkraft können wir jedoch nicht verwenden, da für U_2 nicht Stellung *II*, sondern Stellung *I* maßgebend ist. Sie ist deshalb in Klammern gesetzt.]

Um ferner V_2 und U_3 zu finden, legen wir einen Schnitt, der durch O_2, V_2 und U_3 geht und zeichnen das *Culmann*sche Viereck, oder aber wir ermitteln V_2 und U_3 aus der Gleichgewichtsbedingung des Punktes *2*.

Somit haben wir die vier Kräfte O_2, D_2, V_2 und U_3, für die die Stellung *II* die gefährliche ist, bestimmt. Die Pfeile dieser vier Kräfte zeichnen wir dann in Fig. 123a an den Knotenpunkten ein, an denen die Stäbe am linken Trägerteil angreifen, und bestimmen hieraus die Vorzeichen.

(3)—(5). In derselben Weise sind die zu den nächsten Auflagerdrücken (A_{III}, A_{IV} und A_V) gehörigen Spannkräfte bestimmt:

O_3, D_3, V_3 und U_4 aus Auflagerdruck A_{III} (Fig. 123g),
O_4, D_4, V_4 „ U_5 „ „ A_{IV} (Fig. 123i),
O_5, D_5 „ „ A_V (Fig. 123l).

b) Linksseitige Belastung.

Bisher haben wir nur rechtsseitige Belastung betrachtet. Dies genügt auch für die Gurtstäbe, da für diese immer nur eine Laststellung zu berücksichtigen ist. Für diese Stäbe ist also die Untersuchung hiermit erledigt.

Für die Füllungsstäbe muß aber noch linksseitige Belastung berücksichtigt werden, um sowohl den größten Zug als auch den

größten Druck zu erhalten. Entweder geschieht dies in der Weise, daß man nun auch die weiteren Füllungsstäbe (auf der rechten Trägerseite) für rechtsseitige Belastung untersucht und dann die spiegelbildlich gelegenen Stabkräfte austauscht, oder aber man beschränkt sich auf die linke Trägerseite und stellt die Lasten tatsächlich **links** von den Schnitten auf.

In Fig. 123 ist der letztere Weg gewählt, um die Fig. 123a nicht durch weitere Hilfslinien L undeutlich zu machen. Der jeweilige Auflagerdruck B ist aber aus dem A-Polygon Fig. 123c entnommen, da es Verschwendung gewesen wäre, noch ein B-Polygon zu zeichnen.

(*0*). Für die Stäbe D_1 und V_1 ist linksseitige Belastung nicht möglich, da der Teil links vom Schnitte mit dem Trägeranfang (*0*) zusammenfällt (Fig. 123b).

(*1*). Die Laststellung von (*0*) bis (*1*) ist als linksseitige Grundstellung maßgebend für die Stäbe D_2 und V_2. Der bei dieser Belastung entstehende Auflagerdruck B_I kann aus dem A-Polygon entnommen werden. [Denn der Auflagerdruck B für den Fall, daß die Lasten von A aus bis zum Punkte (*1*) vorgerückt sind, ist augenscheinlich gleich dem Auflagerdruck A für den Fall, daß die Lasten von B aus bis zum Punkte (*9*) vorgerückt sind.]

Um nun aus diesem Auflagerdruck B die Stabkraft D_2 zu finden, legen wir durch D_2 den Schnitt (der außerdem noch durch O_2 und U_2 geht), ziehen die Verbindungslinie L_2' und zerlegen (Fig. 123f) B_I nach O_2 und L_2' und hierauf L_2' nach D_2 und U_2. Zeichnet man die Pfeile ein, so sieht man, daß jetzt D_2 eine Druckkraft ist. Somit ist D_2 für linksseitige Belastung bestimmt.

Um V_2 zu bestimmen, legen wir einen Schnitt durch O_2, V_2 und U_2 und zeichnen das *Culmann*sche Viereck. Da die Verbindungslinie L_2' dieselbe bleibt, so ist Fig. 123f nur noch dadurch zu vervollständigen, daß wir jetzt L_2' nach V_2 und U_2 zerlegen. Der Pfeil von V_2 zeigt in Fig. 123f nach unten. Er muß also am Punkte (*2*), an dem die Vertikale V_2 am rechten Trägerteile angreift, nach unten eingezeichnet werden. V_2 ergibt sich hiermit als ein Zugstab (Fig. 123b).

Nachdem die beiden Kräfte D_2 und U_2 bestimmt waren, hätten wir übrigens V_2 auch aus dem Gleichgewicht von Punkt *2* ermitteln können, indem wir zu den vier Kräften U_2, D_2, V_2 und U_3 ein geschlossenes Polygon zeichnen. Die Figur ist dieselbe wie Fig. 123f. Nur bekommen wir dann für V_2 einen nach oben zeigenden Pfeil, in Übereinstimmung damit, daß der Zugstab V_2

in Fig. 123b auf seinen anderen Endpunkt, *2*, ebenfalls ziehend einwirkt.

(*2*)—(*4*). In entsprechender Weise sind in Fig. 123h, k und m die Lasten von links aus bis vor den Knoten (*2*), (*3*) und (*4*) angenommen und diejenigen Füllungsstäbe, für die die betreffende Laststellung maßgebend ist, bestimmt.

Die eingeklammerten Spannkräfte haben immer zu bedeuten, daß diese Kraft zwar beim Aufzeichnen der Zerlegungsfigur mit erscheint, aber nicht zu der betreffenden Laststellung gehört.

Auf diese Weise ist durch die *Culmann*schen Zerlegungsfiguren für jeden Stab seine größte Spannkraft bestimmt.

§ 45.

Besondere Konstruktionen.

In diesem Paragraphen wollen wir einige Konstruktionen besprechen, die eine mehr oder minder besondere Behandlung bei der statischen Untersuchung verlangen.

I. Konstruktionen mit Zwischenfachwerk.

Die allgemeine Theorie und die Berechnung von Konstruktionen mit Zwischenfachwerk für ständige Last ist bereits in § 18, II erledigt. [Beispiele: § 19, 5. und 6. Aufgabe; § 22, 10. Aufgabe (analytische Berechnung von Fig. 72 und 124a); § 22, 13. Aufgabe; § 45, Fig. 124f (Kräfteplan zu Fig. 72 und 124a).] Jetzt handelt es sich noch um die Darstellung des Einflusses der beweglichen Belastung. Am zweckmäßigsten benutzt man hierzu Einflußlinien. Zur Grundlage der Betrachtung wollen wir das System Fig. 124a nehmen. Das Grundsystem dieses Fachwerkes ist in Fig. 124b, die einzelnen Zwischensysteme sind in Fig. 124c—e besonders dargestellt.

1. Einflußlinien für die Obergurtstäbe.

Da die Stäbe O_2—O_6 durch die Zwischensysteme nicht beeinflußt sind, werden die Einflußlinien in gewöhnlicher Weise gezeichnet. Für O_3 und O_4 ist dieses in Fig. 124k geschehen.

2. Einflußlinien für die Untergurtstäbe.

Die Spannkraft eines Untergurtstabes setzt sich zusammen aus den beiden Spannkräften, die der Stab im Grundsystem und in dem betreffenden Zwischensystem erhält. Für den Stab U_4 zum Beispiel ergibt sich:

Stehen die Lasten nur auf den Strecken von A bis 2 und von 4 bis B (Fig. 124a), während das Teilsystem Fig. 124d selber unbelastet ist, so sind natürlich die Stäbe in Fig. 124d spannungslos. Für diese Laststellungen bekommt also der Stab U_4 als Stab des Zwischensystems überhaupt keine Spannkraft. Er wird vielmehr nur durch das Grundsystem beansprucht und kann demnach so berechnet werden, als ob er nur dem letzteren System angehörte. Wir zeichnen also für den Stab $U_{3,4}$ in gewöhnlicher Weise die Einflußlinie ($A'E'B'$ in Fig. 124l) und wissen, daß diese für alle Laststellungen zwischen A' und $2'$ und zwischen $4'$ und B' bereits die richtige Spannkraft des Stabes U_4 angibt.

Für das Folgende wollen wir noch die Strecke z_2 bestimmen, die die Verlängerung des Stückes $A'E'$ der Einflußlinie auf der durch den Knotenpunkt 4 gezogenen Vertikalen abschneidet. Es ist (Fig. 124l):

$$z_2 : U_A = \lambda_2 : x\,,$$

$$z_2 = U_A \cdot \frac{\lambda_2}{x}\,.$$

Nun ist aber nach *Ritter* (Fig. 124b):

$$U_A = \frac{x}{r}\,.$$

Somit ergibt sich für den Abstand z_2 von Fig. 124l der Betrag:

$$z_2 = \frac{\lambda_2}{r}\,.$$

Um nun auch die Spannkraft U_4 für die Laststellungen *innerhalb* der Strecke $\overline{2'-4'}$ zu finden, zeichnen wir ferner die Einflußlinie für den Stab U_4 des Zwischensystems Fig. 124d. Diese ist in Fig. 124g dargestellt. Es wurde (wegen des Folgenden) von einer Nullachse $A''B''$ die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t aufgetragen ($U_B = B''C''$), hierauf C'' mit A'' verbunden und Punkt E'' bestimmt. Dann ist $A''E''B''$ die Einflußlinie für den Stab U_4 in Fig. 124d. Die Spannkraft U_B wurde analytisch ermittelt, indem von den drei am Punkte B in Fig. 124d angreifenden Kräften, nämlich $B = 1{,}0$ t, U_4 und D_3, die Momente aufgestellt wurden. Als Bezugspunkt E wurde der dem Knoten (2) entsprechende Punkt E genommen, so daß sich ergibt:

$$\Sigma M = -1{,}0\,\mathrm{t} \cdot \lambda_2 + U_4 \cdot h_2 + D_3 \cdot 0 = 0\,,$$

$$U_{4,B} = +\frac{1{,}0 \cdot \lambda_2}{h_2} = +\frac{\lambda_2}{h_2}\,.$$

Hiermit ist die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t und damit die Einflußlinie Fig. 124g bestimmt.

Steht nun an beliebiger Stelle auf der Strecke $\overline{2'—4'}$ eine Last $P = 1{,}0$ t, so finden wir also die Spannkraft des Stabes U_4, indem wir die Ordinate η^0 in Fig. 124l (die die Spannkraft im Grundsystem angibt) addieren zu der Ordinate η^1 in Fig. 124g (die die Spannkraft im Zwischensystem angibt). Zweckmäßigerweise werden wir also Fig. 124g nicht besonders zeichnen, sondern direkt an Fig. 124l anlegen.

Hierbei ergibt sich nun eine wichtige Vereinfachung: In Fig. 124l hatte sich der Abstand z_2 zwischen der Linie $E'B'$ und der Verlängerung der Linie $A'E'$ ergeben zu:

$$z_2 = \frac{\lambda_2}{r} = \frac{\lambda_2}{h_2}.$$

[Es ist $r = h_2$ das Lot vom Bezugspunkte auf den Stab U_2 in Fig. 124b.] In Fig. 124g hatte sich nun aber für den Abstand U_B ebenfalls ergeben:

$$U_B = B''C'' = \frac{\lambda_2}{h_2}.$$

Es ist also der Abstand z_2 in Fig. 124l, den die Verlängerung der Linie $A'E'$ auf der Vertikalen durch den Punkt *4* abschneidet, gleich der Strecke $B''C''$ der kleinen Einflußlinie $A''E''B''$ (Fig. 124g). Daraus folgt: Wenn wir das Dreieck Fig. 124g an das Dreieck $A'E'B'$ Fig. 124l anlegen, so erscheint die Linie $A''E''C''$ als die geradlinige Verlängerung der Linie $A'E'$. Wir brauchen also das Dreieck $A''E''B''$ gar nicht erst aufzuzeichnen, sondern wir zeichnen nur die Einflußlinie $A'E'B'$ des Stabes U_4 als Bestandteil des Grundsystems, verlängern $A'E'$ geradlinig bis E'' und verbinden E'' mit B''. Dann ist $A'E'E''B''B'$ die Einflußlinie für Stab U_4. Für irgendeine Stellung der Last $P = 1{,}0$ t (Fig. 124l) ergibt sich somit die zugehörige Spannkraft

$$U_4 = \eta^0 \text{ (vom Grundsystem) } + \eta^1 \text{ (vom Zwischensystem)},$$

$$U_4 = \eta \text{ (beide Systeme kombiniert)}.$$

Hiermit haben wir durch eine Ordinate die gesamte Spannkraft des Stabes U_4.

Wie sich aus dem Gleichgewicht von Punkt *3* in Fig. 124a ergibt, ist für jede beliebige Stellung Stabkraft U_3 gleich Stabkraft U_4. Fig. 124l gilt also auch als Einflußlinie für U_3.

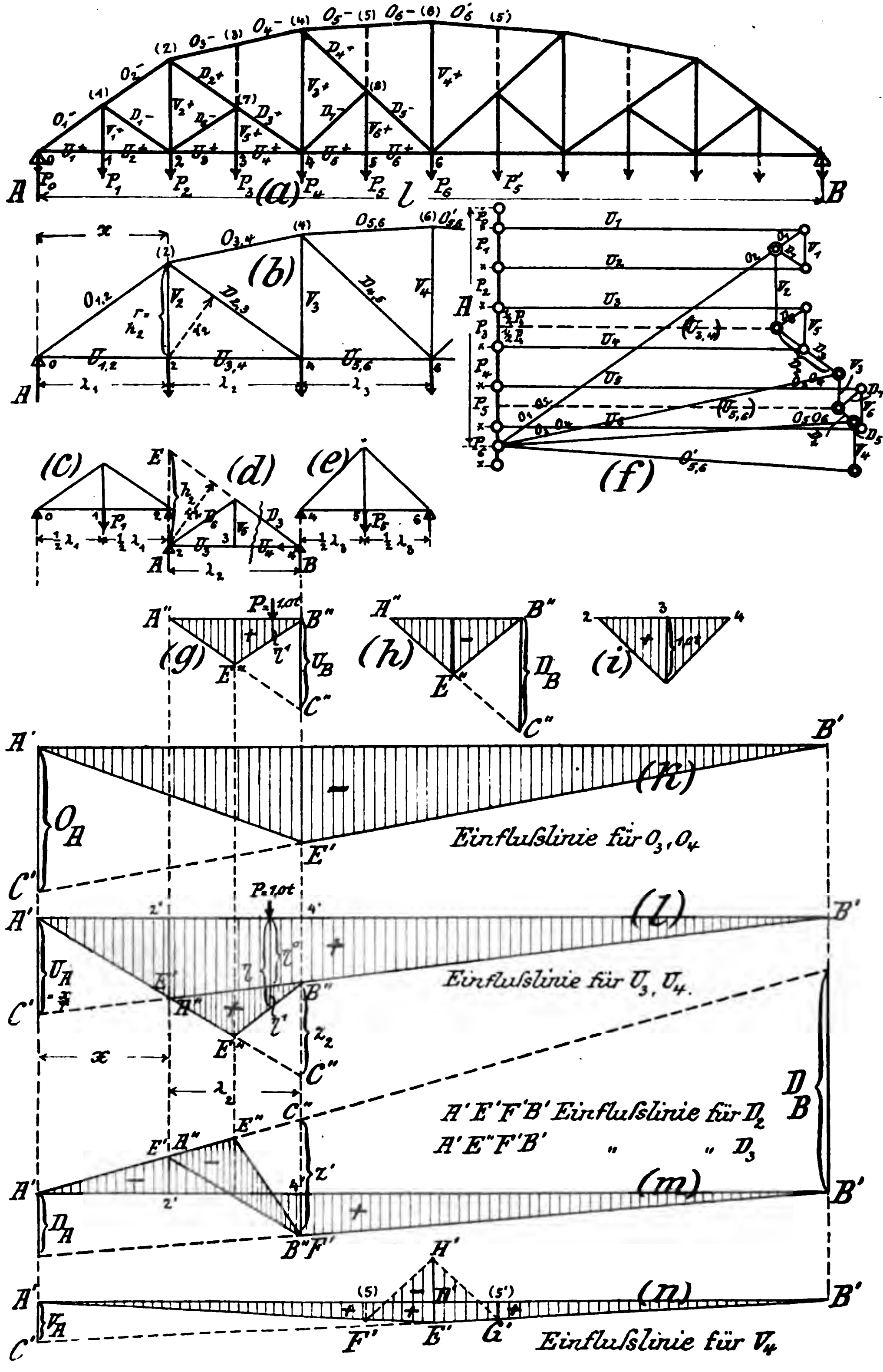

(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(k)
Einflußlinie für O_3, O_4
(l)
Einflußlinie für U_3, U_4.
A'E'F'B' Einflußlinie für D_2
A'E"F'B' " " D_3
(m)
(n)
Einflußlinie für V_4

Fig. 124.

3. Einflußlinien für die Diagonalen.

a) Für die Diagonale D_2 ist die Einflußlinie gleich $A'E'F'B'$ in Fig. 124m. Da dieser Stab nur im Grundsystem vorkommt, wird die Einflußlinie in gewöhnlicher Weise gezeichnet.

b) Für die Diagonale D_3 muß eine entsprechende Untersuchung wie für U_4 durchgeführt werden. Solange das Teilsystem Fig. 124d unbelastet und demgemäß spannungslos ist, gilt die Einflußlinie Fig. 124m. Diese gibt also bereits die richtigen Spannkräfte an, solange sich die Lasten auf den Strecken $\overline{A'-2'}$ oder $\overline{4'-B'}$ befinden.

Für die Laststellungen auf der Strecke $\overline{2'-4'}$ muß aber noch die Einflußlinie des Stabes D_3 aus Fig. 124d hinzugefügt werden. Diese Einflußlinie wurde in Fig. 124h gezeichnet. Es wurde wieder die Spannkraft infolge $B = 1{,}0$ t aufgetragen, und zwar ergibt sich diese aus Fig. 124d analytisch:

$$\Sigma M = -1{,}0 \cdot \lambda_2 - D_3 \cdot r_2 + U_4 \cdot 0 = 0\,,$$

$$D_{3,B} = -\frac{\lambda_2}{r_2}\,.$$

Die Ordinaten der Einflußlinie Fig. 124h sind negativ. Da in Fig. 124m der negative Teil der Einflußfläche oberhalb der Nullachse $A'B'$ gezeichnet ist, so müssen wir also das Dreieck $A''E''B''$ aus Fig. 124h nach oben zu an die Einflußfläche $A'E'F'B'$ in Fig. 124m anlegen.

Hierbei zeigt sich nun, genau wie in Fig. 124l, daß die Seite $A''E''$ die geradlinige Verlängerung von $A'E'$ bildet. [Denn es ist, wie bereits vielfach benutzt, der Abstand z' zwischen der Linie $F'B'$ und der Verlängerung von $A'E'$ gleich $\frac{\lambda_2}{r_2}$. Da nun $B''C''$ in Fig. 124h ebenfalls gleich $\frac{\lambda_2}{r_2}$ ist, so muß in Fig. 124m die Linie $A''E''$ mit der Verlängerung von $A'E'$ zusammenfallen.] Wir brauchen also in Fig. 124m die Linie $A'E'$ nur bis E'' zu verlängern und erhalten $A'E''F'B'$ als Einflußlinie für D_3.

c) Die Diagonale D_6 ist nur ein Konstruktionsteil des Zwischenfachwerkes. Sie bekommt also nur dann Spannung, wenn das Zwischenfachwerk belastet ist. Da Fig. 124d symmetrisch ist, ist die Einflußlinie für D_6 identisch mit der in Fig. 124h dargestellten Einflußlinie von D_3.

4. Einflußlinien für die Vertikalen.

a) Die Vertikalen V_2, V_3 und V_4 werden nur durch das Grundsystem beansprucht. Bei V_2 und V_3 ist nichts zu be-

merken. V_4 muß aus dem Gleichgewicht des Punktes (*6*) bestimmt werden. Analytisch ergibt sich

$$\begin{cases} V_4 = -2\,O_6 \cdot \sin\beta_6 & [\beta_6 = \text{Neigungswinkel von } O_6], \\ V_4 = +2\,\dfrac{M_6}{h_6} \cdot \operatorname{tg}\beta_6 \,. \end{cases}$$

Die Einflußlinie für V_4 ist also in Fig. 124n die Linie $A'E'B'$. (Vgl. Fig. 93.)

[Der Vollständigkeit wegen möge bei dieser Gelegenheit daran erinnert werden, daß diese Ermittlung von V_4 nur dann richtig ist, wenn die Lasten am Untergurt angreifen. Würde in Fig. 124a der Obergurt die Lasten tragen, so hätten wir (unter der Annahme, daß (*5*) und (*5'*) ebenfalls als Belastungspunkte ausgebildet sind): Solange die Lasten zwischen A und (*5*) und zwischen (*5'*) und B sind, besteht die frühere Beziehung:

$$V_4 = +2\,\frac{M_6}{h_6} \cdot \operatorname{tg}\beta_6 \,.$$

Wenn aber die Last $P = 1{,}0$ t direkt in (*6*) steht, so wird

$$V_4 = -1{,}0 + 2\,\frac{M_6}{h_6} \cdot \operatorname{tg}\beta_6 \,.$$

Die Einflußlinie $A'E'B'$ in Fig. 124n gilt also nur von A bis F' und von G' bis B'. In der Mitte müssen wir von der Ordinate $E'D' = +2(M_6 : h_6) \cdot \operatorname{tg}\beta_6$ die Strecke $E'H' = 1{,}0$ t abziehen, d. h. von E' aus nach der Nullachse zu abtragen. Dann verbinden wir die Endpunkte der unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten und erhalten $A'F'H'G'B'$ als Einflußlinie für V_4 bei Belastung am Obergurt.]

b) Die Vertikalen V_1, V_5 und V_6 wirken nur als Konstruktionsteile der Zwischensysteme. Für V_5 ist die Einflußlinie in Fig. 124i dargestellt: Steht die Belastung direkt im Punkte *3*, so ist $V_5 = +1{,}0$ t; steht die Belastung in *2* oder *4* (oder darüber hinaus), so wird $V_5 = 0$. Hieraus ergibt sich die Einflußlinie.

Wiederholung.

Die Berechnung derartiger zusammengesetzter Fachwerke gestaltet sich also durch die Zerlegung in Teilsysteme ziemlich einfach. Natürlich muß man hierbei darauf achten, daß die Teilsysteme auch wirkliche Fachwerke, d. h. in sich unverschiebliche Figuren, sind. Die Zerlegung kann häufig auf verschiedene Weisen erfolgen. Man wird sie zweckmäßig so vornehmen, daß

die Zwischensysteme als möglichst einfache Hänge- oder Sprengewerke erscheinen, die in das Grundsystem eingehängt sind.

Das Aufzeichnen der Einflußlinien wird dadurch vereinfacht, daß man die Einflußlinien für das Grundsystem nur entsprechend zu verlängern braucht. Es ist natürlich nicht nötig, die bewegliche Belastung ausschließlich mittels Einflußlinien zu untersuchen. Man kann z. B. die Spannkräfte der Gurtstäbe bei einer beweglichen *gleichmäßig verteilten* Belastung auch analytisch finden, da für diese Stäbe nur Vollbelastung in Frage kommt. Für die Diagonalen, und bei Einzellasten auch für die Gurtstäbe, wird sich die Berechnung mittels Einflußlinien empfehlen, da diese über die gefährlichen Laststellungen am deutlichsten Aufschluß geben.

Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß wir in Abschnitt V (kinematische Methoden) eine allgemeine Regel über Einflußlinien ableiten werden, nach der sich die vorhin im einzelnen aufgefundenen Eigenschaften der Einflußlinien von U_4 usw. sofort hinschreiben lassen (§ 72, 73).

II. Schräg liegende Fachwerke.

Fig. 125a zeigt einen schräg liegenden Fachwerkträger auf zwei Stützen. Die Belastung sei rechtwinklig zum Träger, desgleichen die Richtung der Lagerkräfte. Man sieht nun aus Fig. 125a, daß die Berechnung einer solchen Konstruktion sich sehr einfach auf unsere früheren Berechnungen zurückführen läßt. Als Spannweite müssen wir die schräg gemessene Entfernung l der Auflager einführen, ebenso messen wir in dieser Richtung die Abstände x und x' der Knotenpunkte von den Auflagern. Dann besteht gegenüber der Berechnung eines horizontal liegenden Fachwerkes überhaupt kein Unterschied.

Den anderen Fall, daß nämlich die Kräfte vertikal abwärts wirken, zeigt Fig. 125b. Die Berechnung dieses Fachwerkes wird ebenso durchgeführt, als ob die beiden Auflager A und B in gleicher Höhe liegen. (Man kann sich ja B mittels einer Pendelstütze nach B_1 verlegt denken.) Die Abstände l, x und x' sind jetzt natürlich horizontal (d. h. immer rechtwinklig zu der Richtung der Lasten) zu messen.

1. Besonderheit bei der Ritterschen Berechnungsmethode.

Auf eine Besonderheit ist jedoch zu achten: Wenn wir z. B. den Stab O nach der *Ritter*schen Methode berechnen wollen, so legen wir den Schnitt α—α, nehmen m als Bezugspunkt und

bilden von denjenigen Kräften, die an einem der beiden Fachwerkteile angreifen, die Summe der statischen Momente in bezug auf Punkt m. Bei Betrachtung des links vom Schnitte liegenden Teiles ergibt sich dann nach Fig. 125b:

$$O = -\frac{1}{r}(+A \cdot x_m - P_0 \cdot x_m - P_1 \cdot p_1) .$$

In dieser Formel ist nun der in der Klammer stehende Ausdruck durchaus nicht dasselbe, was wir sonst als das „Biegungsmoment" für den Punkt m bezeichnen. Denn wenn wir kurzweg von dem

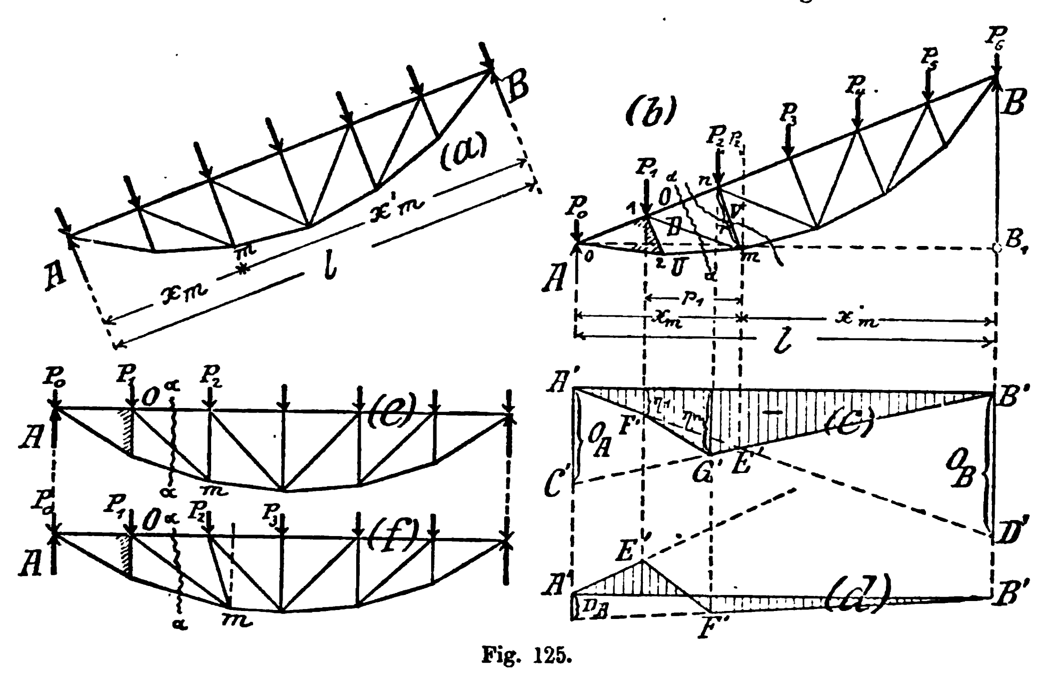


Fig. 125.

Moment in bezug auf Punkt m sprechen, so verstehen wir darunter die Summe:

$$M_m = +A \cdot x_m - P_0 \cdot x_m - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 ; \tag{1}$$

das ist die Summe aller seitlich von m befindlichen Kräfte mal ihren Abständen. Die beiden Summenausdrücke für O und M unterscheiden sich also durch das Glied $P_2 \cdot p_2$. Letzteres fehlt bei O, da die Kraft P_2 an dem betrachteten (linken) Trägerteile überhaupt nicht vorkommt. Infolge dieses Unterschiedes dürfen wir also die Spannkraft O nicht nach der allgemeinen Formel

$$O = -\frac{M_m}{r}$$

berechnen. Wir müssen vielmehr O in einer Form schreiben

$$O = -\frac{M_{m(\alpha)}}{r},$$

worin der Ausdruck $M_{m(\alpha)}$ besonders bestimmt werden muß. [Vgl. die genau entsprechende Erläuterung zu dem Fachwerke Fig. 73 (§ 22, 11. Aufgabe).]

Diesen Summenausdruck

$$(2) \qquad M_{m(\alpha)} = +A \cdot x_m - P_0 \cdot x_m - P_1 \cdot p_1$$

wollen wir ohne nähere Abkürzung als die „Momentensumme des Schnittes α—α in bezug auf den Punkt m" bezeichnen. Die Schreibweise soll andeuten, daß $M_{m(\alpha)}$ die Summe der statischen Momente in bezug auf den Punkt m, aber **nur von den Kräften, die sich seitlich von dem Schnitte α—α befinden**, ist. [Das Biegungsmoment M_m dagegen ist die Summe der statischen Momente in bezug auf den Punkt m von **allen** Kräften, die sich seitlich vom Punkte m befinden.]

Wir haben also das Resultat: Bei dem ansteigenden Fachwerke Fig. 125b darf der Fachwerkstab O, trotzdem es ein einfaches Dreieckfachwerk ist, nicht aus dem einfachen Biegungsmoment M_m des gegenüberliegenden Knotenpunktes m berechnet werden, sondern es muß die besondere Momentensumme $M_{m(\alpha)}$ verwendet werden.

Bei einem normalen Fachwerk (Fig. 125e) besteht allerdings kein Unterschied zwischen M_m und $M_{m(\alpha)}$. Hier liegt der Schnitt α—α stets zwischen denselben Lasten, zwischen denen sich auch der Bezugspunkt m befindet. Deshalb kommen dieselben Lasten, die in dem Ausdrucke für das Biegungsmoment des Punktes m erscheinen, auch in dem Ausdrucke für den Stab O vor; d. h. das Knotenpunktsmoment M_m ist gleich der Momentensumme $M_{m(\alpha)}$. Also kann der Stab O direkt aus dem Moment M_m bestimmt werden. Nur wenn die Füllungsstäbe gänzlich anormal angeordnet wären (Fig. 125f), würde der Fall eintreten, daß der Schnitt α—α und der Bezugspunkt m zwischen verschiedenen Lasten liegen. Diesen Fall haben wir ja bereits in § 22, 11. Aufgabe, behandelt.

Es sei nur noch an die praktischen Folgen dieses Unterschiedes erinnert: Unsere sämtlichen Formeln über Momente M (z. B. die einfache Formel $M = \frac{1}{2} x \cdot x'$ bei gleichmäßig verteilter Belastung; ferner die Tabellen für Eisenbahnbrücken; usw.) gelten nur für die regulären „Biegungsmomente". Liegt nun ein solcher Ausnahmefall wie in Fig. 125b vor, so dürfen die Formeln nicht verwendet werden, sondern es bleibt nichts anderes übrig, als von jeder, *seitlich von α—α liegenden*, Knotenpunktslast einzeln das statische Moment in bezug auf Punkt m zu bilden und diese

Momente zu dem Ausdrucke $M_{m(x)}$ zusammenzuzählen. Statt dessen kann man auch das Knotenpunktsmoment M_m bilden und hierzu das Produkt $P_2 \cdot p_2$ addieren; denn nach den vorhin aufgestellten Ausdrücken (1) und (2) ist:

$$M_{m(x)} = M_m + P_2 \cdot p_2 .$$

(Vgl. auch das weiter unten folgende Beispiel.)

2. Besonderheit bei den Einflußlinien.

Auch bei der Einflußlinie des Stabes O (Fig. 125b) zeigt sich ein entsprechender Unterschied. Sie wurde in Fig. 125c gezeichnet, indem von der Nullachse $A'B'$ aus die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t und $B = 1{,}0$ t aufgetragen wurden. Die beiden Linien $C'B'$ und $A'D'$ schneiden sich, wie stets, unter dem Bezugspunkte m. Nun zeigt Fig. 125b, daß, solange sich die Last zwischen B und Punkt n befindet, die Spannkraft O nur abhängig ist vom Auflagerdruck A; d. h. auf der ganzen Strecke $\overline{B—n}$ gilt die Beziehung $O = A \cdot O_A$. Deshalb gilt in Fig. 125c die Linie $C'B'$ nicht, wie gewöhnlich, nur bis zum Punkte E', sondern bis zum Punkte G', senkrecht unter n. Entsprechend gilt die Beziehung $O = B \cdot O_B$ für alle Laststellungen zwischen A und 1. Linie $A'D'$ gilt also auf der Strecke $A'F'$. Verbinden wir schließlich die Endpunkte der unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten η_1 und η_n durch eine gerade Linie, so haben wir $A'F'G'B'$ als endgültige Einflußlinie für den Stab O.

Man sieht aus Fig. 125c, daß man schließlich auch keinen großen Fehler begeht, wenn man die Spannkraft O einfach aus dem Knotenpunktsmoment M_m berechnet, d. h. einfach die Einflußlinie $A'E'B'$ zugrunde legt. Immerhin kann es nur zum Verständnis des Fachwerks im allgemeinen dienen, wenn man einen derartigen Fall genau durcharbeitet.

Für die *Untergurtstäbe* fällt diese Besonderheit fort. Bei diesen kommt der Schnitt $\alpha—\alpha$ stets zwischen denselben Lasten zu liegen, zwischen denen sich der Bezugspunkt des betreffenden Stabes befindet. Diese Stäbe werden also einfach aus den Momenten für die Knotenpunkte berechnet. Ihre Einflußlinien sind Dreiecke, deren Spitzen E' unter den betreffenden Bezugspunkten liegen.

In Fig. 125d ist außerdem die Einflußlinie für die Diagonale D gezeichnet. Dieselbe Figur gilt für die Vertikale V, wenn an Stelle von D_A und D_B die Werte V_A und V_B gesetzt werden.

3. Spezialfall: Schräg liegender Träger mit parallelen Gurten.

Da dieser Fall häufig vorkommt, möge er besonders behandelt werden. Die Fig. 126a und b zeigen die beiden, hierbei üblichen Anordnungen der Stäbe. Zunächst werde Fig. 126a untersucht.

a) Gurtstäbe. Um die Stäbe O und U zu bestimmen, legen wir den Schnitt α—α und betrachten das Gleichgewicht des links vom Schnitte befindlichen Teiles. Dann ergeben sich O und U durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$:

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{1}{h}(+A \cdot x_3 - P_0 \cdot x_3 - P_2 \cdot p_2) = -\frac{M_{3(\alpha)}}{h},$$

$$\text{(II)} \qquad U = +\frac{1}{h}(+A \cdot x_2 - P_0 \cdot x_2) = +\frac{M_2}{h}.$$

In diesen Gleichungen ist zu beachten, daß M_2 das gewöhnliche „Biegungsmoment" für den Knotenpunkt *2* ist. $M_{3(\alpha)}$ ist dagegen nicht das Biegungsmoment, sondern die „Momentensumme des Schnittes α—α für Punkt *3*". (Denn in dem „Moment" für Punkt *3* käme auch noch das Glied $P_4 \cdot e$ vor.) $M_{3(\alpha)}$ muß aus A, P_0 und P_2 besonders bestimmt werden.

b) Die **Diagonale** D finden wir am einfachsten, indem wir den Obergurt als x—x-Achse nehmen und für diese die Gleichung $R_y = 0$ anschreiben. [Die Richtungen x—x und y—y, auf die wir die Gleichgewichtsbedingungen anschreiben, können natürlich beliebig genommen werden. Im allgemeinen sind allerdings die horizontale und die vertikale Richtung am bequemsten.] Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Kräfte A, P_0, P_2 usw. gegen die x-Achse mit α, und denjenigen von D gegen die x-Achse mit γ, so wird (bei Betrachtung des linken Teiles):

$$R_y = +A\sin\alpha - P_0\sin\alpha - P_2\sin\alpha - D\sin\gamma = 0,$$

$$D = (+A - P_0 - P_2)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Die Summe $+A - P_0 - P_2$ ist die Querkraft des Feldes $\overline{2-4}$; wir erhalten also:

$$\text{(III)} \qquad D = +Q_{2-4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Diese Gleichung läßt sich noch weiter vereinfachen. Zieht man durch Punkt *3* die Vertikale $\overline{3-3'}$, so kommt nämlich in dem Dreieck *2*—3′—*3* ebenfalls der Winkel α vor. Wenden wir nun auf dieses Dreieck den bekannten Sinussatz der Trigonometrie an

(„In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel“), so wird

$$\sin\alpha : \sin\gamma = d : h',$$

worin d die Länge des Stabes D und h' die Länge der Linie $\overline{5-5'}$ ist. Hiermit erhalten wir aus der Gleichung für D:

(IIIa) $$D = +Q_{2-4} \cdot \frac{d}{h'} .$$

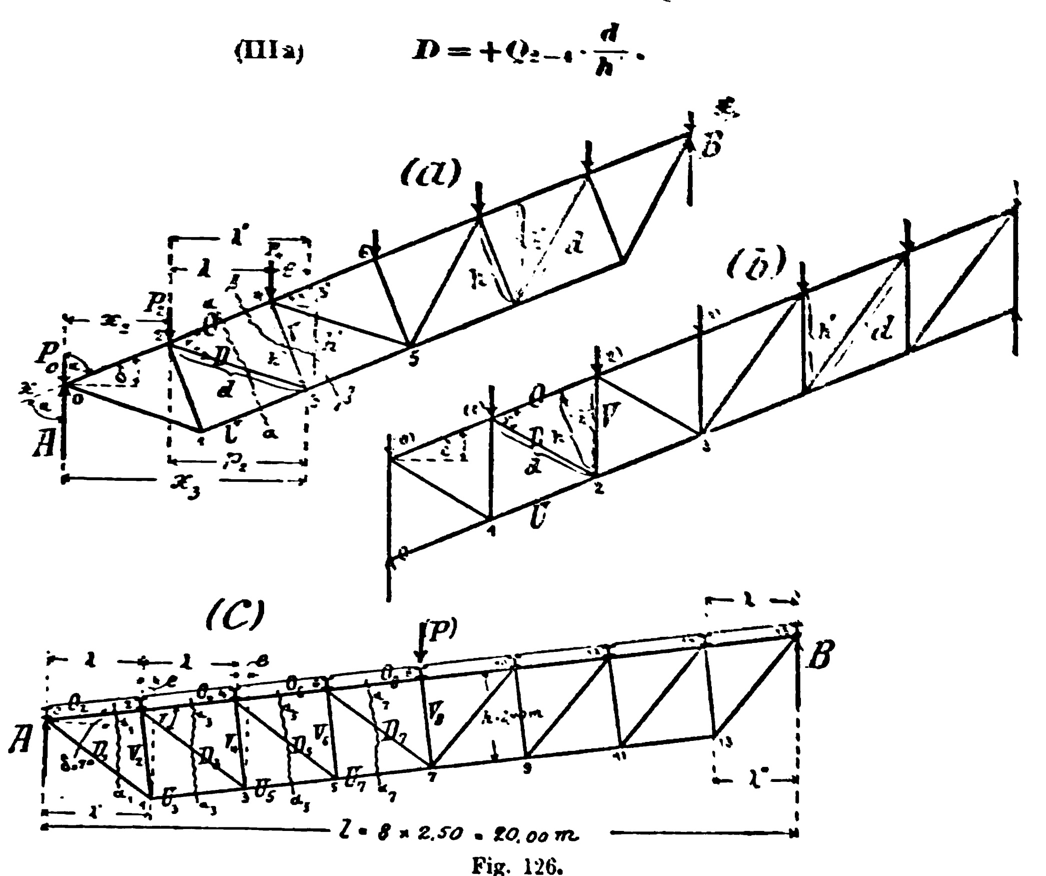


Fig. 126.

c) In genau entsprechender Weise läßt sich aus dem Schnitte $\beta-\beta$ ableiten:

$$R_y = +A \sin\alpha - P_0 \sin\alpha - P_2 \sin\alpha + V \sin 90^0 = 0,$$

$$V = -(+A - P_0 - P_2) \sin\alpha,$$

(IV) $$V = -Q_{2-4} \cdot \sin\alpha; \quad \text{oder}$$

(IVa) $$V = -Q_{2-4} \cdot \frac{h}{h'}$$ [h = Länge der Vertikalen].

Bezeichnen wir nun den Neigungswinkel des Fachwerkes gegen die Horizontale mit δ, so ist:

$$\delta = 90^0 - \alpha ;$$

folglich

$$\sin\alpha = \cos\delta .$$

Die obige Formel (IV) kann man also auch schreiben

$$\text{(IVb)} \qquad V = -Q_{2-4} \cdot \cos\delta .$$

d) Zusammenstellung der Formeln für den Parallelträger Fig. 126a:

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{M_{3(\alpha)}}{h},$$

$$\text{(II)} \qquad U = +\frac{M_2}{h},$$

$$\text{(III)} \qquad D = +Q_{2-4} \cdot \frac{\cos\delta}{\sin\gamma} \qquad \text{oder} \qquad \text{(IIIa)} \qquad D = +Q_{2-4} \cdot \frac{d}{h'},$$

$$\text{(IV)} \qquad V = -Q_{2-4} \cdot \cos\delta \qquad \text{oder} \qquad \text{(IVa)} \qquad V = -Q_{2-4} \cdot \frac{h}{h'} .$$

Hiermit ist Fig. 126a erledigt.

Für Fig. 126b lassen sich leicht in entsprechender Weise ableiten:

$$\text{(I)} \qquad O = -\frac{M_2}{h},$$

$$\text{(II)} \qquad U = +\frac{M_{(1)}}{h} = +\frac{M_1}{h},$$

$$\text{(III)} \qquad D = +Q_{1-2} \cdot \frac{\cos\delta}{\sin\gamma} \qquad \text{oder} \qquad \text{(IIIa)} \qquad D = +Q_{1-2} \cdot \frac{d}{h'},$$

$$\text{(IV)} \qquad V = -Q_{1-2} .$$

Zu beachten ist, daß die Formeln für D und V unter der Annahme *links*steigender Diagonalen aufgestellt sind. In einem Felde mit *rechts*steigender Diagonale tritt an Stelle des Plus- ein Minuszeichen und umgekehrt.

Der Quotient $\frac{\cos\delta}{\sin\gamma}$ resp. $\frac{d}{h'}$ ist in Fig. 126a für alle Diagonalen derselbe, in Fig. 126b dagegen bei den Stäben der rechten Trägerhälfte ein anderer als bei der linken Hälfte. Die Vertikalen $\overline{5-6}$ in Fig. 126a und $\overline{3-(3)}$ in Fig. 126b werden aus dem Gleichgewicht der Punkte *6* resp. *(3)* ermittelt.

e) Beispiel: Die in Fig. 126c dargestellte Fußgängerbrücke mußte in einer Steigung von ca. $\delta = 7^0$ angelegt werden. Stützweite, in der Horizontalen gemessen, $l = 8 \times 2{,}50 = 20{,}00$ m;

Trägerhöhe $h = 2{,}40$ m. Die größten Spannkräfte infolge einer beweglichen Last von $p = 0{,}600$ t *pro lfd. m Horizontalprojektion* sollen berechnet werden.

α) *Gurtstäbe.* Maßgebende Belastung für alle Gurtstäbe: Vollbelastung. Die Untergurtstäbe werden aus den Knotenpunktsmomenten M_2, M_4 und M_6, die Obergurtstäbe aus den Momentensummen $M_{1(\alpha_1)}$, $M_{3(\alpha_3)}$, $M_{5(\alpha_5)}$ und $M_{7(\alpha_7)}$ bestimmt.

Um nun die statischen Momente der Kräfte nicht einzeln ausrechnen zu müssen, benutzen wir unseren bekannten Satz: Der Unterschied der Summen der statischen Momente in bezug auf zwei Punkte ist gleich dem Produkt aus der Summe der Kräfte mal dem horizontalen Abstand der beiden Punkte.

Für den Schnitt α_1—α_1 von Fig. 126c erhalten wir hiernach folgenden Rechnungsgang: Auf den links vom Schnitte liegenden Fachwerkteil wirken der Auflagerdruck A und die Last des Knotenpunktes *0* (P_0). Von diesen Kräften müssen wir die Momente in bezug auf die Punkte *0*, *2* und *1* bilden; also M_0, M_2 und $M_{1(\alpha_1)}$. Das Moment M_0 ist bereits bekannt, nämlich gleich Null. Die beiden anderen Momente finden wir dann durch Entwicklung:

$$M_2 = M_0 + Q_{0-2} \cdot \lambda = 0 + (A - P_0) \cdot \lambda\,,$$

$$M_{1(\alpha_1)} = M_2 + Q_{0-2} \cdot e = M_2 + (A - P_0) \cdot e\,.$$

In der folgenden Tabelle ist in dieser Weise die Berechnung der Gurtstäbe durchgeführt.

Gurtstäbe.

$h = 2{,}40$ m; $\lambda = 2{,}50$ m; $e = h \cdot \sin 7° = 0{,}30$ m; $P = 0{,}60 \cdot 2{,}50 = 1{,}50$ t

Querkräfte Q (t)	$Q \cdot \lambda = Q \cdot 2{,}50$ (mt)	Momente M (mt)	$Q \cdot e = Q \cdot 0{,}30$ (mt)	Momente $M_{(\alpha)}$ (mt)	Obergurt $O = -\frac{M_{(\alpha)}}{h}$ (t)	Untergurt $U = +\frac{M}{h}$ (t)
$A = 6{,}00$		$M_0 = 0{,}00$				
$Q_{0-2} = 5{,}25$	13,13	$M_2 = 13{,}13$	1,58	$M_{1(\alpha_1)} = 14{,}71$	$O_2 = -6{,}1$	$U_3 = +5{,}5$
$Q_{2-4} = 3{,}75$	9,38	$M_4 = 22{,}51$	1,13	$M_{3(\alpha_3)} = 23{,}64$	$O_4 = -9{,}9$	$U_5 = +9{,}4$
$Q_{4-6} = 2{,}25$	5,62	$M_6 = 28{,}13$	0,68	$M_{5(\alpha_5)} = 28{,}81$	$O_6 = -12{,}0$	$U_7 = +11{,}7$
$Q_{6-8} = 0{,}75$	1,87	$M_8 = 30{,}00$	0,23	$M_{7(\alpha_7)} = 30{,}23$	$O_8 = -12{,}6$	

Bemerkung: Eigentlich müßten wir diese Tabelle auch für die rechte Trägerseite durchführen. Denn die Momente für zwei entsprechende Punkte auf dem Untergurt, z. B. für *1* und *13*, sind voneinander verschieden, da Punkt *13* näher am Auflager liegt

als Punkt *1*. Man wird jedoch nur bei großen Steigungen auf diesen Unterschied Rücksicht nehmen. Im vorliegenden Fall genügt es, die Momente auf der linken Seite, als die größeren Momente, zu berechnen und hiernach die Stabkräfte zu bestimmen.

β) *Füllungsstäbe.* Die Füllungsstäbe werden aus den Querkräften bestimmt. Diese sind für ein Feld, das zwischen den Belastungspunkten $m-1$ und m liegt (§ 29, II):

größte positive Querkraft $\underset{+}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x_m'^2}{l-\lambda_m} = \frac{0{,}6}{2}\,\frac{x_m'^2}{17{,}50} = 0{,}0171\,x_m'^2$,

„ negative „ $\underset{-}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x_{m-1}^2}{l-\lambda_m} = 0{,}0171\,x_{m-1}^2$.

[λ_m = Feldweite; x_m' = Entfernung des Punktes m bis Auflager B; x_{m-1} = Entfernung des Punktes $m-1$ bis Auflager A.]

Die Hilfswerte $\frac{\cos\delta}{\sin\gamma}$ für die Diagonalen, und $\cos\delta$ für die Vertikalen, ergeben sich:

$$\frac{\cos\delta}{\sin\gamma} = 1{,}43\,; \qquad \cos\delta = 0{,}99\,.$$

Da diese Hilfswerte für alle Diagonalen resp. Vertikalen dieselben sind, genügt es, die eine Trägerhälfte zu untersuchen.

Füllungsstäbe.

Feld	Abstand		Größte Querkräfte		Diagonalen $= +Q\cdot 1{,}43$	Vertikalen $= -Q\cdot 0{,}99$
	x'	x	positiv	negativ		
0—2	17,50	0,00	+5,25	—0,00	$D_1 = +7{,}5;\ -0{,}0$	$V_2 = -5{,}2;\ +0{,}0$
2—4	15,00	2,50	+3,86	—0,11	$D_3 = +5{,}5;\ -0{,}2$	$V_4 = -3{,}8;\ +0{,}1$
4—6	12,50	5,00	+2,68	—0,43	$D_5 = +3{,}8;\ -0{,}6$	$V_6 = -2{,}6;\ +0{,}4$
6—8	10,00	7,50	+1,71	—0,96	$D_7 = +2{,}4;\ -1{,}4$	$V_8 = -P\cdot\cos\delta$ $= -1{,}50\cdot 0{,}99 = -1{,}5$

Die Ausrechnung der Querkräfte kann man bei gleichen Feldern bekanntlich noch dadurch vereinfachen, daß man die Entfernungen l, x_m' und x_{m-1} als Vielfache der Feldweite λ einführt.

III. Fachwerke mit Gegendiagonalen.

1. Zweck und Wirkungsweise der Gegendiagonalen.

Bei dem Träger Fig. 127a mögen sich bei der Berechnung der Stabkräfte infolge ständiger und infolge beweglicher Last für eine der Diagonalen, z. B. Diagonale D, folgende Werte ergeben haben:

Spannkraft infolge ständiger Last $D_g = +1{,}3$ t,

" " bewegl. " $\begin{cases} D_r = +6{,}5 \text{ t} & \text{[bei rechtsseit. Belast.],} \\ D_l = -5{,}9 \text{ t} & \text{[„ linksseitig. „].} \end{cases}$

Die Grenzwerte, die die Spannkraft dieses Stabes annehmen kann, sind demnach: $+1{,}3 + 6{,}5 = +7{,}8$ t (Zug) und $+1{,}3 - 5{,}9 = -4{,}6$ t (Druck). Wäre nun die zulässige Spannung z. B. gleich 1,0 t/qcm, so würde für diese Diagonale also eine Querschnittsfläche von $7{,}8 : 1{,}0 = 7{,}8$ qcm erforderlich sein.

Praktisch wird man mit dieser Fläche kaum auskommen. Da der Stab nämlich auch Druck erhält, so muß er wegen der Knickgefahr außer dem erforderlichen Querschnitt auch ein bestimmtes Trägheitsmoment aufweisen. Es wird nun schwierig

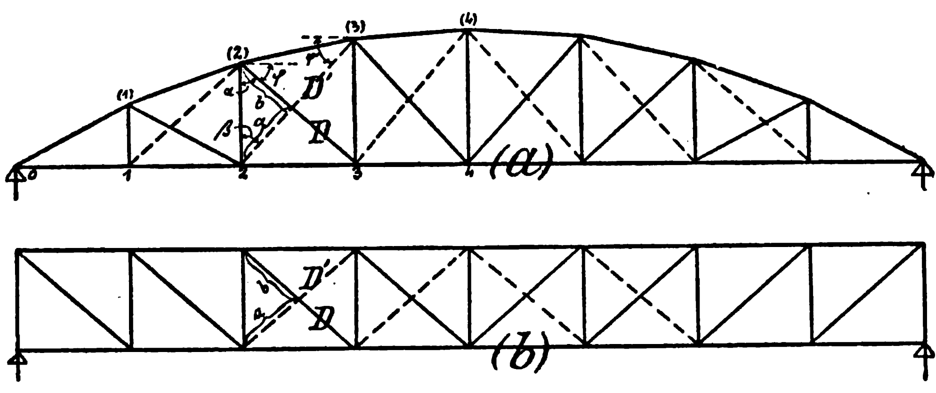


Fig. 127.

sein, diese 7,8 qcm Querschnittsfläche so anzuordnen, daß das erforderliche Trägheitsmoment erzielt wird. Man wird wohl vielmehr genötigt sein, den Querschnitt zu vergrößern, nur damit er genügend Trägheitsmoment hat. Die Rücksicht auf Knickgefahr bedingt also in diesem Falle, daß der Stab eine größere Querschnittsfläche erhält, als es sonst nach der größten in ihm auftretenden Spannkraft (7,8 t) erforderlich wäre.

Diese Materialverschwendung läßt sich nun dadurch vermindern, daß man in dem betreffenden Felde außer der Diagonalen D noch die Diagonale D' einzieht. Beide Diagonalen werden als schlaffe Diagonalen ausgebildet; d. h. so (aus Flacheisen) konstruiert, daß sie nur Zug, nicht aber Druck, aufnehmen können. Die Wirkungsweise ist dann einfach so gedacht, daß, sobald die eine Diagonale Druck bekommen würde, sie einfach außer Tätigkeit treten und dafür die andere Diagonale einspringen soll. Auf

diese Weise wäre bei solchen Diagonalen niemals Druck-, sondern nur Zugbeanspruchung möglich.

Die genauere Untersuchung dieses Fachwerkes für irgendeine Belastungsart müßte jedoch wohl in folgender Weise geschehen: Wir nehmen zunächst beide Diagonalen als wirksam an und bestimmen die Spannkraft sowohl von D als auch von D'. Ergibt sich nun, erstens, daß eine der beiden Diagonalen Zug und die andere Druck erhält, so scheidet die letztere für die Berechnung aus, da sie ihrer Konstruktion nach keine Druckkräfte übertragen kann. Unsere erste Annahme, daß beide Diagonalen wirksam sind, hat sich dann also als falsch herausgestellt. Es ist vielmehr in dem betreffenden Felde nur *eine* Diagonale, die *Zug*diagonale, in Tätigkeit, und für diese wird dann die Spannkraft durch eine neue Rechnung in gewöhnlicher Weise bestimmt. Ergeben sich aber, zweitens, für beide Diagonalen *Zug*spannungen, so treten auch beide Stäbe in Wirksamkeit, und es gelten also die Spannkräfte, die sich aus der Vorberechnung ergeben haben. Ergeben sich aber, drittens, für beide Diagonalen *Druck*kräfte, so kann keiner der beiden Stäbe in Wirksamkeit treten. Das Feld ist dann ohne Diagonalen; das Fachwerk würde also entweder zusammenstürzen oder müßte dadurch gehalten werden, daß die Gurtstäbe bis zu einem gewissen Grade auch biegungsfest sind.

Man sieht nun aus diesem Überblick, daß die genaue Untersuchung gar nicht so einfach ist. Namentlich wird sie dadurch schwierig, daß man erst durch eine Voruntersuchung feststellen muß, welcher Art das System überhaupt ist. Sobald beide Diagonalen gespannt sind, hat das Fachwerk einen Stab mehr, als es zur gegenseitigen Festlegung der Knotenpunkte braucht. [In Fig. 127a sind 30 Stäbe in Wirksamkeit bei $n = 16$ Knotenpunkten.] Dann ist das System durch das Hinzukommen des Stabes D' ***statisch unbestimmt*** geworden. Ergibt sich aber aus der Vorberechnung, daß eine der Diagonalen, D oder D', außer Tätigkeit tritt, so hat das Fachwerk gerade nur die erforderliche Anzahl von Stäben; in diesem Falle ist es also ***statisch bestimmt*** geblieben. Man muß also zunächst den allgemeinen Fall, daß es statisch unbestimmt ist, annehmen, und dann aus den sich hieraus ergebenden Spannkräften entscheiden, wie die Berechnung weiter durchzuführen ist.

2. Praktischer Rechnungsgang.

Für die Praxis ist eine derartig umständliche Untersuchung unbrauchbar. Wir machen deshalb folgende Annahme: Die Möglichkeit, daß sich für beide Diagonalen gleichzeitig Zug oder Druck herausstellt, brauche nicht berücksichtigt zu werden. Es liege vielmehr stets der Fall vor, daß von den beiden Diagonalen eines Feldes immer *eine*, aber auch *nur eine*, in Tätigkeit ist.

Diese Annahme wird im allgemeinen durch die genaue Untersuchung bestätigt. Theoretisch kommt allerdings auch der Fall vor, daß beide Diagonalen gleichzeitig gespannt sind. Meistens liegt die Sache aber so, daß eine Diagonale in Tätigkeit ist, während die andere spannungslos ist.

Jetzt ist die Berechnung einfach. Zunächst zeichnen wir diejenigen Diagonalen ein, die durch das Eigengewicht des Trägers auf Zug beansprucht sind, die sog. „**Hauptdiagonalen**" D. Diese „Hauptdiagonalen" werden nun für Eigengewicht und für Verkehrslast berechnet, und zwar sowohl für den größten Zug wie für den größten Druck. Die Spannkräfte mögen heißen: $\underset{+}{D}_g$ (Eigengewicht) und $\underset{+}{D}_p$ und $\underset{-}{D}_p$ (Verkehrslast). Die Summe $D_g + \underset{+}{D}_p$ gibt dann zunächst die größte Spannkraft an, die überhaupt in der Diagonalen D auftritt und für die sie zu dimensionieren ist. Der Vergleich von D_g und $\underset{-}{D}_p$ zeigt ferner, ob die Diagonale eventuell Druck bekommen würde. Ist letzteres der Fall, so wird die Hauptdiagonale für diese Laststellung (bei der $\underset{-}{D}_p$ auftritt) gänzlich ausgeschaltet. Dafür wird dann die „**Gegendiagonale**" D' eingezogen, und die Berechnung für die obige Laststellung noch einmal unter Zugrundelegung der Diagonalen D' durchgeführt. [D' erhält durch Eigengewicht Druck, durch die Verkehrslast bei der betreffenden Laststellung Zug, insgesamt einen resultierenden Zug.] Hiermit ist sowohl für D als auch für D' die größte Spannkraft (Zug) bestimmt.

Diese doppelte Arbeit — Bestimmung der Spannkraft sowohl für D als auch für D' — läßt sich aber noch vereinfachen: Nach unseren Formeln ist nämlich für irgendeinen Belastungszustand:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_3}{h_3} - \frac{M_{(2)}}{h_2}\right],$$

$$D' = \frac{1}{\cos\varphi'}\left[\frac{M_2}{h_2} - \frac{M_{(3)}}{h_3}\right] = -\frac{1}{\cos\varphi'}\left[\frac{M_{(3)}}{h_3} - \frac{M_2}{h_2}\right].$$

Da nun $M_{(2)} = M_2$ und $M_{(3)} = M_3$ ist, so folgt, daß sich, abgesehen vom Vorzeichen, verhält:

feldern sind die negativen Spannkräfte infolge Betriebslast so klein, daß die (positive) Spannkraft infolge Eigengewicht überwiegt. In diesen Feldern treten also in den Hauptdiagonalen überhaupt keine Druckkräfte auf, so daß auch keine Gegendiagonalen nötig sind. Wenn allerdings die Lasten ihre Richtung wechseln können (z. B. bei Windverbänden), so müssen, falls sie als schlaffe Stäbe konstruiert sind, in jedem Felde zwei Diagonalen vorhanden sein.

Fachwerke, die in jedem Felde zwei *steife* Diagonalen haben, sind auf jeden Fall statisch unbestimmte Konstruktionen und müssen als solche berechnet werden. Man kann sie auch angenähert berechnen, indem man in jedem Felde nur eine Diagonale annimmt, deren Spannkraft berechnet und hiervon jeder der beiden Diagonalen die Hälfte zuweist. Mitunter gibt solch eine „Berechnung" annähernd richtige Resultate, mitunter auch nicht.

IV. Ungleich belastete Hauptträger.

In der Praxis kommen bekanntlich die einfachen geraden und symmetrisch belasteten Brücken leider nicht allzu häufig vor. Oft hat man es vielmehr mit Bauwerken zu tun, deren Widerlager nicht rechtwinklig, sondern schief zur Brückenachse gerichtet sind (sog. „schiefe" Brücken). Ferner tritt bei Eisenbahnbrücken häufig der Fall ein, daß das Gleis in einer Kurve über die Brücke geführt werden muß, wodurch dann eine weitere Ungleichheit in der Belastung der beiden Hauptträger hervorgerufen wird. Im folgenden wollen wir auf die Berechnung solcher Bauwerke genauer eingehen.

1. Die Übertragungszahlen $k_1 = \frac{\gamma_1}{e/2}$, $k_2 = \frac{\gamma_2}{e/2}$ usw.

In Fig. 128a ist eine derartige Konstruktion im Grundriß gezeichnet. Sie stellt eine zweigleisige Brücke, eine Arbeitsbühne mit übergeführtem Gleis, od. dgl. dar. Der Hauptträger H_I hat die Auflager A und B, der Hauptträger H_{II} die Auflager C und D. Ersterer ist in Fig. 128b in Ansicht dargestellt. Von vornherein möge bemerkt werden, daß sich eine korrekte Untersuchung der beweglichen Belastung nur mittels Einflußlinien durchführen läßt. In Fig. 128 möge das Verfahren am Untergurtstabe U erläutert werden.

Die gewöhnliche Einflußlinie für U ist in Fig. 128c dargestellt. Würde es sich nun um eine normale eingleisige Brücke

handeln, mit rechteckigem Grundriß und symmetrisch liegenden Schienen, so würde von jeder Achse des Zuges der Druck eines Rades auf einen Hauptträger entfallen. An welcher Stelle der Brücke sich die Achse auch befinden möge, von der Gesamtlast

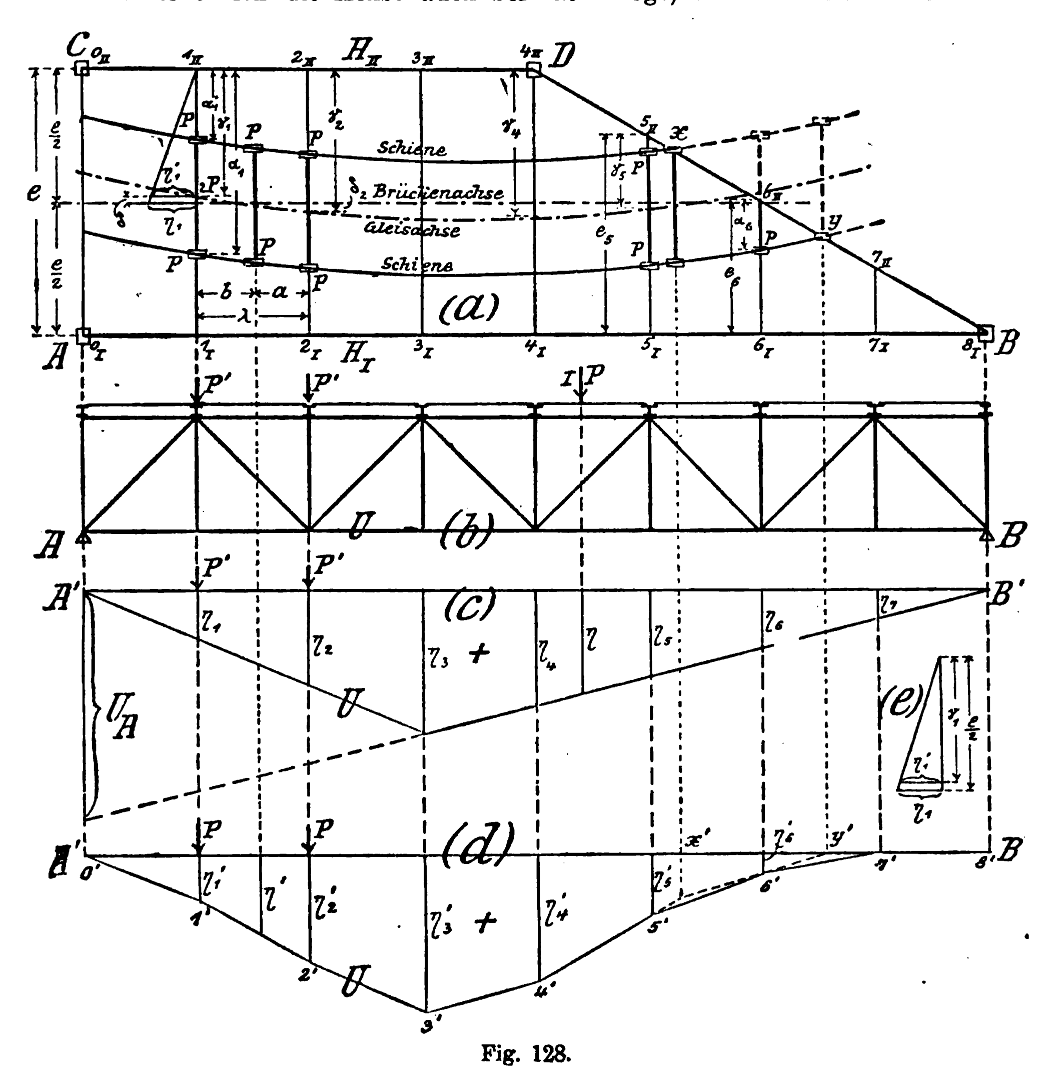


Fig. 128.

einer Achse — sie werde mit 2 P bezeichnet — hat jeder Hauptträger stets die Hälfte, also P (t), aufzunehmen. Und die Spannkraft, die die Last einer Achse in dem Stabe U hervorbringt, ist stets

(I) $U = P \cdot \eta =$ Raddruck $\times$ darunter liegende Ordinate.

Diese Beziehung ändert sich aber, sobald die Gleisachse nicht mehr mit der Brückenachse zusammenfällt. Nehmen wir an, auf dem Querträger 1_I—1_{II} stehe gerade eine Achse. [Da das Gleis in einer Kurve liegt, wird diese Achse etwas schräg zur Brückenachse stehen. Wir können sie aber der Einfachheit wegen rechtwinklig zur Brücke annehmen.] Der Raddruck sei P. Dann entfällt auf den Hauptträger H_I an der Stelle 1_I der Auflagerdruck des Querträgers 1_I—1_{II}; also eine Last

$$P' = P\frac{\alpha_1}{e} + P\frac{\alpha_1'}{e} = P\cdot\frac{\alpha_1 + \alpha_1'}{e},$$

worin e die Länge des Querträgers (= Breite der Brücke) und α_1 und α_1' die Abstände der Räder von dem Auflagerpunkte 1_{II} des Querträgers sind. Etwas bequemer läßt sich P' darstellen, wenn wir die beiden Raddrücke ersetzen durch ihre in Gleismitte anzunehmende Ersatzkraft $2P$, so daß sich ergibt

$$\text{„Achswert"}\quad P' = 2P\frac{\gamma_1}{e} = P\cdot\frac{2\gamma_1}{e} = P\cdot\frac{\gamma_1}{e/2},$$

worin γ_1 die Entfernung von Gleismitte bis zum Punkte 1_{II} ist. Dieses ist also der Lastanteil, der von einer auf dem Querträger 1_I—1_{II} stehenden Achse auf den Hauptträger H_I entfällt und werde „Achswert" genannt. Die Spannkraft, die jetzt in dem Stabe U entsteht, ergibt sich hiernach:

$$\text{(II)}\qquad U = P'\cdot\eta_1 = P\frac{\gamma_1}{e/2}\cdot\eta_1\,.$$

Wir müssen jetzt also den Raddruck P zunächst mit der „*Übertragungszahl*" $k_1 = \frac{\gamma_1}{e/2}$ multiplizieren, um dann durch Multiplikation dieses „*Achswertes*" P' mit der Ordinate η_1 der Einflußlinie die Spannkraft des Stabes U zu erhalten.

Rückt die betrachtete Achse auf einen neuen Querträger, z. B. auf 2_I—2_{II}, so muß der Raddruck P mit der neuen Übertragungszahl $k_2 = \frac{\gamma_2}{e/2}$ multipliziert werden, um den Druck P' zu finden, den die Achse in dieser neuen Stellung auf den Hauptträger H_I ausübt.

Während bei einer normalen Brücke jede Achse für den Hauptträger stets einen bestimmten Wert bedeutet (bei einer eingleisigen Eisenbahnbrücke z. B. bedeutet jede Lokomotivachse stets 8,50 t für einen Hauptträger), ändert sich jetzt der Wert von ein und derselben Achse je nach deren Stellung auf der

Brücke. Wenn wir also die Spannkraft eines Stabes bei einer bestimmten Zugstellung berechnen wollen, müssen wir zunächst jeden Raddruck P mit der für die betreffende Stelle gültigen Übertragungszahl k multiplizieren und finden dann erst durch Multiplikation der neuen Achswerte P' mal den Ordinaten die gesuchte Spannkraft. Verändert der Zug seine Stellung auf der Brücke, so gehört zu jeder Achse eine neue Übertragungszahl; es müssen also zunächst die neuen Werte P' bestimmt werden usw. Mit anderen Worten: Wir haben gar kein bestimmtes Lastenschema mehr, sondern für jede neue Zugstellung müßten erst von allen Achsen die neuen Achswerte ausgerechnet werden, die dann mit den Ordinaten der Einflußlinie zu multiplizieren sind. Es ist klar, daß diese Berechnung für die Praxis zu umständlich ist.

2. Die reduzierten Einflußlinien.

Wir schlagen deshalb folgenden Weg ein: Statt für die verschiedenen Stellungen der Achse jedesmal den Raddruck P mit der betreffenden Übertragungszahl k_1, k_2 usw. zu multiplizieren, multiplizieren wir die einzelnen Ordinaten η_1, η_2 der Einflußlinie selber mit diesen Zahlen k_1, k_2 usw. Wir bestimmen also einen Wert

$$\eta_1' = \eta_1 \cdot k_1 = \eta_1 \cdot \frac{\gamma_1}{e/2}$$

und tragen diesen von einer neuen Nullachse $A'B'$ auf (Fig. 128d). Ebenso rechnen wir einen neuen Wert

$$\eta_2' = \eta_2 \cdot k_2 = \eta_2 \cdot \frac{\gamma_2}{e/2}$$

aus und tragen diesen in Fig. 128d auf; entsprechend η_3' usw. Wenn jetzt z. B. auf dem Querträger 1_I—1_{II} eine Achse steht, so brauchen wir nur den Raddruck P zu multiplizieren mit der Ordinate η_1' und finden hiermit die bei dieser Laststellung entstehende Spannkraft des Stabes U. Denn es ist

$$P \cdot \eta_1' = P \cdot \eta_1 \cdot \frac{\gamma_1}{e/2} = P \cdot \frac{\gamma_1}{e/2} \cdot \eta_1 = P' \cdot \eta_1 = U\,.$$

Steht die Achse auf dem Querträger 2_I—2_{II}, so finden wir die jetzt entstehende Spannkraft U, indem wir wiederum nur den Raddruck P multiplizieren mit der darunter liegenden Ordinate η_2' usw. Dadurch, daß wir an Stelle der Lasten P die Ordinaten η_1, η_2 usw. mit den betreffenden Übertragungszahlen k_1, k_2 usw. multipliziert haben, haben wir also den großen Vorteil, daß wir jetzt die Raddrücke selber unverändert lassen können.

Bisher haben wir stets angenommen, daß die Achsen direkt auf den Querträgern stehen. Um die Fig. 128d auch für den Fall zu vervollständigen, daß die Achse *zwischen* zwei Querträgern steht, z. B. zwischen $1_I—1_{II}$ und $2_I—2_{II}$ (Fig. 128a), verbinden wir in bekannter Weise die Endpunkte der Ordinaten η_1', η_2' usw. durch gerade Linien. Dann ist für diese Laststellung:

$$U = P \cdot \eta' .$$

Eine Besonderheit liegt noch in dem rechten Teile der Brücke (Fig. 128a) mit den verkürzten Querträgern. Für den Querträger $4_I—4_{II}$ ergibt sich in normaler Weise die Übertragungszahl $k_4 = \frac{\gamma_4}{e/2}$. Der Querträger $5_I—5_{II}$ hat dagegen die anormale Länge e_5; für ihn ist also die Übertragungszahl $k_5 = \frac{\gamma_5}{\frac{1}{2} e_5}$. Bei dem Querträger $6_I—6_{II}$ ist ferner zu beachten, daß bei ihm die eine Schiene bereits die Brücke verlassen hat. Hier dürfen wir also bei der Berechnung der Übertragungszahl nicht mehr die beiden Raddrücke durch ihre Ersatzkraft zusammenfassen, sondern wir haben es nur mit dem einen Raddruck P zu tun. Der Achswert für diesen Querträger wäre $P' = P \cdot \frac{\alpha_6}{e_6}$; also ist die Übertragungszahl

$$k_6 = \frac{\alpha_6}{e_6} .$$

Für den Querträger $7_I—7_{II}$ ist die Übertragungszahl gleich Null, da auf diesen überhaupt keine Raddrücke mehr hinkommen. In den Feldern $\overline{5—6}$ und $\overline{6—7}$ wechselt also plötzlich an den Stellen x und y die Belastung, indem an Stelle von zwei Lasten eine Last resp. an Stelle von einer Last keine Last auftritt. Eine genauere Untersuchung ergibt, daß infolge dieser Unregelmäßigkeit die Linien $\overline{5'—6'}$ und $\overline{6'—7'}$ in Fig. 128d nicht gerade von $5'$ nach $6'$ resp. $6'$ nach $7'$ durchlaufen. Sie müßten vielmehr als geknickte Linien, wie in Fig. 128d punktiert angedeutet ist, eingezeichnet werden, damit die Ordinaten η' auch für diese Laststellungen den genauen Wert für die Stabkraft U angeben. Doch genügt es für die Praxis natürlich stets, wenn man sie als gerade Linien einzeichnet. Eine überflüssige Feinheit ist hier um so weniger angebracht, als durch die Längsträger, die ja nicht direkt unter den Schienen angeordnet werden, noch eine kleine Abänderung eintreten kann.

Sobald wir dann das Polygon Fig. 128d mit den Knickpunkten $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ ($8'$) bestimmt haben, stellen wir

unser Zugschema (bei Eisenbahnbrücken also $P = 8{,}50$ t für die Lokomotivachsen resp. 6,50 t für die Tender- und Güterwagenachsen) so auf, daß die schwersten Achsen über den größten Ordinaten η' stehen, multiplizieren jeden Raddruck P mit der darunter liegenden Ordinate η' und finden

$$U = \Sigma(P \cdot \eta')\,.$$

Auf diese Weise ist die Spannkraft des Stabes U gefunden. Fig. 128d nennen wir die *„reduzierte Einflußlinie“* für Stab U. Hiermit ist dieser Stab erledigt.

In entsprechender Weise werden nun für die anderen Stäbe die „reduzierten Einflußlinien“ konstruiert: Zunächst zeichnen wir die normale Einflußlinie des betreffenden Stabes. Von dieser multiplizieren wir an jedem Belastungspunkte die Ordinate η mit der Übertragungszahl k, die für diesen Belastungspunkt gilt, und erhalten hierdurch die Werte $\eta' = \eta \cdot k$. Schließlich werden die Ordinaten η' aufgetragen, deren Endpunkte geradlinig verbunden, und die reduzierte Einflußlinie ist fertig. Das Zugschema selbst braucht dann nicht mehr verändert zu werden, sondern wird für alle Einflußlinien in unveränderter Größe zur Bestimmung der größten Spannkraft benutzt.

Man beachte, daß zu jedem Belastungspunkt (Querträger) eine bestimmte feststehende Übertragungszahl gehört. Diese wird dann für sämtliche Einflußlinien an der betreffenden Stelle benutzt. Läuft das Gleis auf eine Strecke parallel den Hauptträgern, so haben innerhalb dieser Strecke die Querträger dieselbe Übertragungszahl.

8. Weitere Vereinfachungen.

Man kann übrigens die Übertragungszahlen k_1 usw. noch etwas anders darstellen: Für den Querträger 1_I—1_{II} z. B. läßt sich k_1 schreiben:

$$k_1 = \frac{\gamma_1}{e/2} = \frac{e/2 - \delta_1}{e/2} = 1{,}0 - \frac{\delta_1}{e/2}\,.$$

Tritt die Gleismitte nach dem Hauptträger H_I über, so ist an Stelle des Minus- ein Pluszeichen einzusetzen; für k_2 also

$$k_2 = 1{,}0 + \frac{\delta_2}{e/2}\,.$$

Diese Berechnung ist insofern etwas bequemer, als in den bauseitig gegebenen Unterlagen meistens die Abweichungen δ zwischen Gleismitte und Brückenachse eingeschrieben sind.

Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß man einen Ausdruck von der Form $\eta_1' = \eta_1 \cdot \frac{\gamma_1}{e/2}$ bekanntlich auch sehr einfach graphisch darstellen kann: Wir tragen (Fig. 128e) den Nenner $\frac{1}{2}e$ als die Höhe und den einen Zähler, η_1, als die Grundlinie eines Dreiecks auf. Dann tragen wir auf der Höhe den anderen Zähler, γ_1, ab und ziehen durch dessen Endpunkt die Parallele zur Grundlinie. Diese Parallele ist gleich $\eta_1 \cdot \frac{\gamma_1}{\frac{1}{2}e} = \eta_1'$. Das Hilfsdreieck Fig. 128e können wir auch direkt in die Grundrißfigur Fig. 128a einzeichnen. Die Abstände γ sind hier bereits vorhanden, die Höhe $\frac{1}{2}e$ = halbe Brückenbreite ebenfalls. Wir brauchen also nur auf der Brückenachse in den Schnittpunkten mit den Querträgern die Ordinaten η_1, η_2 usw. der normalen Einflußlinie auftragen und finden durch Ziehen der Parallelen die Ordinaten η_1', η_2' usw. der reduzierten Einflußlinie. Auf diese Weise lassen sich die reduzierten Einflußlinien ohne große Mühe herleiten. Zweckmäßig wird man die Fig. 128c und d nicht getrennt aufzeichnen, sondern zusammenlegen.

4. Berücksichtigung der Überhöhung und der Zentrifugalkraft bei Eisenbahnbrücken.

Bei der Berechnung von Eisenbahnbrücken muß man, falls die Untersuchung genau durchgeführt werden soll, noch auf folgendes achten: Bekanntlich wird in einer Kurve, um das Hinausschleudern der Wagen zu verhüten, die äußere Schiene gegen die innere um eine Strecke h überhöht. Infolge dieser Überhöhung bleiben die Eisenbahnfahrzeuge nicht mehr vertikal, sondern stellen sich etwas schräg ein (Fig. 129), wodurch eine weitere Ungleichheit in der Belastung der Hauptträger entsteht.

a) Um den **Einfluß der Überhöhung** zu verfolgen, ist in Fig. 129 der Querträger $1_I - 1_{II}$ aus Fig. 128a in der Ansicht dargestellt. Auf dem Querträger befindet sich gerade eine Achse, also eine Last von 2 P (t). Den Abstand vom Punkte O, in dem die Gleisachse den Querträger schneidet, bis zum Punkte 1_{II}, nenne ich wieder γ_1. Jetzt ist aber der Schwerpunkt S des Wagens nicht mehr senkrecht über Gleismitte. Er ist vielmehr um eine Strecke s nach dem Mittelpunkt der Kurve hinübergerückt. Die Achslast 2 P hat jetzt also vom Auflagerpunkt 1_{II} des Querträgers die Entfernung $\gamma_1 - s$, und der Auflagerdruck, den diese Achslast von 2 P (t) auf den Hauptträger H_1 ausübt, ist demnach:

$$P' = 2P \frac{(\gamma_1 - s)}{e} = P \frac{(\gamma_1 - s)}{e/2}.$$

Der Faktor $\frac{\gamma_1 - s}{e/2}$ wäre also die Übertragungszahl, mit der die Ordinate η_1 der normalen Einflußlinie zu multiplizieren ist, um die Ordinate η_1' der reduzierten Einflußlinie zu erhalten.

b) Einfluß der Zentrifugalkraft. Nun muß aber, wenn ein Körper sich in einer Kurve bewegt, außer dem Gewicht des Körpers noch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden. Letztere ist als eine im Schwerpunkt wirkende horizontale Kraft einzuführen. Bezeichnen wir die zu einer Last von 1,0 t gehörige Zentrifugalkraft mit Z, so gehört zu einer Achslast eine Zentrifugalkraft von $2P \cdot Z$ (t). Der Abstand des Schwerpunktes S

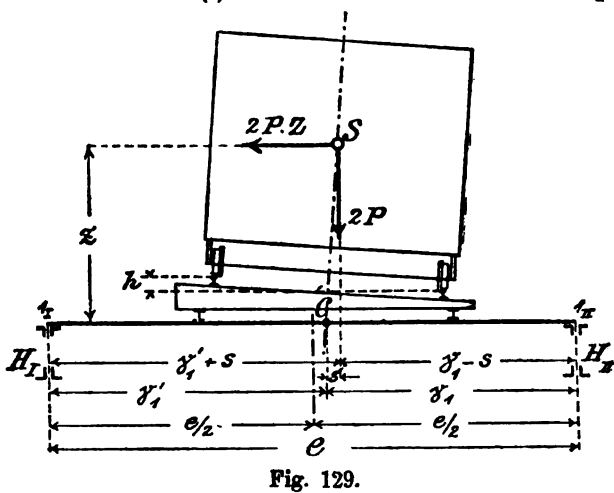


Fig. 129.

über der Schwerachse des Querträgers sei z. Dann ergeben sich die durch die Zentrifugalkraft hervorgerufenen Auflagerdrücke:

$$\text{auf den Hauptträger } H_I: \quad +2P \cdot Z \cdot z \cdot \frac{1}{e} = +P\frac{Z \cdot z}{e/2},$$

$$\text{„ „ „ } H_{II}: \quad -2P \cdot Z \cdot z \cdot \frac{1}{e} = -P\frac{Z \cdot z}{e/2}.$$

[Bei H_{II} entsteht ein negativer Auflagerdruck, da die Zentrifugalkraft den Querträger an der Stelle 1_{II} entlastet.] Je nachdem sich der Zug in Ruhe oder Bewegung befindet, bekommen wir also an der Stelle 1_I den Auflagerdruck des Querträgers auf den Hauptträger H_I insgesamt:

$$\text{„Achswerte“} \begin{cases} P_R' = P \cdot \dfrac{(\gamma_1 - s)}{e/2}, \\[2ex] P_B' = P \cdot \dfrac{(\gamma_1 - s) + Z \cdot z}{e/2}. \end{cases}$$

Letzterer Auflagerdruck ist der größere. Der Hauptträger H_I muß also für den Fall berechnet werden, daß der Zug die Brücke mit der größtzulässigen Geschwindigkeit befährt. Die Übertragungszahl k_1 für den Querträger $1_I—1_{II}$ ist dann:

$$k_1 = \frac{(\gamma_1 - s) + Z \cdot z}{e/2} \quad \text{(für Hauptträger } H_I\text{)}.$$

Und zwar rühren in diesem Ausdrucke die einzelnen Glieder von den verschiedenen Ursachen her:

γ_1 von der exzentrischen Lage der Gleisachse,
s „ „ Schräglage des Wagens (Überhöhung),
$Z \cdot z$ „ „ Zentrifugalkraft.

Für den Querträger $2_I—2_{II}$ ergibt sich die Übertragungszahl in entsprechender Weise:

$$k_2 = \frac{(\gamma_2 - s) + Z \cdot z}{e/2}$$

usw.

Für den Hauptträger H_{II} wären dagegen die durch eine Achslast von $2\,P$ (t) entstehenden Auflagerdrücke für Ruhe- und für Bewegungszustand (Fig. 129):

$$P_R'' = P \cdot \frac{(\gamma_1' + s)}{e/2},$$

$$P_B'' = P \cdot \frac{(\gamma_1' + s) - Z \cdot z}{e/2}.$$

Dieser Hauptträger wird also dann am meisten belastet, wenn der Zug auf der Brücke stillsteht. Die Übertragungszahl an der Stelle I_{II} ist:

$$k_1 = \frac{(\gamma_1' + s)}{e/2} \quad \text{(für Hauptträger } H_{II}\text{)}.$$

Auf diese Weise kann man für jeden Hauptträger die reduzierten Einflußlinien auch mit Berücksichtigung von Überhöhung und Zentrifugalkraft finden.

c) Größe von Z und s. Die Zentrifugalkraft Z pro 1,0 t Achslast ist nach den Lehren der Dynamik:

$$Z = \frac{1{,}0\ \text{t}}{g} \frac{V^2}{R}.$$

Hierin ist g (die Erdbeschleunigung) $= 9{,}81$ m/sec.², V die Fahrgeschwindigkeit in m/sec., R der Radius der Kurve in m. Beispiel: $V = 75$ km pro Stunde $= 20{,}8$ m pro sec., $R = 400$ m. Dann ist

$$Z = \frac{1{,}0}{9{,}81} \frac{20{,}8^2}{400} = 0{,}108\ \text{t}.$$

Für eine Lokomotivachse von 17,0 t beträgt also in diesem Beispiele die gesamte Zentrifugalkraft:

$$Z' = 17{,}0 \cdot 0{,}108 = 1{,}84 \text{ t}.$$

Die Überhöhung h entnehme man den in der Hütte (Abschnitt „Eisenbahnbau"), im Eisenbahnkalender usw. enthaltenen Vorschriften. Die Höhe z ist in jedem einzelnen Falle dadurch bestimmt, daß der Schwerpunkt eines Eisenbahnwagens rd. 1,50 m über Schienenoberkante anzunehmen ist. Nennen wir nun noch die Spurweite des Fahrzeuges w ($w =$ rd. 1,50 m), so ergibt sich der gebrauchte Ausschlag s:

$$s : z = h : w\,,$$

$$s = z \cdot \frac{h}{w} = z \cdot \frac{h}{1{,}50}\,.$$

Hiermit sind alle Angaben, die zur Berechnung der Übertragungszahlen gebraucht werden, ermittelt.

§ 46.

Zusammenstellung der Methoden zur Berechnung von Fachwerken mit beweglicher Belastung.

Als allgemeine Wiederholung des Abschnittes II wollen wir im folgenden eine Zusammenstellung, verbunden mit gelegentlicher Erweiterung, der bisher besprochenen Methoden vornehmen.

Zunächst sei an die Voraussetzungen erinnert, an die unsere bisherigen Untersuchungen bei beweglicher Belastung geknüpft sind: Erstens, die Konstruktion ist ein einfacher Fachwerkbalken auf zwei Stützen (ohne innere Gelenke und ohne überkragende Enden); zweitens die Belastung wirkt vertikal abwärts, oder — allgemeiner ausgedrückt — rechtwinklig zu der Bewegungsrichtung des beweglichen Lagers; drittens, das System sei ein einfaches Dreieckfachwerk. Von der letzteren Einschränkung haben wir allerdings durch die Betrachtung zusammengesetzter Systeme (Fig. 124) schon eine Ausnahme gemacht.

Da sehr viele im Brücken- und Kranbau vorkommende Fachwerke die obigen drei Bedingungen erfüllen, umfaßt der Abschnitt II bereits ein beträchtliches Gebiet aller Tragwerke mit beweglicher Belastung. In den Abschnitten III—V wird dann der Rest untersucht werden: Abschnitt III Träger mit überkragenden Enden; Abschnitt IV Tragwerke mit Gelenken, Abschnitt V nicht-einfache Systeme und ganz allgemeine Methoden für Systeme jeder Bauart und Belastung.

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir in diesem Paragraphen folgende Einteilung hinsichtlich der Belastung vornehmen:

A) Träger mit gleichmäßig verteilter Belastung,
B) „ „ beliebig vielen Einzellasten,
C) „ „ nur zwei Einzellasten (Spezialfall von B).

Zu der ersten Gruppe gehören Fußgängerbrücken, Straßenbrücken bei größerer Spannweite (bei kleineren Spannweiten müssen Straßenbrücken für schwere Einzellasten — Dampfwalze oder dgl. — untersucht werden), Transportbrücken usw. In der zweiten Gruppe sind hauptsächlich Eisenbahnbrücken, und in der dritten Gruppe hauptsächlich Kranträger.

Gruppe A.

Fachwerke mit *gleichmäßig verteilter* Belastung.

I. Methode: Einflußlinien. (Fig. 130.)

a) Gurtstäbe. Einflußlinien wechseln nicht mit ihrem Vorzeichen; für O sämtlich negativ, für U sämtlich positiv. Größte Spannkraft bei Vollbelastung (Fig. 130b—c).

$$\text{(I)} \qquad O = -p \cdot F_o = -p \cdot \frac{1}{2} l \cdot \eta_o ,$$

$$\text{(II)} \qquad U = +p \cdot F_u = +p \cdot \frac{1}{2} l \cdot \eta_u .$$

Für das Aufzeichnen zu merken: Der Knickpunkt E' liegt stets unter dem Bezugspunkt des Stabes. Ist der Bezugspunkt nicht gleichzeitig Belastungspunkt, so müssen die Endpunkte der unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten durch besondere Linien verbunden werden (Fig. 130d und e).

b) Füllungsstäbe. Einflußlinien bestehen aus einem positiven und einem negativen Teil. [Nur für den Fall, daß Bezugspunkt innerhalb der Spannweite, *ein* Vorzeichen für die Einflußlinie.] Daher zwei Spannkräfte angeben: größten Zug, größten Druck. (Fig. 130f—h.)

$$\text{(III)} \qquad \underset{+}{D} = +p \cdot \frac{1}{2} n_d \cdot \eta_d ; \qquad \underset{-}{D} = -p \cdot \frac{1}{2} n_d' \cdot \eta_d' ,$$

$$\text{(IV)} \qquad \underset{-}{V} = -p \cdot \frac{1}{2} n_v \cdot \eta_v ; \qquad \underset{+}{V} = +p \cdot \frac{1}{2} n_v' \cdot \eta_v' .$$

Für das Aufzeichnen zu merken: Die Abschrägung $E'F'$ liegt stets unter dem Felde, in dem der betreffende Schnitt α—α oder β—β die *die Lasten tragende* Gurtung schneidet.

Ob D_A, V_A usw. positiv oder negativ ist, ergibt sich aus dem zu $A = 1{,}0$ t gezeichneten Kräfteplan. Auch direkt nach *Ritter* zu entscheiden: Dreht die Kraft $A = 1{,}0$ t (am linken Trägerteil) *links* um Bezugspunkt von $D(V)$, so muß $D(V)$ auf den linken Trägerteil *rechts*drehend wirken; hierdurch Vorzeichen für $D_A(V_A)$ bestimmt. Entsprechend für B.

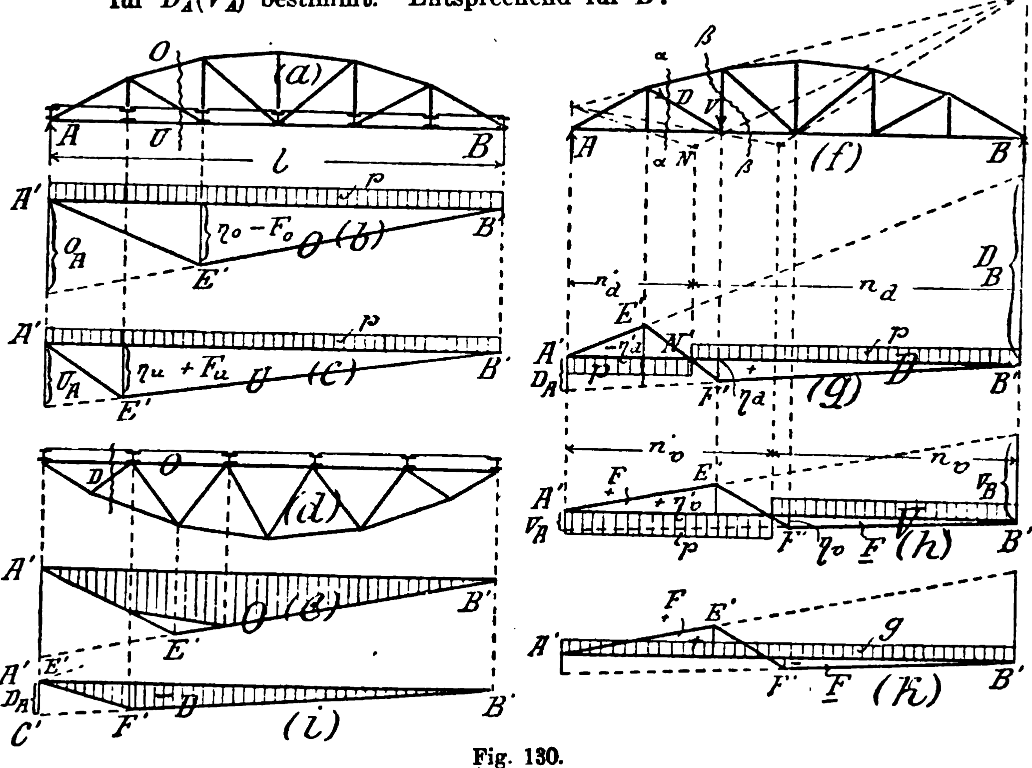


Fig. 130.

Der Nullpunkt N' der Einflußlinie liegt vertikal unterhalb der Lastscheide N (§ 28, Fig. 103). Letztere bei nicht zu großen Trägernetzen zeichnerisch ziemlich genau bestimmbar. Hierdurch Konstruktion der Einflußlinie z. B. aus N' und $D_A(V_A)$.

Neu zu merken:

α) Zusammenhang bei Eigengewicht und gleichmäßiger Verkehrslast.

Für einen beliebigen Füllungsstab ist nach Einflußlinie Fig. 130k und Fig. 130h:

Spannkraft infolge ständiger Last (bei g t/m): $S_g = g(\underset{+}{F} - \underset{-}{F})$,

größter Zug infolge beweglicher Last (bei p t/m): $S_z = +p\,\underset{+}{F}$,

„ Druck „ „ „ („ p „): $S_d = -p\,\underset{-}{F}$.

[$\underset{+}{F}$ und $\underset{-}{F}$ sind die Inhalte des positiven und negativen Teiles der Einflußfläche.]

Hieraus:

$$S_s + S_d = p(\underset{+}{F} - \underset{-}{F}) = \frac{p}{g} \cdot g(\underset{+}{F} - \underset{-}{F}) = \frac{p}{g} S_g .$$

Zwischen den Spannkräften S_g, S_s und S_d irgendeines Stabes besteht also die Beziehung:

$$\text{(V)} \qquad S_s = \frac{p}{g} S_g - S_d \quad \text{bzw.}$$

$$\text{(Va)} \qquad S_d = \frac{p}{g} S_g - S_s .$$

Somit kann man S_s aus S_g und S_d, oder S_d aus S_g und S_s direkt bestimmen.

[Beispiel: $g = 0{,}2$ t/m, $p = 0{,}3$ t/m, $S_g = +12{,}0$ t (nach Kräfteplan), $S_d = -4{,}0$ t: dann $S_s = +22{,}0$ t.]

β) Rechnerische Bestimmung einzelner Ordinaten.

Die zum Aufzeichnen gebrauchten Hilfswerte S_A, S_B werden der größeren Genauigkeit wegen häufig rechnerisch ermittelt (Formeln s. Fig. 111°). Statt dessen kann man auch direkt einzelne Ordinaten der Einflußlinie ausrechnen. Z. B. für das Fachwerk Fig. 131:

Gurtstab O. Für Last in m ergibt sich Ordinate η:

$$\text{(I)} \qquad O = \eta = \frac{M}{r} = \frac{1{,}0 \cdot x'_m}{l} x_m \cdot \frac{1}{r} = \frac{x_m \cdot x'_m}{l \cdot r} = \frac{x_m \cdot x'_m}{l \cdot h \cos\beta} .$$

Hat das Fachwerk gleiche Feldweiten λ, so können x_m, x'_m und l durch λ ausgedrückt werden:

$$\text{(Ia)} \qquad \eta = \frac{m\lambda \cdot m'\lambda}{n\lambda \cdot h\cos\beta} = \frac{\lambda}{n} \frac{m \cdot m'}{h \cos\beta} .$$

Diagonale D. Für Last im Punkte o ergibt sich:

$$D = \eta_1 = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right] = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1{,}0 \cdot x'_o}{l}\left(\frac{x_o}{h_o} - \frac{x_u}{h_u}\right)\right] = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{x'_o}{l}\left(\frac{x_o}{h_o} - \frac{x_u}{h_u}\right).$$

Entsprechend Ordinate η_2. Bei gleichen Feldweiten λ vereinfachen sich die Formeln erheblich (Fig. 131).

Vertikale V wird aus Diagonale D abgeleitet. Für Last 1,0 t im Punkte o folgt aus dem Gleichgewicht dieses Punktes:

$$V = \eta_3 = +1{,}0 - D \sin\varphi = +1{,}0 - \eta_1 \cdot \sin\varphi .$$

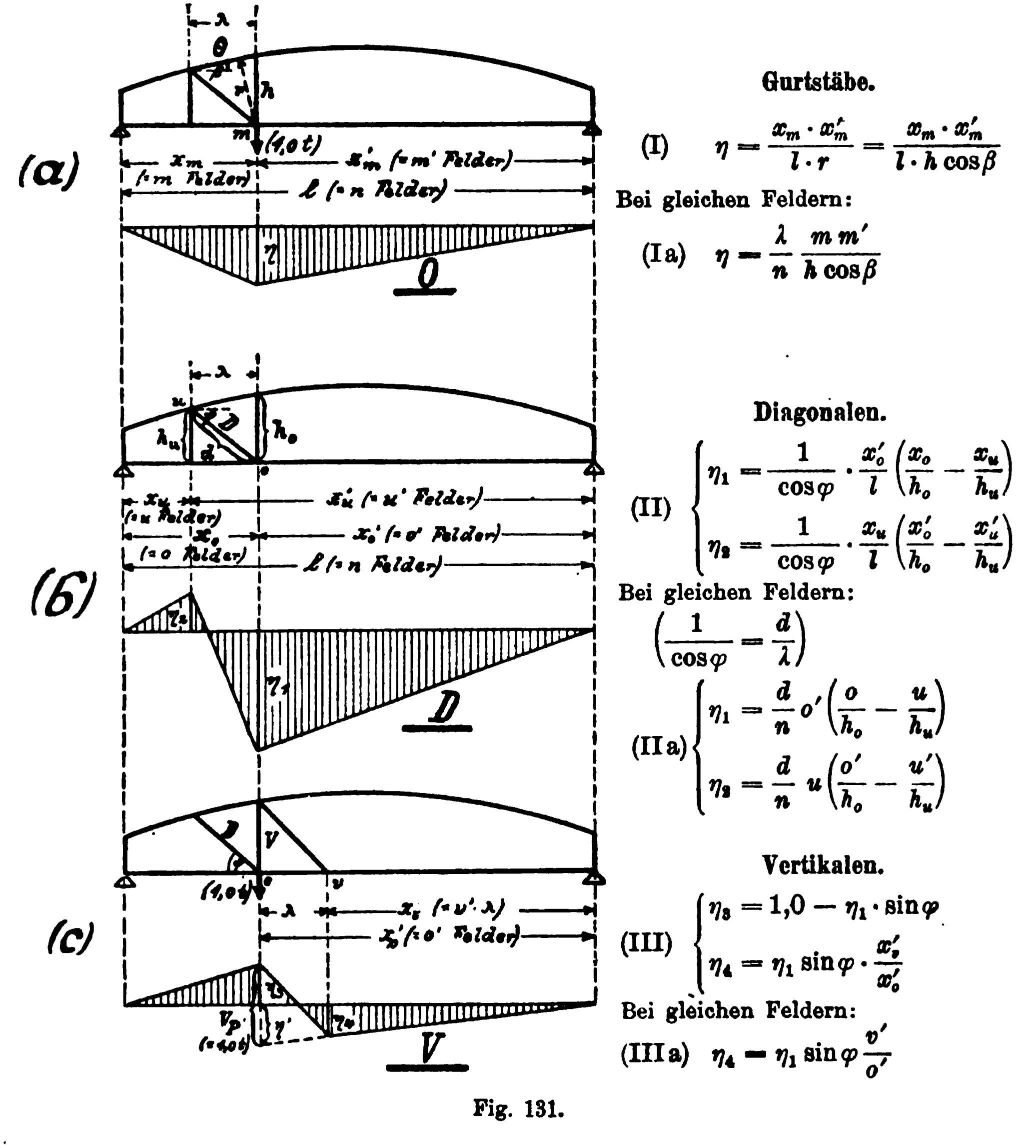


Fig. 131.

Ordinate η_4 folgt geometrisch aus Ordinate η_3 (unter Benutzung des Vertikalabstandes $V_{p'} = 1{,}0$ t; § 28c, 35a):

$$\eta_4 = \eta' \cdot \frac{x'_v}{x'_o} = (1{,}0 - \eta_3)\frac{x'_v}{x'_o} = [1{,}0 - (1{,}0 - \eta_1 \sin\varphi)]\frac{x'_v}{x'_o} = \eta_1 \sin\varphi \cdot \frac{x'_v}{x'_o}.$$

Bei gleichen Feldweiten entsprechende Vereinfachung (Fig. 131).

Somit sind die Hauptordinate η eines Gurtstabes, die Hauptordinaten η_1 und η_2 einer Diagonalen und die Hauptordinaten

η_3 und η_4 einer Vertikalen auch rechnerisch festgelegt. (Die Vertikalordinaten erscheinen als Ableitungen der Diagonalordinaten.)

II. Methode: Analytisch.

a) Gurtstäbe. Maßgebende Stellung für alle Gurtstäbe: Vollbelastung. Spannkraft

$$(V) \qquad O\,,\; U = \mp \frac{M_m}{r_m} = \frac{\text{Knotenpunktsmoment}}{\text{Abstand}}\,.$$

Moment nach der Formel:

$$(VI) \qquad M_m = \frac{1}{2} p \cdot x_m \cdot x'_m$$

bzw., bei n gleichen Feldweiten λ,

$$(VIa) \qquad M_m = \frac{p\,\lambda^2}{2} m(n-m)\,.$$

[Statt dessen auch aus den Querkräften entwickeln: $M_0 = 0$, $M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda$, usw.]

Die obigen Formeln für M_m sind aber wegen der indirekten Belastung nur für den (allerdings häufigsten) Fall gültig, daß Knotenpunkt gleichzeitig Belastungspunkt. Anderenfalls M_m (Fig. 131°a) finden, indem M_{m-1} und M_{m+1} auftragen und dann M_m aus Figur abmessen oder berechnen. [Meistens zulässige Vereinfachung: M_m ebenfalls gleich $\frac{1}{2} g\, x_m \cdot x'_m$.]

b) Füllungsstäbe. *α) Träger mit horizontalen parallelen Gurten.* Hier werden Füllungsstäbe direkt aus der größten positiven und größten negativen Querkraft bestimmt. Letztere sind (§ 29):

$$\begin{cases} (VII) \qquad Q^+_{(m-1)-m} = \dfrac{p}{2}\,\dfrac{x'^2_m}{l-\lambda_m} \quad \text{bzw.} \quad = \dfrac{p\cdot\lambda}{2(n-1)}(n-m)^2\,, \\[2ex] (VIIa) \qquad Q^-_{(m-1)-m} = \dfrac{p}{2}\,\dfrac{x^2_{m-1}}{l-\lambda_m} \quad \text{bzw.} \quad = \dfrac{p\cdot\lambda}{2(n-1)}(m-1)^2\,. \end{cases}$$

Aus Q:

$$\begin{cases} (VIII) \qquad D = \dfrac{Q}{\sin\varphi}\,; \\[2ex] (IX) \qquad V = Q\,. \end{cases}$$

β) Träger mit gekrümmter Gurtung. Falls Vollbelastung maßgebend, Füllungsstäbe aus Momentensumme des betreffenden Schnittes berechnen. Andernfalls einmal rechts und einmal links vom Schnitte belasten. Hierdurch größte positive und größte negative Spannkraft (§ 35a):

(X) $$D_r = \frac{p}{2} \frac{x_m'^2}{\left(l + \lambda \frac{D_A}{D_{P'}}\right)} \cdot D_A$$ [bei rechtsseitiger Belastung],

(Xa) $$D_l = \frac{p}{2} \frac{x_{m-1}^2}{\left(l + \lambda \frac{D_B}{D_{P''}}\right)} \cdot D_B$$ [„ linksseitiger „].

(XI) $$V_r = \frac{p}{2} \frac{x_m'^2}{\left(l + \lambda \frac{V_A}{V_{P'}}\right)} \cdot V_A$$ [bei rechtsseitiger Belastung],

(XIa) $$V_l = \frac{p}{2} \frac{x_{m-1}^2}{\left(l + \lambda_m \frac{V_B}{V_{P''}}\right)} \cdot V_B$$ [„ linksseitiger „].

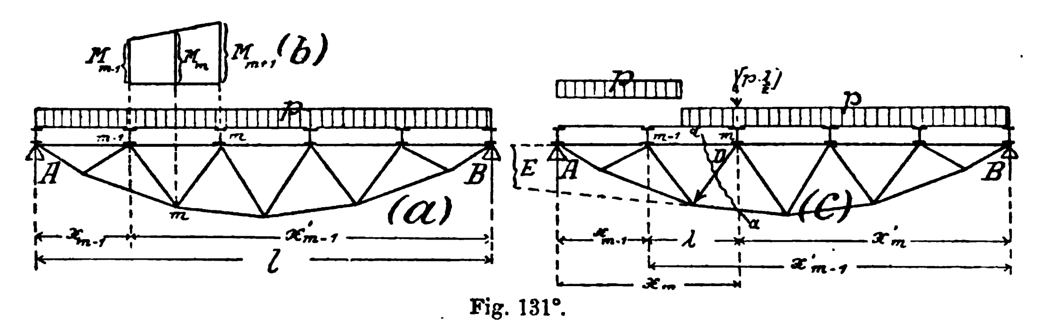


Fig. 131°.

Die Hilfswerte D_A, D_B usw. mittels Kräfteplan oder analytisch:

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} = \frac{M_u}{h_u}\right)$$

$$V = -D \sin\varphi .$$

Vereinfachung der Bestimmung von D_A usw. bei gleichen Feldweiten s. § 35a, Fig. 111°.

Die Hilfswerte $D_{P'}$ usw. sind aus der Zusammenstellung § 35a, Fig. 112 und 113 zu entnehmen.

Sämtliche Hilfswerte mit Vorzeichen einsetzen. Hierdurch ergibt sich dann schließlich das Vorzeichen von D_r usw. [Die Verhältnisse $D_A : D_{P'}$ usw. sind stets negativ.] Zur Kontrolle die Vorzeichen von $D(V)$ auch direkt nach *Ritter* entscheiden. [Für Fig. 131°c: A dreht um Bezugspunkt E links herum, folglich muß D rechts herum drehen, folglich D bei rechtsseitiger Belastung *Druck*.]

Abstände x_m' und x_{m-1} von demjenigen Felde aus zählen, in dem der betreffende Schnitt die die Lasten tragende Gurtung schneidet.

Annäherungsverfahren für die Füllungsstäbe: Nur Grundstellung angenommen (von B bis Punkt m in Fig. 131°c). Da hierbei nicht die größte Stabkraft, noch am Anfang willkürlich eine Last $p \cdot \frac{\lambda}{2}$ zugezählt. Dann ist (§ 34):

$$\text{(XIV)} \quad D_r = \frac{p}{2} \, \frac{x'_m \cdot x'_{m-1}}{l} \cdot D_A \,,$$

$$\text{(XIVa)} \quad D_l = \frac{p}{2} \, \frac{x_{m-1} \cdot x_m}{l} \cdot D_B \,.$$

$$\text{(XV)} \quad V_r = \frac{p}{2} \, \frac{x'_m \cdot x'_{m-1}}{l} \cdot V_A \,,$$

$$\text{(XVa)} \quad V_l = \frac{p}{2} \, \frac{x_{m-1} \cdot x_m}{l} \cdot V_B \,.$$

Hierbei also $D_{P'}$ usw. entbehrlich. Diese Annäherung rechnet zugunsten der Sicherheit.

III. Methode: Graphisch.

a) Gurtstäbe. α) *Für beliebigen Träger.* Die Momente infolge Vollbelastung mit p sind durch die Ordinaten einer Parabel dargestellt mit der Pfeilhöhe $f = \frac{1}{8} p \, l^2$ (Fig. 118b). Aus diesen Ordinaten nach Fig. 118a die Gurtkräfte, und zwar erscheinen letztere im λfachen Maßstabe. Bei gleichen Feldweiten also nicht f, sondern $f' = \frac{1}{8} \frac{p \, l^2}{\lambda}$ auftragen. Dann erscheinen die Spannkräfte direkt.

β) *Für Parallelträger.* Die Pfeilhöhe der Parabel gleich $\frac{1}{8} \frac{p \, l^2}{h}$ nehmen. Dann sind die Ordinaten die Spannkräfte.

b) Füllungsstäbe. α) *Für beliebigen Träger.* Nach Fig. 118d die Kraft $\frac{1}{2} p \, l$ unter A auftragen, hierdurch die Auflagerdrücke für die verschiedenen Grundstellungen bestimmen und aus den Auflagerdrücken nach *Culmann* die Füllungsstäbe.

β) *Für Parallelträger* die größten Querkräfte der einzelnen Felder nach Fig. 119a und c (bei ungleichen Feldern), bzw. nach Fig. 119d (bei gleichen Feldern). Aus den Querkräften direkt die Vertikalen und, durch Ziehen von Parallelen, die Diagonalen.

Gruppe B.

Fachwerke mit beliebig vielen Einzellasten.

I. Methode: Einflußlinien. (Vgl. auch Fig. 130.)

a) Gurtstäbe. Die Einflußlinie wird in gewöhnlicher Weise gezeichnet. Um die *größte* Spannkraft zu erhalten, die schwersten und am engsten zusammenstehenden Lasten da aufstellen, wo die größten Ordinaten sind. Probieren mittels eines auf Pauspapier gezeichneten Lastenschemas. Mathematisches Kennzeichen für die gefährliche Laststellung nach § 28, I:

$$\text{(XVI)}\qquad \begin{cases} R\,\dfrac{x_m}{l} < (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\,, \\[2mm] R\,\dfrac{x'_m}{l} < (P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m)\,. \end{cases}$$

Voraussetzung für dieses mathematische Kennzeichen: Durch das Verschieben habe keine Last die Brücke verlassen oder sei neu hinauf gekommen. Andernfalls bleibt nur Probieren übrig.

Über dem Knick der Einflußlinie muß stets eine (möglichst schwere) Last stehen.

Zu beachten ist bei Eisenbahnbrücken, daß auch der Fall berücksichtigt werden muß, daß der Tender vor der Lokomotive fährt. Diese Zuganordnung „Kopf an Kopf“ (Tender, Lokomotive, Lokomotive, Tender, Güterwagen) bringt meistens die größeren Momente hervor.

Zur Vereinfachung der Rechnung: Alle über einem *geraden* Stücke der Einflußlinie stehenden Lasten können durch ihre Ersatzkraft R ersetzt werden. [Statt $P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 \ldots$: $R \cdot \eta_R$.]

b) Füllungsstäbe. Zwei Stellungen untersuchen. Von Grundstellung ausgehen und dann nachsehen, ob vorgezogene Stellung einen Zuwachs in der Spannkraft hervorbringt. [Am einfachsten durch Vergleichen der Ordinaten mittels Stechzirkel od. dgl. Analytisches Kennzeichen siehe § 28, II.]

Einflußlinien sind die übersichtlichste Methode für Systeme aus beweglichen Einzellasten. Nur wenn für Momente und Querkräfte Tabellen vorhanden (Eisenbahnbrücken der preußisch-hessischen Staatsbahnen u. a.), analytisches Verfahren vorziehen.

II. Methode: Analytisch.

a) Gurtstäbe. Momente für die einzelnen Knotenpunkte aus Tabellen entnehmen und durch Abstände dividieren. Falls keine

Tabellen vorhanden, ist das Verfahren nur dann praktisch, wenn nicht zuviel Lasten in Frage kommen.

Die Lasten so aufstellen, daß an dem Knotenpunkte, dessen Moment berechnet werden soll, möglichst die schwersten Lasten stehen. Im allgemeinen für jeden Knotenpunkt besondere Laststellung. Analytisches Kennzeichen für gefährliche Laststellung wie vorhin bei Methode I.

Methode II stets anwenden bei Eisenbahnbrücken, da hier Tabellen (§ 32, IV).

b) Füllungsstäbe. α) *Parallelträger.* Wir bestimmen für jedes Feld diejenige Laststellung, die die größte Querkraft hervorbringt. Mit Grundstellung anfangen. Dann Kennzeichen (§ 31, II):

$$\text{(XVII)} \quad \begin{cases} \text{Ist } R < P_1 \dfrac{l}{\lambda}, & \text{dann **Grundstellung maßgebend**,} \\ \text{,, } R > P_1 \dfrac{l}{\lambda}, & \text{,, **vorgezogene Stellung maßgebend**.} \end{cases}$$

Im zweiten Falle noch weiter untersuchen:

$$\text{(XVIIa)} \quad \begin{cases} \text{Ist } R' < (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda}, & \text{dann einmal vorg. Stellg. maßg.,} \\ \text{,, } R' > (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda}, & \text{,, zweimal ,, ,, ,, .} \end{cases}$$

usw.

[Bedeutungen: R = Lastensumme bei Grundstellung; R' bei einmal vorgezogener Stellung; P_1 erste Last, P_2 zweite Last; l Brückenlänge; λ Länge des betreffenden Feldes.]

Sobald über Laststellung entschieden, wird die zugehörige Querkraft bestimmt:

$$\begin{aligned} &\text{(XVIII)} && Q = +A && \text{[falls Grundstellg. maßg. war],} \\ &\text{(XVIIIa)} && Q' = +A' - P_1 \frac{a}{\lambda} && \text{[,, einmal v. St. ,, ,,],} \\ &\text{(XVIIIb)} && Q'' = +A'' - \frac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda} && \text{[,, zweimal v. St. ,, ,,].} \end{aligned}$$

[a und b sind die Abstände der ersten und zweiten Last von einander.]

Sobald dann auch Querkraft ausgerechnet ist, folgen in bekannter Weise D und V:

$$D = \frac{Q}{\sin\varphi}; \qquad V = Q.$$

Resultate: Bei rechtsseitiger Belastung für die ersten linken Felder meistens vorgezogene Stellung, für die anderen Grundstellung.

β) ***Für beliebigen Träger.*** (Bezugspunkt außerhalb der Spannweite.) Zunächst entscheiden, ob Grundstellung oder vorgezogene Stellung (§ 36, II):

$$\text{(XIX)} \begin{cases} \text{Ist } R < P_1 \dfrac{l}{\lambda} \dfrac{D_{P'}}{D_A}, & \text{dann Grundstellung maßgebend,} \\ \;\;\text{„} \;\; R > P_1 \dfrac{l}{\lambda} \dfrac{D_{P'}}{D_A}, & \text{„ vorgezogene Stellung maßgebend.} \end{cases}$$

Im zweiten Falle noch weiter untersuchen:

$$\text{(XX)} \begin{cases} \text{Ist } R' < (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda} \cdot \dfrac{D_{P'}}{D_A}, & \text{dann einmal vorgez. Stellg. maßg.,} \\ \;\;\text{„} \;\; R' > (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda} \cdot \dfrac{D_{P'}}{D_A}, & \text{„ zweimal „ „ „ .} \end{cases}$$

[Bedeutungen der einzelnen Buchstaben wie bei Formeln (XVII) und (XVIII). Werte $D_{P'}$ usw. aus der Zusammenstellung Fig. 112, 113 zu entnehmen.]

Die entsprechenden Formeln gelten auch für die Vertikalen.

Sobald über Laststellung entschieden, die Spannkraft ausrechnen:

$$\begin{array}{ll} \text{(XXI)} & D = A \cdot D_A \qquad \text{[falls Grundstellg. maßgeb. war],} \\ \text{(XXIa)} & D = A' \cdot D_A + P' \cdot D_{P'} \qquad \text{[„ vorgez. Stellg. „ „].} \end{array}$$

Entsprechend für V. In den Formeln ist

$$\begin{array}{lll} \text{(XXII)} & P' = P_1 \dfrac{a}{\lambda} & \text{bei einmal vorgezog. Stellg.,} \\ \text{(XXIIa)} & \text{bzw.} = \dfrac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda} & \text{„ zweimal „ „ .} \end{array}$$

Nachdem somit rechtsseitige Belastung erledigt ist, in entsprechender Weise linksseitige Belastung untersuchen: Zunächst über maßgebende Stellung entscheiden und dann Spannkraft berechnen. [In den Formeln tritt statt A: B, statt P': P'', statt D_A: D_B, und statt $D_{P'}$: $D_{P''}$.] Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn man statt dessen zunächst sämtliche Füllungsstäbe nur für rechtsseitige Belastung bestimmt und dann die Spannkräfte bei linksseitiger Belastung durch entsprechende Vertauschung der Stäbe findet.

Resultate: Bei rechtsseitiger Belastung ist bei Halbparabelträgern in den ersten Feldern links häufig vorgezogene Stellung, für die anderen Felder Grundstellung maßgebend. Bei Parabelträgern aber gerade umgekehrt.

III. Methode: Graphisch.

a) Gurtstäbe. α) *Für beliebige Träger.* Zu dem Lastenschema wird ein Seilpolygon gezeichnet und durch Ausprobieren mehrerer Stellungen für jeden Punkt m die größte Ordinate y_m des Seilpolygons bestimmt. Aus diesem y_m dann nach Fig. 120c die Gurtkräfte. Polweite H des Seilpolygons zweckmäßig als Vielfaches der Feldweite λ nehmen (damit der Bruch $H:\lambda$ eine bequeme Zahl wird; Fig. 120c).

β) *Für Parallelträger.* Die Ordinate y_m des Seilpolygons gibt direkt die zu dem betreffenden Punkte m gehörige Gurtkraft an, und zwar im Verhältnis $H:h$. Zweckmäßig also, H als Vielfaches von h zu nehmen.

b) Füllungsstäbe. α) *Für beliebige Träger.* A-Polygon zeichnen und hierin den Unterschied ΔA der Auflagerdrücke bei vorgezogener Stellung und bei Grundstellung bestimmen. Ferner Kraft P' bestimmen, die durch das Vorziehen in dem Belastungspunkte auf der anderen Seite des Schnittes entsteht. Dann nach *Culmann* die Spannkräfte in dem betreffenden Stabe infolge ΔA und infolge P'. Der Vergleich dieser beiden Spannkräfte gibt an, ob Grundstellung oder vorgezogene Stellung maßgebend ist. Für die als maßgebend erkannte Stellung dann die endgültige Bestimmung nach *Culmann* durchführen.

β) *Für Parallelträger.* Mittels A-Polygon die Querkräfte bei Grundstellung mit denen bei vorgezogener Stellung vergleichen. (Erstere direkt gleich dem Auflagerdruck A, letztere gleich dem betreffenden Auflagerdruck A' weniger P'.) Aus der größten Querkraft dann V und D.

Gruppe C.

Fachwerke mit nur zwei Lasten (Kranträger).

Hier ist vor allen Dingen für jeden Stab die maßgebende Laststellung klar: Bei einem Gurtstab muß eine (und zwar die schwerere) Last über dem Bezugspunkte, und die andere nach der Mitte des Fachwerkes zu stehen. Bei einem Füllungsstabe ist stets Grundstellung maßgebend.

Diese Einfachheit der Stellungen kommt namentlich der analytischen und der rein graphischen Methode zugute.

I. Analytische Methode.

a) Gurtstäbe. Für jede Stellung vom Knotenpunkte 0 (links) an den Auflagerdruck A bestimmen. Da nun, wie aus der Last-

stellung folgt, zwischen A und Bezugspunkt keine weitere Last steht, ist das Moment einfach:

$$\text{(XXIII)} \qquad M_m = A \cdot x_m .$$

Aus dem Moment dann die Gurtkräfte.

b) Füllungsstäbe. α) *Für beliebige Träger.* Wir bestimmen die Spannkraft eines jeden Füllungsstabes infolge $A = 1{,}0$ t (mittels Kräfteplan oder analytisch). Dann ist, da zwischen Auflager und Schnitt keine weitere äußere Kraft vorhanden:

$$\text{(XXIIIa)} \qquad \begin{cases} D = A \cdot D_A , \\ V = A \cdot V_A . \end{cases}$$

Die Auflagerdrücke A für die verschiedenen Laststellungen sind sehr einfach zu berechnen, da, bei gleichen Feldweiten, die Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Werten A konstant ist.

β) *Für Parallelträger.* Da stets Grundstellung, so ist die Querkraft Q gleich dem Auflagerdruck A. Aus Q dann V und D.

c) Gurtstäbe und Füllungsstäbe gemeinsam. Auch die für einen Gurtstab maßgebende Laststellung ist im vorliegenden Belastungsfalle stets so, daß am linken Teile nur der Auflagerdruck A als einzige äußere Kraft wirkt. Hieraus folgende Berechnung: Wir bestimmen für Gurt- und Füllungsstäbe die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t (mittels Kräfteplan oder analytisch). Dann ist

$$\begin{matrix} \text{(XXIV)} \\ \text{(XXIVa)} \end{matrix} \qquad \begin{cases} O = A \cdot O_A ; \qquad U = A \cdot U_A ; \\ D = A \cdot D_A ; \qquad V = A \cdot V_A . \end{cases}$$

Für die praktische Ausrechnung geht man so vor, daß man der Reihe nach die einzelnen Laststellungen vornimmt, zu jeder derselben den Auflagerdruck A hinschreibt und daneben die Spannkräfte, die zu der betreffenden Laststellung gehören (Beispiel s. § 47, siebente Aufgabe).

II. Graphische Methode.

Gurtstäbe und Füllungsstäbe gemeinsam. Zu jeder Laststellung gehört im allgemeinen ein Ober- und ein Untergurtstab, eine Diagonale und eine Vertikale, für die diese eine Laststellung maßgebend ist. Da diese Laststellung außerdem derart ist, daß am linken Teile außer dem Auflagerdruck A keine weitere äußere Kraft wirkt, so ergibt sich folgender Rechnungsgang: Mittels A-Polygon bestimmen wir zu jeder Laststellung den zugehörigen Auflagerdruck A. Aus diesem Auflagerdruck A ergeben sich dann

nach *Culmann* die vier Stäbe, die im allgemeinen zu jeder Laststellung gehören. (Hierbei muß man für die vier Stäbe zwei verschiedene Schnitte $\alpha-\alpha$ und $\beta-\beta$ legen, um sie nach *Culmann* ermitteln zu können. Der Auflagerdruck bleibt aber für beide Schnitte derselbe.)

Diese graphische Methode ist augenscheinlich nichts anderes als die zeichnerische Durchführung des vorhin unter Ic entwikkelten Gedankens.

D. Beziehungen zwischen den Spannkräften.

Es ist bereits mehrfach darauf hingewiesen, daß es nicht immer nötig ist, bei einem Fachwerke alle Stäbe einzeln zu untersuchen, sondern daß man häufig eine Stabkraft aus der andern folgern kann. Hierbei haben wir namentlich folgende Vereinfachungen für die Berechnung gefunden (vertikale Belastung vorausgesetzt):

I. Für die Gurtstäbe.

a) *Beim Fachwerk mit Hauptvertikalen* (Fig. 90a) lassen sich je ein Obergurt- und ein Untergurtstab miteinander in Beziehung bringen:

(XXV) $$O \cdot \cos\beta = -U \cdot \cos\gamma\,.$$

Hieraus folgt:

(XXVa) $$\left.\begin{cases} U = -O \cdot \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -O \cdot \dfrac{u}{o}\,; & \text{oder} \\ O = -U \cdot \dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} = -U \cdot \dfrac{o}{u} & \end{cases}\right\} \text{vgl. Fig. 90a.}$$

b) *Beim Fachwerk mit Hilfsvertikalen* (Fig. 90b) lassen sich je zwei Ober- und zwei Untergurtstäbe in Beziehung bringen:

(XXVI) $$S_1 \cdot \cos\beta_1 = S_2 \cdot \cos\beta_2\,.$$

Hieraus folgt:

(XXVIa) $$\left.\begin{cases} S_2 = S_1 \cdot \dfrac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} = S_1 \cdot \dfrac{s_2}{s_1}\,; & \text{oder} \\ S_1 = S_2 \cdot \dfrac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = S_2 \cdot \dfrac{s_1}{s_2} & \end{cases}\right\} \text{vgl. Fig. 90b.}$$

Die obigen Beziehungen gelten für jede Laststellung und sind unabhängig davon, ob die Belastung am Ober- oder am Untergurt angreift. Daraus folgt, daß beispielsweise für Fig. 90a die Einflußlinie für den Stab U genau übereinstimmt mit der Einflußlinie für O; nur daß die Ordinaten im Verhältnis $\cos\beta : \cos\gamma$ verändert erscheinen. Auch die gefährlichen Laststellungen müssen deshalb für beide Stäbe dieselben sein. Es genügt

also in solchen Fällen, nur die halbe Anzahl der Stäbe mittels Einflußlinien od. dgl. zu berechnen. Die andere Hälfte folgt dann direkt durch die obigen Beziehungen.

II. Für die Füllungsstäbe.

a) *Beim Fachwerk mit Hauptvertikalen.* Hat ein solches eine horizontale, unbelastete Gurtung, so lassen sich je eine Diagonale und eine Vertikale in Beziehung bringen. Für Fig. 78 z. B. folgt aus dem Gleichgewicht des Punktes o, daß stets ist:

$$\text{(XXVII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= -D \cdot \sin\varphi \quad \text{bzw.} \\ D &= -\frac{V}{\sin\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Wenn man also z. B. die Einflußlinien für die Vertikalen gezeichnet und mit deren Hilfe die Spannkräfte V ermittelt hat, so hat man aus jedem V auch das betreffende D. Es wäre Verschwendung, sowohl für D als auch für V die Einflußlinien zu zeichnen. [Anwendung namentlich bei Parallelträgern (Fig. 132).]

Hat das Fachwerk keine horizontale, unbelastete Gurtung, so gehört im allgemeinen zu jedem Füllungsstabe eine besondere Einflußlinie. Auch wenn zwei solcher Einflußlinien ähnlich aussehen, z. B. D_4 und V_3 in Fig. 100, so sind sie doch nicht proportional, sondern haben verschieden gelegene Nullpunkte, somit verschiedene Beitragsstrecken, Laststellungen usw. Jede muß also besonders gezeichnet und untersucht werden. [Einzelne Teile von zwei Einflußlinien können trotzdem gelegentlich in Beziehung gebracht werden. So stimmt z. B. in Fig. 98, 99 die positive Laststellung von D_4 mit der negativen Laststellung von V_3 überein. Daraus folgt, daß sich $D_4^{(+)}$ zu $V_3^{(-)}$ verhält wie die Höhen der betreffenden Einflußdreiecke, also $D_4^{(+)} : V_3^{(-)} = D_{4,\Delta} : V_{3,\Delta}$; usw.]

b) *Beim Fachwerk mit Hilfsvertikalen.* Hier lassen sich diejenigen Hilfsvertikalen, die mit der unbelasteten Gurtung zu einem Hilfsknotenpunkte zusammenstoßen, durch die Gurtkräfte ausdrücken. In Fig. 93a folgt z. B. bei jeder Laststellung (am Untergurt) aus dem Gleichgewicht von Punkt $\bar{4}$:

$$\text{(XXVIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} V_4 &= -S_1 \cdot \sin\beta_1 + S_2 \cdot \sin\beta_2 \\ &= S_1 \frac{-a+b}{s_1} = S_2 \frac{-a+b}{s_2} \end{aligned} \right\}.$$

Für V_4 braucht also keine besondere Einflußlinie gezeichnet zu werden. Hinsichtlich Vorzeichen in den Formeln: S_1 und S_2 zunächst als Zug angenommen. Dann sofort zu entscheiden, ob die betreffende Zugkraft S_1, S_2 in V_4 positive oder negative Spannung erzeugt. Später beim Zahleneinsetzen müssen dann natürlich S_1 und S_2 noch mit besonderen Vorzeichen eingeführt werden.]

III. Allgemeine Kontrollen.

Aus der Betrachtung der einzelnen Knotenpunkte lassen sich zwischen den einzelnen Stäben stets Kontrollen aufstellen. Beispielsweise sieht man in Fig. 131°a, daß die vier am Knotenpunkte m zusammenlaufenden Stäbe stets ein Gleichgewichtssystem bilden müssen, ganz gleichgültig, in welchem Knotenpunkte des Obergurtes die Last steht. Man kann diese Beziehung (geschlossenes Kräftepolygon) gelegentlich zur Kontrolle oder auch zur Berechnung eines der Stäbe mit Hilfe der anderen benutzen. Bei Aufstellung solcher Zusammenhänge zwischen den einzelnen Stäben wird man meistens die unbelasteten Knotenpunkte ins Auge fassen, damit man nicht durch das Hinzukommen einer Knotenpunktslast gestört wird. Ferner wird man solche Knotenpunkte vorziehen, an denen die Gurtstäbe ohne Knick durchlaufen.

Schlußbetrachtung.

Hinsichtlich der Eignung und Beliebtheit der verschiedenen Verfahren möge auch noch einiges gesagt werden: Neuerdings neigt man immer mehr dazu, der analytischen Berechnungsweise den Vorzug zu geben. Bei gleichmäßig verteilter Belastung, für die die Formeln besonders einfach werden, ferner bei Eisenbahnbrücken, für die Tabellen aufgestellt sind, und schließlich bei Kranträgern mit ihrem einfachen Belastungsschema ist die analytische Methode sicherlich zugleich die bequemste, genaueste und am schnellsten zum Ziele führende. In allen anderen Fällen dürften die Einflußlinien am geeignetsten sein, die Wirkung beweglicher Lastensysteme zu ermitteln. Die rein graphischen Methoden sind in einfachen Fällen langwieriger als das analytische Verfahren und bieten andrerseits bei komplizierter Belastung nicht die Übersichtlichkeit, durch die sich die Einflußlinien auszeichnen. Deshalb haben die graphischen Methoden viel von ihrer früheren Beliebtheit verloren. Noch weit mehr gilt dieses von manchen anderen Verfahren, die eigentlich nur noch historische Bedeutung haben und deshalb in diesem Buche gar nicht mehr aufgenommen wurden. Für den modernen Statiker gibt es nur noch die Entscheidung: „entweder analytisch oder Einflußlinien“. Aber natürlich ist diese Frage nur subjektiv zu behandeln.

Hinsichtlich der *Anordnung* der Berechnung ist es am übersichtlichsten, wenn man die ständige und die bewegliche Last möglichst getrennt behandelt. Man kann aber auch die Momente

infolge ständiger und infolge beweglicher Last zusammenfassen und hieraus dann direkt die größten Gurtkräfte bestimmen. Beim Parallelträger kann man ferner die Querkräfte infolge der beiden Belastungen zusammenziehen, um aus den größten Querkräften die Füllungsstäbe zu ermitteln.

§ 47.

Sammlung von Aufgaben zu Abschnitt II.

Erste Aufgabe.

Für den Parallelträger Fig. 132 sind die Einflußlinien zu zeichnen!

Spannweite $l = 6\lambda = 6 \cdot 3{,}00 = 18{,}00$ m; Höhe $h = 2{,}25$ m; Fahrbahn oben.

Das Aufzeichnen der Einflußlinien geschieht natürlich nach den allgemeinen im 3. Vortrage entwickelten Regeln. Nur lassen sich beim Parallelträger einige Vereinfachungen erzielen.

a) Gurtstäbe. Wir tragen (Fig. 132) für jeden Stab die Strecke

$$A'O' = \frac{x}{r} = \frac{x}{h}$$

auf. Bei gleichen Feldweiten ist diese Strecke beim zweiten Stabe doppelt so groß als beim ersten; beim dritten Stabe dreimal so groß als beim ersten; usw. Somit geht das Aufzeichnen der Dreiecke $A'E'B'$ sehr schnell.

Wie aus den Formeln für O und U bzw. aus einem schräg gelegten Schnitte β—β folgt, ist $O_1 = -U_2$. Entsprechend $O_2 = -U_3$. Je zwei Gurtstäbe haben also eine gemeinsame Einflußlinie. Nur das Vorzeichen derselben muß für O und U verschieden genommen werden.

Zusatz: Statt die Werte $(x:h)$ aufzutragen, kann man auch so vorgehen, daß man nur die Werte x aufträgt (also $A'O' = x$) und hiermit die Einflußlinien zeichnet. Dann muß man natürlich das Resultat nachträglich durch h dividieren. Um diese Division nicht zu vergessen, schreibt man neben der Einflußlinie den „*Multiplikator*“ $k = 1:h$. Im vorliegenden Falle also

$$k = \frac{1}{h} = 0{,}444\,.$$

Beispiel: Für O_3 würde man $x_3 = 9{,}0$ auftragen, die Einflußlinie zeichnen, die Ordinaten η abmessen und schließlich die Produkte $P \cdot \eta$ mit dem Multiplikator $k = (1:h)$ multiplizieren:

$$O_4 = k(P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + \ldots)\,.$$

Hinsichtlich des *Maßstabes* gilt folgende Festsetzung: Die Strecken $A'C' = (x:h)$ bzw. $= x$ tragen wir als Kräfte auf. Beispielsweise für den Stab O_3 (mit $x_3 = 9{,}0$ m) ist $A'C' = x_3 = 9{,}0$ t. Dieser Wert wird also in einem Kräftemaßstab aufgetragen. In demselben Maßstabe werden nachher die Ordinaten η abgemessen. Der Multiplikator k ist eine bloße Zahl, ohne Benennung.

b) Füllungsstäbe. Da beim Parallelträger die Füllungsstäbe aus den Querkräften folgen, können wir die Einflußlinien für D und V auch so finden, daß wir zunächst die Einflußlinien für die Querkräfte zeichnen. Nach Band I, § 65, Fig. 110d, tragen wir von einer Nullachse $A'B'$ aus die Strecken $A'C' = 1{,}0$ t und $B'D' = 1{,}0$ t auf, verbinden kreuzweise und tragen unter dem Felde, für das die Querkraft bestimmt werden soll, die Abschrägung ein. Im rechten Teile sind die Ordinaten positiv, im linken Teile negativ.

Von den Querkräften kommen wir zu den Füllungsstäben mittels der Beziehungen:

$$V = -Q\,, \qquad D = +Q \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\,.$$

[Auf der linken Trägerhälfte sind linkssteigende Diagonalen; daher die obigen Vorzeichen.] Für die Vertikalen benutzen wir also ohne weiteres die Einflußlinien für die Querkraft; nur die Vorzeichen sind entgegengesetzt zu nehmen. Für die Diagonalen benutzen wir ebenfalls die gleichen Einflußlinien, nur schreiben wir den „*Multiplikator*"

$$k = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{3{,}75}{2{,}25} = 1{,}667$$

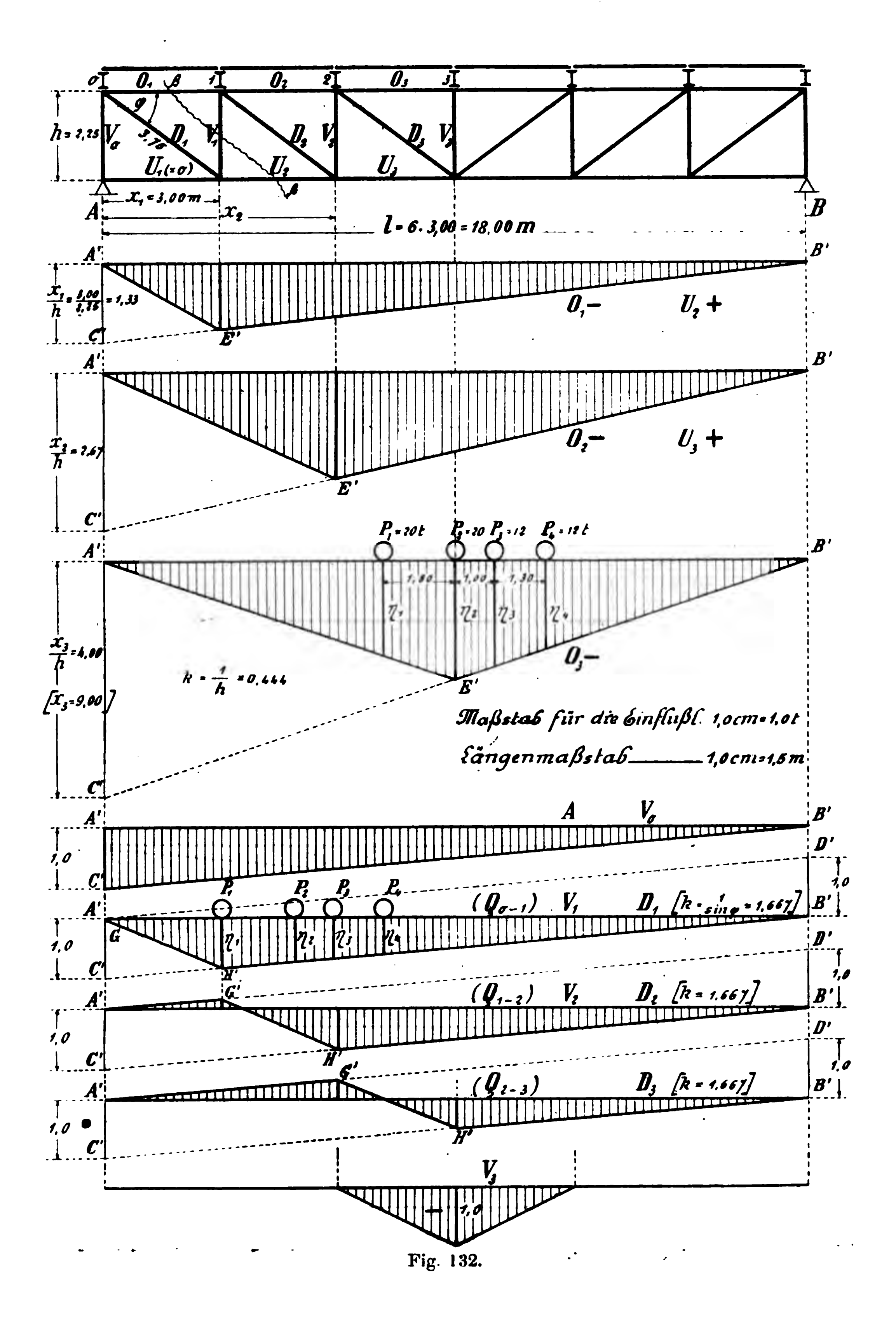
hinzu. Dann brauchen wir also an den Einflußlinien selbst nichts zu ändern, sondern setzen bei den Diagonalen einfach vor das Resultat noch den Faktor k:

$$D = k(P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + \ldots)\,.$$

Auf diese Weise werden beim Parallelträger die Diagonalen und Vertikalen gemeinsam bestimmt (Fig. 132).

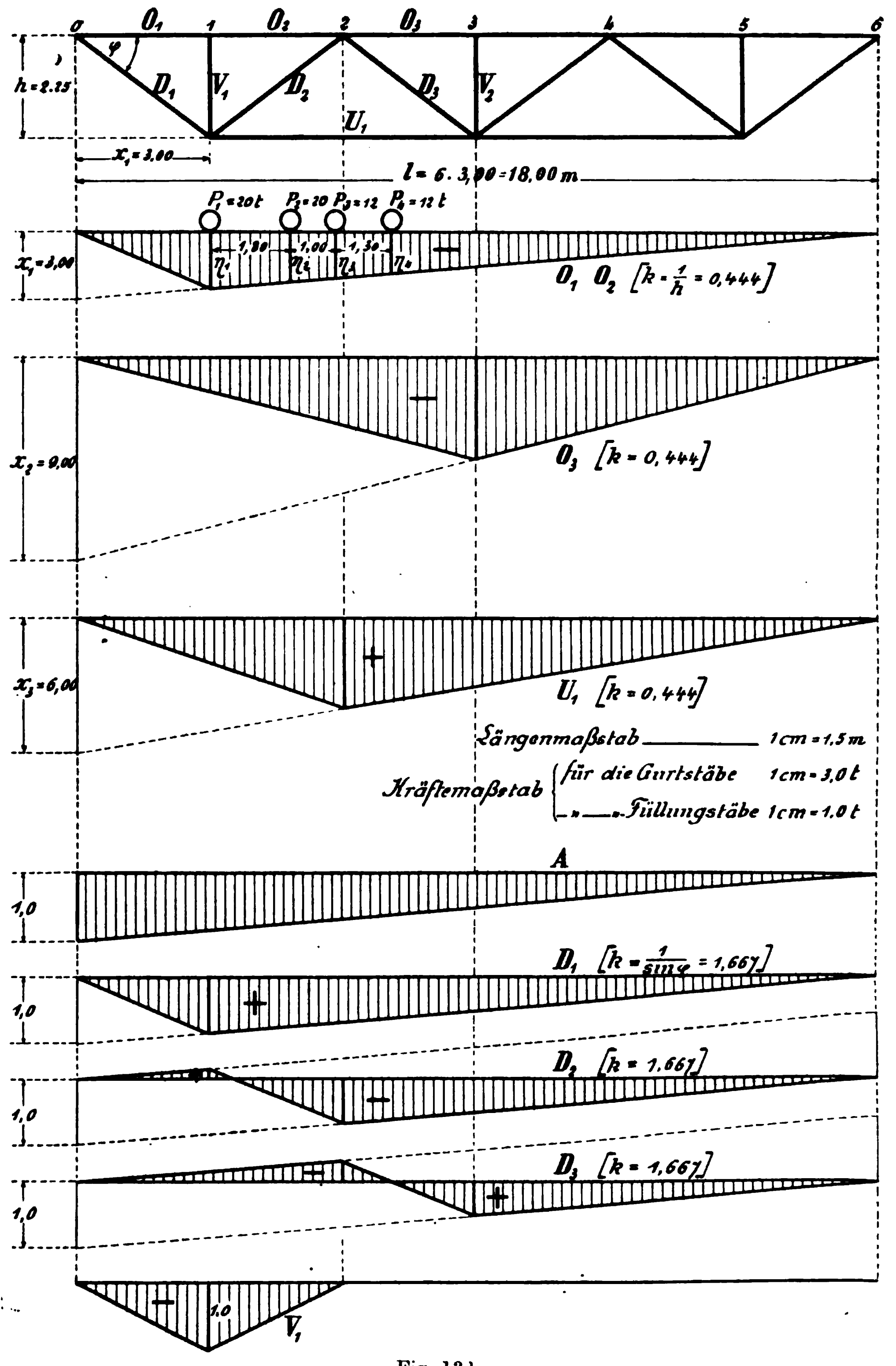
Die erste Vertikale, V_0, ist direkt gleich dem Auflagerdruck A. Für die mittelste Vertikale muß eine besondere Einflußlinie gezeichnet werden, da V_4 eine Zwischenvertikale ist.

Übungsaufgabe: Man nehme als Belastung eine Laufkatze mit zwei Raddrücken zu je 6,0 t im Radstande von 1,40 m und werte die Einflußlinien aus. Ferner nehme man als Belastung das in Fig. 132 gezeichnete Lastenschema.



h = 2,25
l = 6 · 3,00 = 18,00 m
O₁ − U₂ +
O₂ − U₃ +
O₃ −
k = 1/h = 0,444
Maßstab für die Einflußl. 1,0 cm = 1,0 t
Längenmaßstab 1,0 cm = 1,5 m

Fig. 132.



0
O_1
1
O_2
2
O_3
3
4
5
6
φ
$h=2.25$
D_1
V_1
D_2
D_3
V_2
U_1
$x_1=3.00$
$l=6.3,00=18,00$ m
$P_1=20$ t
$P_2=20$
$P_3=12$
$P_4=12$ t
$x_1=3,00$
1,80
1,00
1,30
η_1
η_2
η_3
η_4
O_1 O_2 $[k=\frac{1}{h}=0,444]$
$x_2=9,00$
O_3 $[k=0,444]$
$x_3=6,00$
U_1 $[k=0,444]$
Längenmaßstab 1 cm = 1,5 m
Kräftemaßstab für die Gurtstäbe 1 cm = 3,0 t
" " Füllungsstäbe 1 cm = 1,0 t
A
1,0
D_1 $[k=\frac{1}{\sin\varphi}=1,667]$
1,0
D_2 $[k=1,667]$
1,0
D_3 $[k=1,667]$
1,0
1,0
V_1

Fig. 133.

Zweite Aufgabe.

Für den Parallelträger Fig. 133 sind die Einflußlinien zu zeichnen!

Spannweite $l = 6\lambda = 6 \cdot 3{,}00 = 18{,}00$ m; Höhe $h = 2{,}25$ m; Belastung oben.

a) Gurtstäbe. Die Einflußlinien sind wie vorhin gezeichnet. Man kann entweder $(x : h)$ auftragen oder nur x. Im ersten Falle ergeben die Ordinaten direkt die Spannkräfte; im zweiten Falle gehört noch zu der ganzen Einflußlinie der Multiplikator $k = (1 : h)$. In Fig. 133 ist zur Einübung die letztere Methode gewählt.

b) Füllungsstäbe. Die Spannkräfte für die *Diagonalen* infolge $A = 1{,}0$ t und infolge $B = 1{,}0$ t sind:

$$\left.\begin{aligned} D_A &= \pm \frac{1{,}0}{\sin\varphi} \\ D_B &= \mp \frac{1{,}0}{\sin\varphi} \end{aligned}\right\}$$

[Das obere Vorzeichen für linkssteigende, das untere für rechtssteigende Diagonalen].

Entweder tragen wir also diese Werte auf, oder wir zeichnen die Einflußlinien für die Querkräfte der einzelnen Felder und müssen dann aber noch zu der Einflußlinie den Multiplikator $k = (1 : \sin\varphi)$ hinzufügen. In Fig. 133 ist letzterer Weg gewählt. Die Vorzeichen bestimmen sich nach unseren Regeln für Parallelträger oder direkt aus der Anschauung.

Die *Vertikalen* sind nur Hilfsvertikalen. Da die anstoßenden Gurtstäbe (Obergurt) ohne Knick durchlaufen, erstreckt sich die Einflußlinie einer Vertikale nur über die beiden angrenzenden Felder.

Übungsaufgabe: Berechne Fig. 133 für das eingezeichnete Lastenschema.

Dritte Aufgabe.

Der Parallelträger mit Zwischenfachwerk Fig. 134 ist zu berechnen!

Spannweite $l = 12 \cdot 1{,}50 = 18{,}00$ m; Höhe $h = 2{,}25$ m; Belastung durch zwei Laufkatzen von 20,0 t bzw. 12,0 t Raddruck nach Fig. 134b.

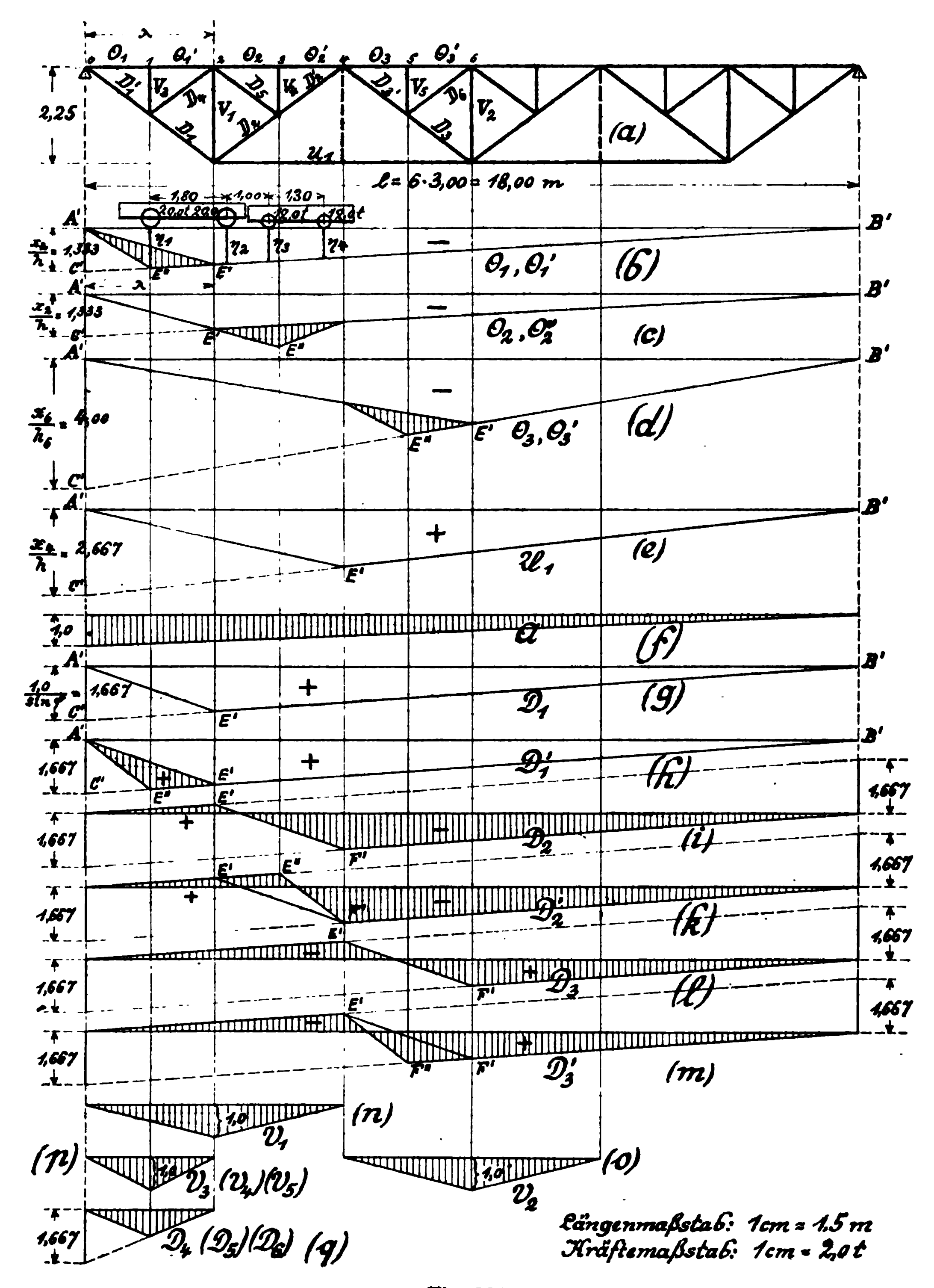
Die Berechnung geschieht nach dem in § 45, I entwickelten Verfahren: Zunächst wird nur das Grundsystem berücksichtigt, und für dieses werden die Einflußlinien gezeichnet. Dann werden die Zwischensysteme berücksichtigt und deren Einflußlinien an die vorhin (für das Grundsystem) gezeichneten Einflußlinien herangelegt.

a) Gurtstäbe. Das Grundsystem von Fig. 134 stimmt überein mit dem bereits in Fig. 133 behandelten Parallelträger. Deshalb sind auch die (vorläufigen) Einflußlinien $A'E'B'$ in Fig. 134b—e gleich den entsprechenden von Fig. 133. [Nur die Multiplikatoren k fallen fort, da die richtigen Werte $x : r$ aufgetragen sind. Auch der Kräftemaßstab ist ein anderer.] Jetzt müssen aber noch die Einflußlinien für die Teilsysteme hinzugefügt werden. Beispielsweise bildet der Stab O_1 den Obergurt von dem ersten kleinen Hängewerk *0—1—2*. Seine Einflußlinie ist also ein Dreieck von der Länge λ und mit der Spitze unter Punkt *1*. Dieses Dreieck (in Fig. 134b schraffiert) wird nun an das vorhin gezeichnete Dreieck $A'E'B'$ herangelegt, und die endgültige Einflußlinie $A'E''B'$ ist fertig. Wie in § 45, I Fig. 124, bewiesen wurde, entsteht durch dieses Hinzufügen des kleinen Dreieckes kein Knick an der Stelle E', sondern die Strecke $B'E'$ der früheren Einflußlinie geht einfach geradlinig weiter. Man braucht also das kleine Dreieck nicht erst aus dem betreffenden Zwischensystem zu konstruieren, sondern hat nur die für das Grundsystem gezeichnete Einflußlinie entsprechend geradlinig zu verlängern.

In derselben Weise sind O_2 und O_3 bestimmt. Man beachte den durch die Zwischensysteme hervorgerufenen Unterschied der Spannkräfte O_1 und O_2 (Fig. 134b, c und Fig. 133). Der Stab U_1 wird durch die Zwischensysteme nicht berührt.

b) Füllungsstäbe. Zunächst wird das Grundsystem erledigt. Dessen Einflußlinien stimmen überein mit den entsprechenden von Fig. 133. [Nur die Multiplikatoren k fallen fort, da jetzt die richtigen Werte D_A, $D_B = (1{,}0 : \sin\alpha)$ aufgetragen sind. Auch der Kräftemaßstab ist ein anderer.] Für D_1, D_2 und D_3 sind diese Einflußlinien bereits die endgültigen. Für die anderen Diagonalen (D_1', D_2', D_3') müssen noch die von den Zwischensystemen herrührenden Einflußlinien hinzugefügt werden. In den Zwischensystemen treten die Stäbe D_1', D_2' und D_3' als Untergurtstäbe auf. Diese Einflußlinien bilden also kleine Dreiecke von der Länge λ mit der Spitze unter Knoten *1* bzw. *3* oder *5*. Das Vorzeichen dieser Einflußlinien ist positiv, da es sich um die Untergurtstäbe der Zwischenfachwerke handelt. Nun werden diese kleinen, positiven Dreiecke an die vorhin für das Grundsystem gezeichneten Einflußlinien herangelegt, und zwar so, daß sie an den positiven Teil der letzteren anschließen. Hierdurch entstehen dann die endgültigen Einflußlinien.

Die Vertikalen V_1 und V_2 gehören nur zum Grundsystem. V_3, V_4, V_5, D_4, D_5, D_6 gehören nur zu den Zwischensystemen.



$l = 6 \cdot 3{,}00 = 18{,}00\ m$
Längenmaßstab: 1cm = 1.5 m
Kräftemaßstab: 1cm = 2,0 t

Fig. 134.

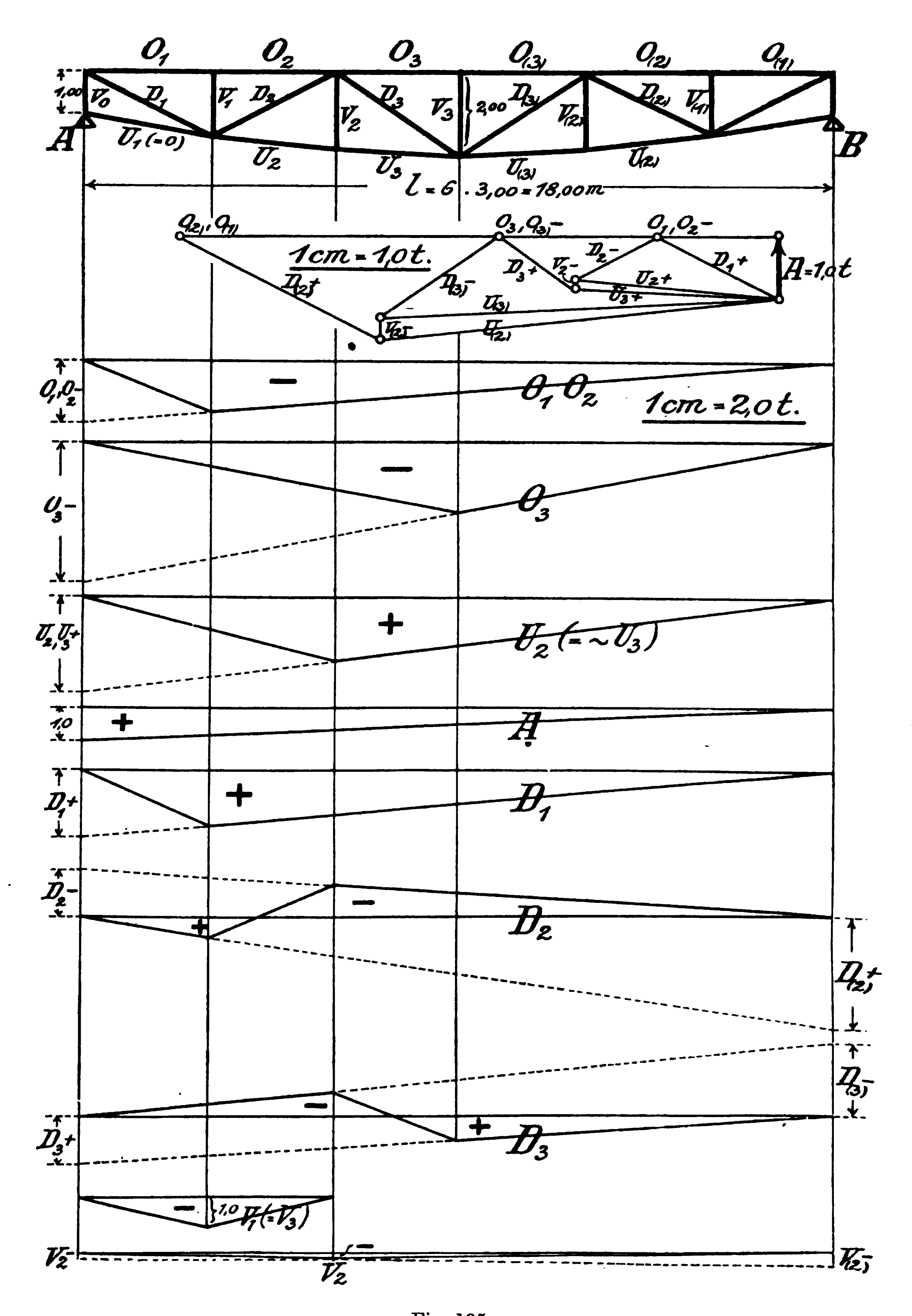


Fig. 135.

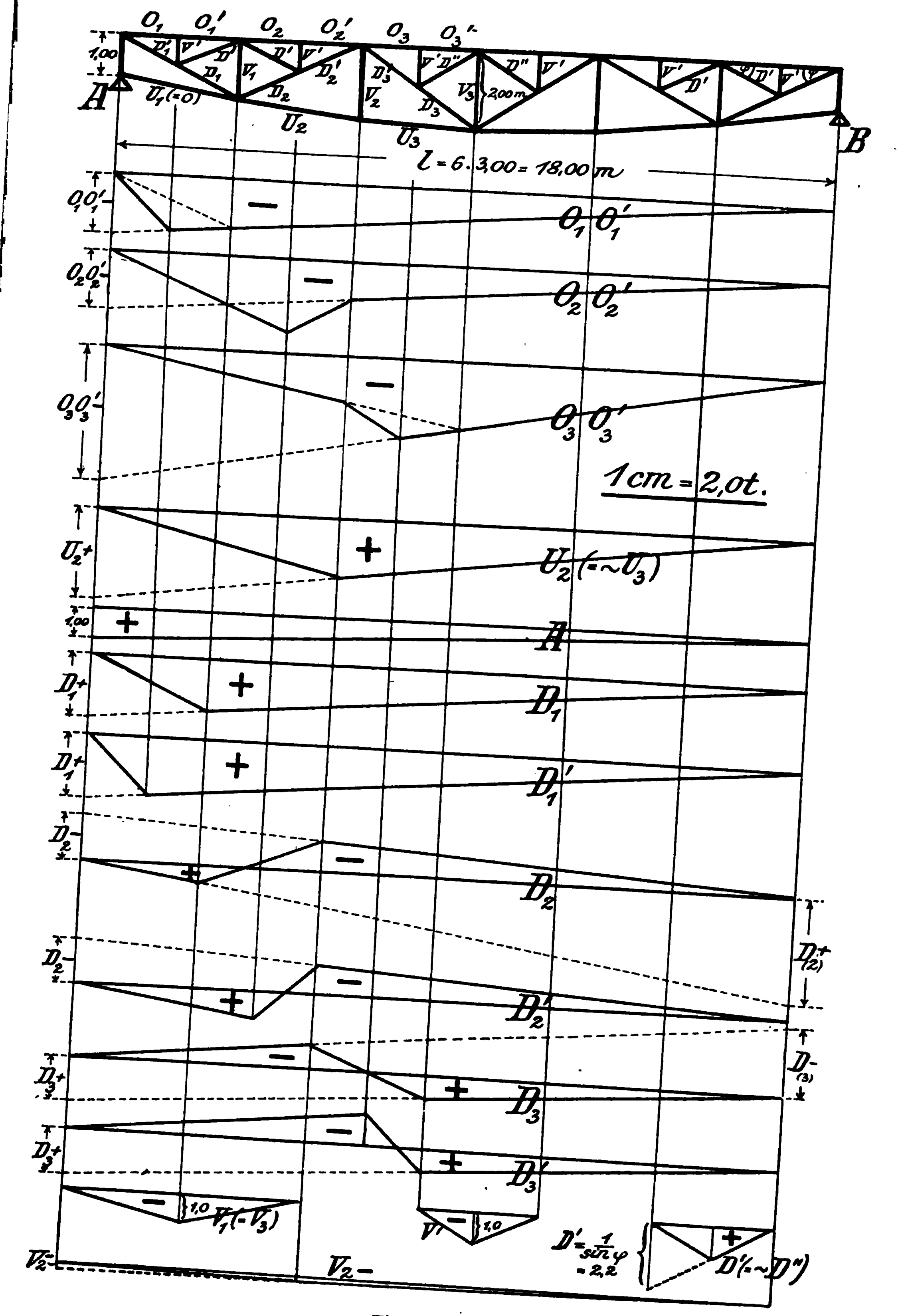


Fig. 136.

Vierte Aufgabe.

Für den Träger Fig. 135 mit gebogenem Untergurt sind die Einflußlinien zu entwickeln!

Spannweite $l = 6\lambda = 18{,}00$ m; Feldweite $\lambda = 3{,}00$ m.

Endvertikale $h_0 = 1{,}00$ m; Mittelvertikale $h_3 = 2{,}00$ m.

Die Knotenpunkte des Untergurtes liegen auf einer Parabel.

Das Aufzeichnen der Einflußlinien ist in normaler Weise nach den im 3. Vortrage durchgenommenen Regeln ausgeführt. Zunächst sind die Hilfswerte O_A, U_A, D_A und D_B, V_A und V_B bestimmt. Und zwar wurde hierzu ein für $A = 1{,}0$ t gezeichneter Kräfteplan genommen. Da das System symmetrisch ist, braucht man zu den Spannkräften infolge $B = 1{,}0$ t nicht einen besonderen Kräfteplan, sondern man zeichnet den Kräfteplan mit $A = 1{,}0$ t auch für die rechte Seite der Trägerfigur durch und erhält dann aus diesem Kräfteplan durch spiegelbildliche Vertauschung der Stäbe auch die Spannkräfte infolge $B = 1{,}0$ t (s. § 27, zweite Aufgabe).

Aus den Hilfsspannkräften infolge $A = 1{,}0$ t und $B = 1{,}0$ t ergeben sich in bekannter Weise die Einflußlinien. Als Maßstab ist der halbe Maßstab des Kräfteplans gewählt. Die Spannkräfte U_2 und U_3 sind im Kräfteplan so wenig voneinander verschieden, daß für beide Stäbe die gleiche Einflußlinie verwendet werden kann. Die Vertikalen sind Zwischenvertikalen und haben demgemäß etwas abweichende Einflußlinien (s. § 26).

Fünfte Aufgabe.

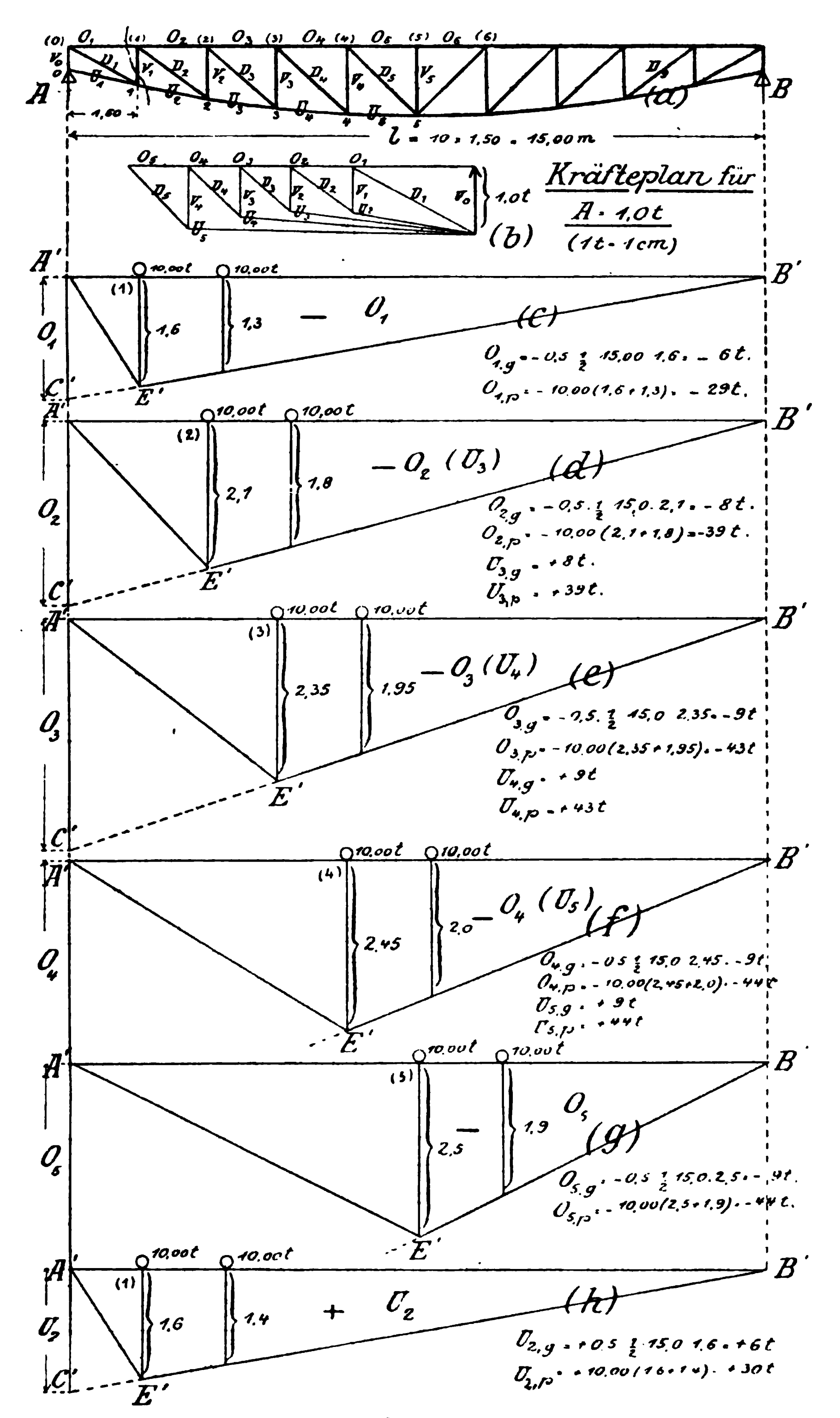
Für den Träger Fig. 136 mit Zwischenfachwerk sind die Einflußlinien zu entwickeln!

Das System ist das gleiche wie in Fig. 135, nur daß die Zwischenfachwerke hinzugekommen sind. Mit Beachtung der vorhin für das Grundsystem bereits klargelegten Einflußlinien sind in Fig. 136 sämtliche Einflußlinien entwickelt. (Vgl. dritte Aufgabe.)

Sechste Aufgabe.

Der Kranträger Fig. 137, 138 ist mittels Einflußlinien zu berechnen!

Abmessungen: Spannweite $l = 10\lambda = 10 \cdot 1{,}50 = 15{,}00$ m; Höhe am Auflager 0,50 m, in der Mitte 1,50 m; Untergurt auf Parabel. Belastung durch zwei Radlasten zu 10,00 t im Abstande von 1,80 m voneinander. Außerdem Eigengewicht von 0,50 t/m. Letzteres möge bei diesem Beispiele ebenfalls durch die Einflußlinien erledigt werden.



(a)
l = 10 × 1,50 = 15,00 m
Kräfteplan für
A = 1,0t
(1t = 1cm)
(b)
1,0t
10,00t
(c)
− O1
O1,g = −0,5 · ½ · 15,00 · 1,6 = −6t.
O1,p = −10,00 (1,6 + 1,3) = −29t.
(d)
− O2 (U3)
O2,g = −0,5 · ½ · 15,0 · 2,1 = −8t.
O2,p = −10,00 (2,1 + 1,8) = −39t.
U3,g = +8t.
U3,p = +39t.
(e)
− O3 (U4)
O3,g = −0,5 · ½ · 15,0 · 2,35 = −9t
O3,p = −10,00 (2,35 + 1,95) = −43t
U4,g = +9t
U4,p = +43t
(f)
− O4 (U5)
O4,g = −0,5 · ½ · 15,0 · 2,45 = −9t
O4,p = −10,00 (2,45 + 2,0) = −44t
U5,g = +9t
U5,p = +44t
(g)
− O5
O5,g = −0,5 · ½ · 15,0 · 2,5 = −9t.
O5,p = −10,00 (2,5 + 1,9) = −44t.
(h)
+ U2
U2,g = +0,5 · ½ · 15,0 · 1,6 = +6t
U2,p = +10,00 (1,6 + 1,4) = +30t

Fig. 137.

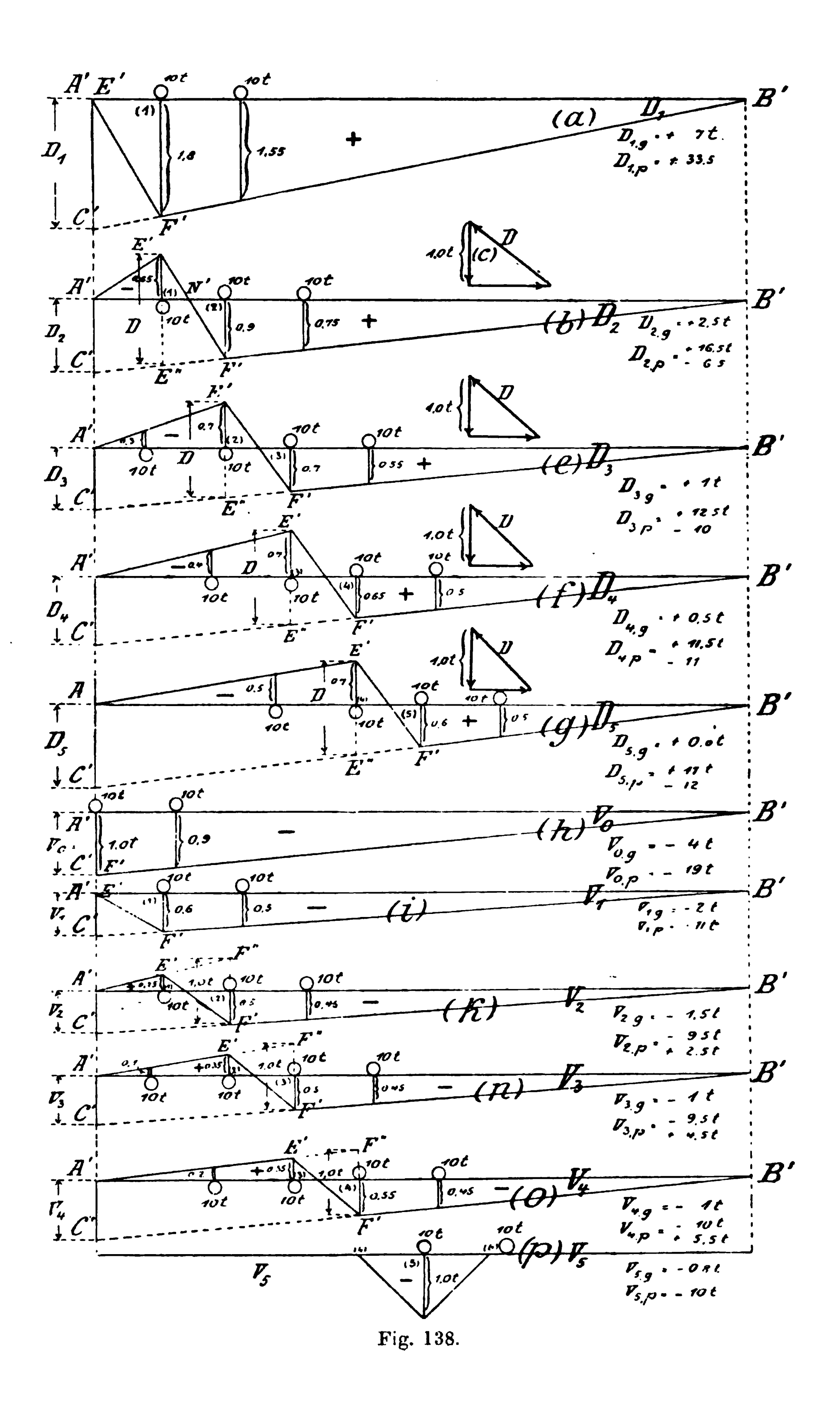


Fig. 138.

Das Aufzeichnen der Einflußlinien geschehe mit Hilfe der Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t und der Hilfswerte $D_{P'}$ (D_1'') usw. Der Kräfteplan für $A = 1{,}0$ t ist in Fig. 137b gezeichnet.

a) **Gurtstäbe.** Die Einflußlinien für $O_1 - O_5$ sind mit Hilfe der Spannkräfte O_A in Fig. 137c—g dargestellt. U_1 ist gleich Null. U_2 ist in Fig. 137h gezeichnet. Für U_3 ergibt sich aus dem Kräfteplan, daß die Spannkraft U_3 sich fast gar nicht mehr von der Spannkraft O_2 unterscheidet. Deshalb konnte die letztere Einflußlinie auch für U_3 benutzt werden. Nur das Vorzeichen ist beim Untergurt „+". Das gleiche ist mit U_4 und U_5 der Fall.

Ferner sei daran erinnert, daß es beim Fachwerke mit Vertikalen überhaupt genügt, entweder die Obergurtstäbe oder die Untergurtstäbe zu ermitteln. Denn es bestehen die Beziehungen:

$$U_2 \cos\gamma = -O_1\,; \quad U_3 \cos\gamma = -O_2 \quad \text{usw.}$$

Die einen Kräfte können also aus den anderen gefolgert werden. [Die cos. werden aus der Zeichnung abgegriffen.]

Aus den Einflußlinien folgen dann die Spannkräfte infolge Eigengewicht, indem man diese Belastung $g = 0{,}50$ mit dem Inhalte der Einflußfläche multipliziert. Die Spannkräfte infolge der beweglichen Last ergeben sich durch Multiplikation der Raddrücke mit den Ordinaten. Sämtliche Ausrechnungen sind in Fig. 137 hinzugeschrieben.

b) **Füllungsstäbe.** Zunächst sind überall die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t als Strecken $A'C'$ aufgetragen und hierdurch die Teile $F'B'$ der Einflußlinien festgelegt. Bei der Diagonalen D_1 fällt die Abschrägung $E'F'$ ins erste Feld und kann also ebenfalls sofort eingezeichnet werden (Fig. 138a). Bei den übrigen Diagonalen ist die Abschrägung $E'F'$ mittels der Werte $D_{P'}$ (D_1'' in Fig. 92) bestimmt: Nach der Zusammenstellung Fig. 113 (Belastung am Obergurt, linkssteigende Diagonalen) ergibt sich z. B. für D_2 der Hilfswert $D_{P'}$, indem wir die Kraft 1,0 t in Richtung des Obergurtstabes O_2 und des Diagonalstabes D_2 zerlegen (Fig. 138c). Letztere Linie ist dann als Abstand $E''E' = D_{P'}$ in die Einflußlinie einzutragen, wodurch der Punkt E' festgelegt ist. Zum Schlusse wird $E'A'$ gezogen.

Bei den Vertikalen ist die Linie $A'E'$ nicht durch den Abstand $E''E'$, sondern durch $F'F''$ festgelegt. Letzterer Abstand ist nämlich direkt gleich 1,0 t. V_5 ist als Zwischenvertikale besonders zu bestimmen.

Aus den Einflußlinien für die Füllungsstäbe folgen dann deren Spannkräfte infolge Eigengewicht und Verkehrslast. Beim ersteren

ist natürlich zu beachten, daß der Inhalt der Einflußflächen aus einem positiven und einem negativen Teile besteht, die voneinander subtrahiert werden müssen. Für Verkehrslast sind im allgemeinen zwei Spannkräfte anzugeben.

Übungsaufgabe: Man entwickle die Einflußlinien für das Fachwerk Fig. 137a auch nach dem in Fig. 100″ (§ 28b) geübten Verfahren mittels der Werte $z = 1,0$ t! Die Berechnung geht hiernach noch schneller vonstatten.

Siebente Aufgabe.

Der in der vorigen Aufgabe behandelte Kranträger ist analytisch zu berechnen!

Das System ist bereits auf rein analytische Weise in § 38 untersucht. Die Gurtstäbe wurden damals aus den Momenten, die Füllungsstäbe aus den Auflagerdrücken berechnet.

Jetzt möge noch eine Variante geübt werden, indem sämtliche Stäbe aus den Auflagerdrücken berechnet werden. Das Verfahren ist folgendes: Die Laufkatze wird so aufgestellt, daß das linke Rad der Reihe nach über den Knoten *0*, *1*, *2* usw. steht. Für jede dieser Stellungen wird zunächst der Auflagerdruck ausgerechnet. Nun ist bei zwei Lasten jede Stellung im allgemeinen maßgebend für einen Ober-, einen Untergurtstab, eine Diagonale und eine Vertikale. Und zwar trifft es sich — und das ist die Hauptsache — immer so, daß bei der betreffenden Laststellung am Teile links vom Schnitte nur der Auflagerdruck A wirkt, während die Lasten stets rechts vom Schnitte bleiben. Es gilt also bei dieser speziellen Belastung sowohl für die Füllungsstäbe als auch für die Gurtstäbe die Beziehung: Spannkraft = Auflagerdruck $A \times$ Spannkraft infolge $A = 1,0$ t. (Vgl. die Entwickelung von § 44, wo diese Beziehung in graphischer Form ausgenutzt wurde. Ferner § 46, Gruppe C.)

Im folgenden sind mittels Kräfteplan Fig. 139b die Spannkräfte infolge $A = 1,0$ t bestimmt. In der Tabelle (Seite 468) ist dann die Multiplikation jeder dieser Stabkräfte mit dem zugehörigen Auflagerdruck ausgeführt. Die Anordnung ist so getroffen, daß neben jedem Auflagerdruck die Stäbe stehen, für die die betreffende Laststellung maßgebend ist. [Der Kräfteplan ist wegen seiner Größe in zwei Teilen mit verschiedenen Maßstäben gezeichnet.]

Um für die Füllungsstäbe auch die linksseitigen Laststellungen zu berücksichtigen, ist die Berechnung für rechtsseitige Belastung auch auf die Stäbe der rechten Fachwerkhälfte ausgedehnt. Dann

ergibt sich in bekannter Weise durch spiegelbildliche Vertauschung für jeden Füllungsstab die Spannkraft sowohl bei rechtsseitiger als auch bei linksseitiger Belastung.

Da die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t jetzt mittels Kräfteplan bestimmt sind, ergeben sich geringfügige Differenzen gegenüber der Ausrechnung von § 38.

Bemerkung: Wenn, wie es ja meistens der Fall ist, die Katze den Träger nicht verlassen kann, ist die Laststellung rechts

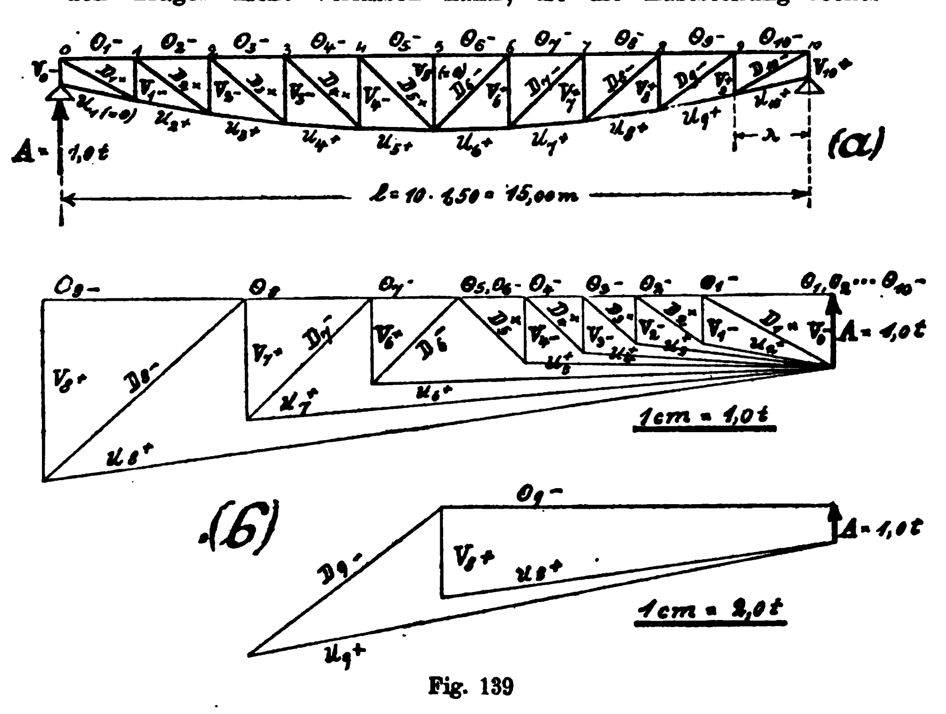


Fig. 139

vom Punkte *9* unmöglich. Es ist dann vielmehr das eine Rad rechts vom Punkte *9*, das andere links davon. Die jetzt entstehenden Spannkräfte D_9 und V_8 sind bedeutend kleiner als die in der Tabelle angegebenen, da die Wirkungen der beiden Räder sich zum Teil aufheben. Der Einfachheit wegen wird man aber meistens die vorhin berechneten Spannkräfte annehmen.

Zusammenstellung der Spannkräfte. Zum Schlusse wollen wir bei diesem Beispiele die Spannkräfte infolge Eigengewicht und infolge beweglicher Last zusammenstellen. Die ersteren sind für diesen Träger bereits in § 8, 6. Aufgabe, berechnet ($g = 0{,}50$ t/m). Die letzteren werden aus der obigen Tabelle entnommen, so daß sich schließlich folgende Kombination ergibt:

Spannkräfte durch bewegliche Last.

Laststellung [Linkes Rad über Punkt:]	Auflagerdruck A (t)	Spannkräfte (t)			
		$O = A \cdot O_A$	$U = A \cdot U_A$	$D = A \cdot D_A$	$V = A \cdot V_A$
0	$\frac{20{,}0 \cdot 14{,}10}{15{,}00} = 18{,}8$		$U_1 =$ 0,0		$V_0 = 18{,}8 \cdot (-1{,}00) = -18{,}8$
1	$\frac{20{,}0 \cdot 12{,}60}{15{,}00} = 16{,}8$	$O_1 = 16{,}8 \cdot (-1{,}75) = -29{,}4$	$U_2 = 16{,}8 \cdot (+1{,}80) = +30{,}2$	$D_1 = 16{,}8 \cdot (+2{,}00) = +33{,}6$	$V_1 = 16{,}8 \cdot (-0{,}65) = -10{,}9$
2	14,8	$O_2 = 14{,}8 \cdot (-2{,}65) = -39{,}2$	$U_3 = 14{,}8 \cdot (+2{,}65) = +39{,}2$	$D_2 = 14{,}8 \cdot (+1{,}10) = +16{,}3$	$V_2 = 14{,}8 \cdot (-0{,}65) = -9{,}6$
3	12,8	$O_3 = 12{,}8 \cdot (-3{,}35) = -43{,}0$	$U_4 = 12{,}8 \cdot (+3{,}35) = +43{,}0$	$D_3 = 12{,}8 \cdot (+1{,}00) = +12{,}8$	$V_3 = 12{,}8 \cdot (-0{,}75) = -9{,}6$
4	10,8	$O_4 = 10{,}8 \cdot (-4{,}10) = -44{,}3$	$U_5 = 10{,}8 \cdot (+4{,}10) = +44{,}3$	$D_4 = 10{,}8 \cdot (+1{,}05) = +11{,}3$	$V_4 = 10{,}8 \cdot (-0{,}90) = -9{,}7$
5	8,8	$O_5 = 8{,}8 \cdot (-5{,}00) = -44{,}0$		$D_5 = 8{,}8 \cdot (+1{,}25) = +11{,}0$	$[V_5 = -10{,}0]$
6	6,8			$D_{6(5)} = 6{,}8 \cdot (-1{,}65) = -11{,}2$	
7	4,8			$D_{7(4)} = 4{,}8 \cdot (-2{,}35) = -11{,}3$	$V_{6(4)} = 4{,}8 \cdot (+1{,}20) = +5{,}8$
8	2,8			$D_{8(3)} = 2{,}8 \cdot (-3{,}60) = -10{,}1$	$V_{7(3)} = 2{,}8 \cdot (+1{,}65) = +4{,}6$
9	$\frac{10{,}0 \cdot 1{,}50}{15{,}0} = 1{,}0$			$D_{9(2)} = 1{,}0 \cdot (-6{,}50) = -6{,}5$	$V_{8(2)} = 1{,}0 \cdot (+2{,}40) = +2{,}4$
10	0,0			$D_{10(1)} = 0{,}0 \cdot (-\quad) = -0{,}0$	$V_{9(1)} = 0{,}0 \cdot (+\quad) = +0{,}0$

Maximalspannkräfte (Eigengewicht + Betriebslast).

Gurtstäbe (t)			
Stab	Eigengew.	Betriebslast	Gesamt
O_1	−5,9	−29,4	−35,3
O_2	−7,9	−39,2	−47,1
O_3	−8,8	−43,0	−51,8
O_4	−9,3	−44,3	−53,6
O_5	−9,4	−44,0	−53,4
U_1	0,0	0,0	0,0
U_2	+6,0	+30,2	+36,2
U_3	+8,0	+39,2	+47,2
U_4	+8,9	+43,0	+51,9
U_5	+9,3	+44,3	+53,6

Füllungsstäbe (t)			
Stab	Eigengew.	Betriebslast	Gesamt
D_1	+6,8	+33,6 −0,0	+40,4
D_2	+2,5	+16,3 −6,5	+18,8 −4,0
D_3	+1,2	+12,8 −10,1	+14,0 −8,9
D_4	+0,7	+11,3 −11,3	+12,0 −10,6
D_5	+0,1	+11,0 −11,2	+11,1 −11,1
V_0	−3,8	−18,8	−22,6
V_1	−2,3	−10,9	−13,2
V_2	−1,6	−9,6 +2,4	−11,2 +0,8
V_3	−1,3	−9,6 +4,6	−10,9 +3,3
V_4	−0,9	−9,7 +5,8	−10,6 +4,9
V_5	−0,8	−10,0	−10,8

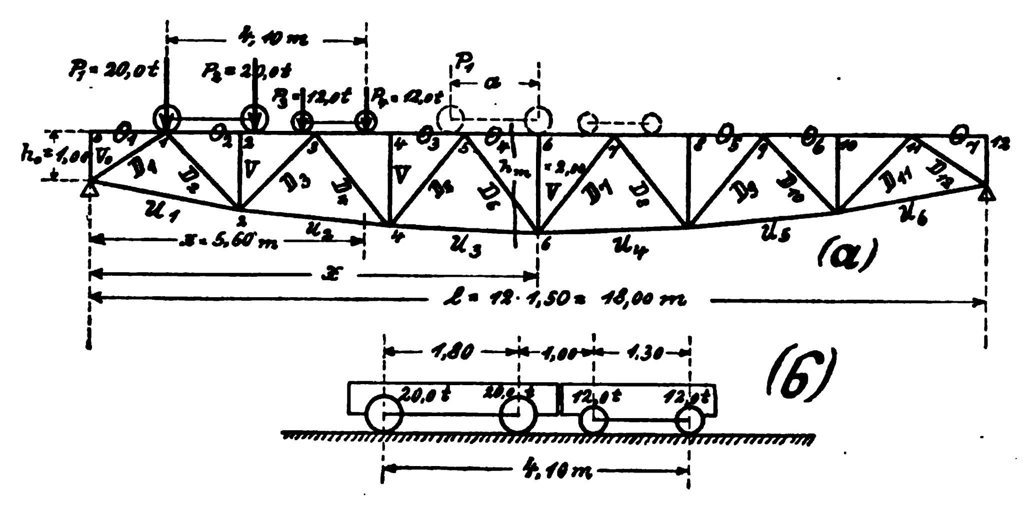
Zum Schlusse sei noch an die Kontrollen erinnert:

$$U_2 \cdot \cos\gamma_2 = -O_1\,; \quad U_3 \cdot \cos\gamma_3 = -O_2 \quad \text{usw.}$$

Diese gelten für jede vertikale Belastung, also auch für die obigen Maximalspannkräfte.

Achte Aufgabe.

Der Kranträger Fig. 140 ist für ein aus vier Kräften bestehendes Lastenschema analytisch zu berechnen!



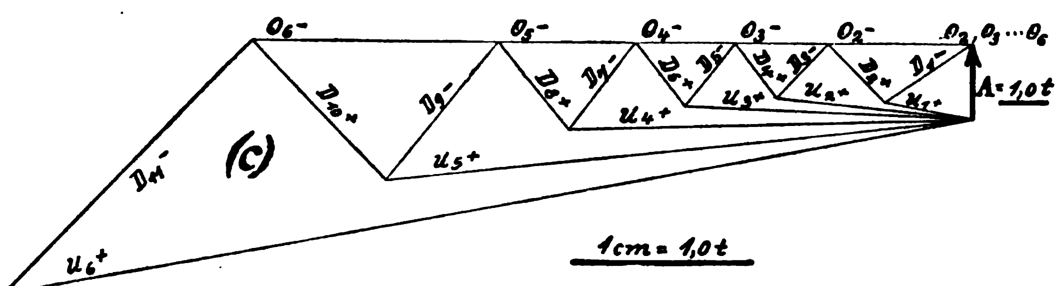


Fig. 140.

Spannweite $l = 12 \cdot 1{,}50 = 18{,}00$ m; Höhe der Endvertikalen $h_e = 1{,}00$ m; Höhe der Mittelvertikalen $h_m = 2{,}00$ m; Untergurt auf Parabel. Belastung durch zwei Laufkatzen von je 20,0 t bzw. 12,0 t Raddruck in Abständen von 1,80 m, 1,00 m und 1,30 m (Fig. 140b).

a) Gurtstäbe. Die gefährlichen Laststellungen lassen sich bei vier Kräften nicht mehr so einfach angeben wie bei zwei Kräften. Wir müssen jetzt das allgemeine Verfahren einschlagen (§ 36, I;

§ 46, Gruppe B, I. Methode): Die Belastung wird so aufgestellt, daß eine Last über dem Bezugspunkte m des Stabes steht. Sind dann ferner die Bedingungen erfüllt:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} R\dfrac{x}{l} < (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)\,, \\[2ex] R\dfrac{x'}{l} < (P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m)\,, \end{cases}$$

dann ist diese Laststellung tatsächlich die gefährlichste. [Es bedeutet: R die Summe aller Lasten, $(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)$ die Summe der Lasten von links bis einschließlich Bezugspunkt, $(P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m)$ die Summe der Lasten von rechts bis einschließlich Bezugspunkt. l ist die ganze Spannweite, x der Abstand des Bezugspunktes bis zum linken Auflager, x' der Abstand des Bezugspunktes vom rechten Auflager.] Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so muß das Lastenschema nach links verschoben werden; ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, so muß nach rechts verschoben werden.

Im vorliegenden Falle kann es sich nur darum handeln, ob die erste oder die zweite Last über dem Bezugspunkte zu stehen hat. (Man denke an die Form der Einflußlinien.) Wenn die erste Last über dem Bezugspunkte ist, so besteht die Summe der Lasten $(P_1 + \ldots + P_m)$ nur aus der einen Last P_1 (Fig. 140, Laststellung über Punkt *1*). Die erste der beiden Bedingungen (I) nimmt also die Form an:

$$R\frac{x}{l} < P_1\,.$$

Aus dieser Form können wir nun sofort berechnen, wie groß x sein muß, damit die Bedingung erfüllt ist. Wir trennen x von den anderen Gliedern und erhalten:

$$\text{(Ia)} \qquad x < l \cdot \frac{P_1}{R}\,.$$

Wenn also diese Bedingung erfüllt ist, so ist auch die erste der beiden Bedingungen (I) erfüllt; d. h. dann braucht die Belastung nicht nach links verschoben zu werden. Die Verschiebung nach rechts kommt aber überhaupt nicht in Frage, da dann keine Last über dem Bezugspunkte wäre. Wir haben also folgendes Resultat:

Liegt der Bezugspunkt des betreffenden Gurtstabes näher als

$$\text{(II)} \qquad x = l \cdot \frac{P_1}{R}$$

am Auflager A, so muß die erste Last (P_1) über dem Bezugspunkte stehen. Andernfalls muß die Belastung nach links verschoben werden, bis P_2 über den Bezugspunkt gelangt.

Hiermit ist bei vier Lasten für jeden Gurtstab die Frage der Laststellung erledigt.

Aus der Laststellung folgt dann sofort die Spannkraft: Ist P_1 über dem Bezugspunkte, d. h. steht zwischen dem Auflager A und dem Schnitte keine weitere Last, so ist die Spannkraft proportional dem Auflagerdruck. Dann gelten also die Formeln

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} O = A \cdot O_A\,, \\ U = A \cdot U_A\,. \end{cases}$$

(Beispiel: Stab U_1 in Fig. 140a mit Bezugspunkt *1*.)

Ist aber P_2 über dem Bezugspunkte, so ist zwischen dem Auflager A und dem Schnitte noch die Last P_1. (Beispiel: Stab O_4 in Fig. 140a mit Bezugspunkt *6*.) Dann bestimmen wir die Stabkraft, indem wir den Einfluß der Auflagerkraft A und denjenigen der hinübergerückten Last P_1 getrennt betrachten und dann summieren. Der erstere Einfluß ist wieder das Produkt $A \cdot O_A$. Der zweite Einfluß würde sich nach *Ritter* ergeben (Stab O_4 in Fig. 140a): $P_1 \cdot \frac{a}{h}$. Insgesamt ist also:

$$\text{(IV)} \qquad O = A \cdot O_A - P_1 \frac{a}{h}\,.$$

[Das Minuszeichen, weil A und P_1 entgegengesetzte Richtung haben.] Diese Formel vereinfachen wir noch. Denn es ist

$$O_A = \frac{1{,}0 \cdot x}{h}\,.$$

Andererseits läßt sich die obige Formel (IV) schreiben:

$$O = A \cdot O_A - P_1 \frac{x}{h} \cdot \frac{a}{x}\,,$$

woraus schließlich folgt:

$$O = A \cdot O_A - P_1 \cdot O_A \cdot \frac{a}{x}\,,$$

$$\text{(IVa)} \qquad O = \left(A - P_1 \frac{a}{x}\right) O_A\,.$$

Hiermit ist auch für den zweiten Fall die Gurtspannung ausgedrückt. Die Wirkung der Last P_1 ist nach der Formel entgegengesetzt der Wirkung der Kraft A und außerdem verkleinert im Verhältnis der Hebelarme $a : x$. Dieses Resultat hätte man ja auch direkt hinschreiben können.

Laststellung für Gurtstäbe: I. Ist $x < l \cdot \frac{P_1}{R} \left(= 18{,}00 \cdot \frac{20{,}0}{64{,}0} = 5{,}6 \text{ m}\right)$, dann Last P_1 über Bezugspunkt, II. Ist $x > 5{,}6$ m, dann Last P_2 über Bezugspunkt

[x = Abstand des Bezugspunktes von A.]

Laststellung für Füllungsstäbe: Grundstellung.

Auflagerdruck bei Laststellung I. Last P_1 über Punkt m II. „ P_2 „ „ m (t)	Ober- und Untergurt [Im Falle I: $S = A \cdot S_A$ „ „ II: $S = \left(A - \frac{P_1 \cdot a}{x}\right) \cdot S_A$] (t)	Vertikalen und Diagonalen [$V = -P$ $D = A \cdot D_A$] (t)
I. $A_0 = \frac{1}{18{,}00}(40{,}0 \cdot 17{,}10 + 24{,}0 \cdot 14{,}55) = 57{,}4$	$O_1 = 0{,}0$	$\left[V = -\left(20{,}0 + \frac{12{,}0 \cdot 0{,}50}{1{,}50}\right) = -24{,}0\right]$
I. $A_1 = 57{,}4 - (40{,}0 + 24{,}0) \cdot \frac{1{,}50}{18{,}00} = 52{,}1$	$U_1 = 52{,}1 \cdot (+1{,}20) = +62{,}5$	$D_1 = 52{,}1 \cdot (-1{,}42) = -74{,}0$
I. $A_2 = 46{,}7$	$O_2 = 46{,}7 \cdot (-1{,}93) = -90{,}1$	$D_2 = 46{,}7 \cdot (+1{,}08) = +50{,}5$
I. $A_3 = 41{,}4$	$U_2 = 41{,}4 \cdot (+2{,}64) = +109{,}3$	$D_3 = 41{,}4 \cdot (-0{,}99) = -41{,}0$
I. $A_4 = 36{,}1$ II. $A_4 = 36{,}1 + \frac{64{,}0 \cdot 1{,}80}{18{,}00} = 42{,}5$	$O_3 = \left(42{,}5 - \frac{20{,}0 \cdot 1{,}80}{6{,}00}\right) \cdot (-3{,}17) = -115{,}5$	$D_4 = 36{,}1 \cdot (+0{,}89) = +32{,}2$
I. $A_5 = 30{,}7$ II. $A_5 = 37{,}1$	$U_3 = \left(37{,}1 - \frac{20{,}0 \cdot 1{,}80}{7{,}50}\right) \cdot (+3{,}86) = +124{,}8$	$D_5 = 30{,}7 \cdot (-1{,}08) = -33{,}2$
I. $A_6 = 25{,}4$ II. $A_6 = 31{,}8$	$O_4 = \left(31{,}8 - \frac{20{,}0 \cdot 1{,}80}{9{,}0}\right) \cdot (-4{,}50) = -125{,}0$	$D_6 = 25{,}4 \cdot (+1{,}07) = +27{,}2$
I. $A_7 = 20{,}1$		$D_{7(u)} = 20{,}1 \cdot (-1{,}50) = -30{,}2$
I. $A_8 = 14{,}7$		$D_{8(u)} = 14{,}7 \cdot (+1{,}53) = +22{,}5$
I. $A_9 = 9{,}4$		$D_{9(u)} = 9{,}4 \cdot (-2{,}40) = -22{,}6$
I. $A_{10} = \frac{1}{18{,}00}(40{,}0 \cdot 2{,}10 + 12{,}0 \cdot 0{,}20) = 4{,}8$		$D_{10(u)} = 4{,}8 \cdot (+2{,}58) = +12{,}4$
I. $A_{11} = \frac{1}{18{,}00} \cdot 20 \cdot 1{,}50 = 1{,}7$		$D_{11(u)} = 1{,}7 \cdot (-4{,}75) = -7{,}9$

b) Füllungsstäbe. Außer Grundstellung könnte noch vorgezogene Stellung in Betracht kommen. Das Kennzeichen dafür, daß die erstere maßgebend ist, lautet (§ 36, II):

$$\text{(V)} \qquad R < P_1 \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{D_{P'}}{D_A}.$$

Drückt man l als Vielfaches der Feldweite aus, $l = n\lambda$, so lautet also die Bedingung für Grundstellung:

$$\text{(Va)} \qquad R < P_1 \cdot n \cdot \frac{D_{P'}}{D_A}.$$

Nun ist aber für unser Fachwerk der Bruch $(D_{P'} : D_A)$ größer als 1, denn $D_{P'}$ ist stets größer als D_A (s. § 35a, 35b). Daraus folgt, daß die obige Ungleichung bei der vorliegenden Belastung sicherlich für jeden Stab erfüllt ist; denn bei vier Lasten ist R stets kleiner als $P_1 \cdot n$, also erst recht kleiner als $P_1 \cdot n \cdot \frac{D_{P'}}{D_A}$. [In unserem Falle ist:

$$R = (20{,}0 + 20{,}0 + 12{,}0 + 12{,}0) = 64{,}0 \text{ t}; \quad P_1 = 20{,}0 \text{ t}; \quad n = 12.$$

Also $R < 20{,}0 \cdot 12$.] Bei vier Lasten wird in allen praktisch vorkommenden Fällen Grundstellung maßgebend sein.

c) In nebenstehender Tabelle sind Gurt- und Füllungsstäbe ermittelt. Die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t werden analytisch oder mittels Kräfteplan bestimmt (Fig. 140c). Dann wurde mittels des vorhin abgeleiteten Kennzeichens (Ia) gefunden, daß für alle Gurtstäbe, deren Bezugspunkt weiter als 5,6 m vom Auflager A entfernt ist, die zweite Last (P_2) über dem Bezugspunkte stehen muß, um die ungünstigste Stellung zu erzielen. (In der Tabelle ist diese Laststellung „Fall II" genannt.) Die Systemfigur lehrt, daß dieses bei den Stäben O_3, O_4 und U_3 der Fall ist. Für alle anderen Stäbe aber ist der bei vier Lasten gewissermaßen als Normalfall anzusehende Fall I maßgebend.

Somit ist durch einen Kräfteplan und eine einfache Tabelle das ganze System für eine bewegliche Belastung von vier Kräften berechnet.

Abschnitt III.

Besondere Methoden für den überkragenden und den Gerberschen Fachwerkträger.

Die bisherigen, in Abschnitt II durchgeführten Untersuchungen der beweglichen Belastung erstreckten sich nur auf Träger zwischen zwei Stützen. Jetzt wollen wir auch solche Systeme betrachten, die über die Stützen hinauskragen, und ferner die Verbindung derartiger „Kragträger" mit einfachen Balkenträgern: den *Gerber*schen Träger.

Im wesentlichen ist die Theorie dieser Systeme natürlich in beiden vorhergehenden Abschnitten mit enthalten. Es handelt sich nur darum, die bisherigen Methoden für den speziellen Fall zu vervollständigen.

Wie im vorigen Abschnitte, so werden wir uns auch jetzt hauptsächlich auf Systeme beschränken, die in einfachem Dreieckfachwerk ausgeführt sind. Andere werden in Abschnitt V behandelt werden.

6. Vortrag:

Der Gerbersche Fachwerkträger mit ruhender und beweglicher Belastung.

§ 48.

Allgemeines und ständige Last. (Wiederholung.)

Die Theorie des *vollwandigen Gerber*schen Trägers ist bereits in Band I dieses Buches (12. Vortrag) behandelt. Dort wurde die Bestimmung der Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente gezeigt, und zwar wurde sowohl ständige, als auch bewegliche Belastung untersucht. Da die folgenden Untersuchungen sich eng an die früheren Betrachtungen anlehnen, sei dem Leser empfohlen, vor allen Dingen die Einflußlinien des *Gerber*schen Balkens (Band I, Fig. 133) zu wiederholen.

Jetzt wollen wir dazu übergehen, auch den *Gerber*schen *Fachwerkträger* zu berechnen.

a) Allgemeines. Fig. 141 a stellt eine derartige Brücke dar. Die Parallelträger $\overline{HG_1}$ und $\overline{JG_2}$ sind an den Gelenkstellen G_1 und G_2 in den überkragenden Träger $\overline{G_1ABG_2}$ eingehängt. Damit die Punkte G_1 und G_2 auch richtig als Gelenke wirken, müssen an diesen Stellen die Knotenpunkte als Bolzen und außerdem die (aus Schönheitsrücksichten eingezogenen) Stäbe O' als Blindstäbe ausgebildet werden. Bei A sei das feste Lager; alle übrigen Lager sind beweglich. Solange es sich nur um vertikale Lasten handelt, ist es allerdings gleichgültig, wo das feste Lager ist; denn dann entstehen an sämtlichen Lagern nur vertikale Auflagerdrücke.

Auf die Berechnung der eingehängten Träger braucht hier nicht mehr eingegangen zu werden, da sie einfache Fachwerkbalken zwischen zwei Stützen sind und nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Methoden behandelt werden. Wir wollen jetzt die Untersuchung des überkragenden Trägers vornehmen.

b) Spannkräfte infolge ständiger Last. Die Stabkräfte infolge ständiger Last ergeben sich in bekannter Weise auf Grund der allgemeinen Methoden von Abschnitt I: Die Auflagerdrücke der eingehängten Träger werden in den Knoten G_1 und G_2 als Einzellasten eingeführt. Außerdem ist dann noch in jedem Knotenpunkte die betreffende Knotenpunktslast infolge Eigengewicht des Kragträgers vorhanden. Dann reiht man, um einen Kräfteplan zu zeichnen, die Lasten so aneinander, wie die Knotenpunkte am Umfange des Fachwerkes aufeinander folgen (entweder rechtsoder linksherum, niemals aber außerhalb der Reihenfolge), fängt am Knoten G_1 oder G_2 mit dem Kräftepolygon an und bestimmt der Reihe nach sämtliche Stabkräfte. Statt einen Kräfteplan zu benutzen, kann man die Stäbe natürlich auch nach irgendeiner anderen analytischen oder graphischen Methode (z. B. *Ritter*) ermitteln (vgl. die vollständige analytische Durchrechnung einer *Gerber*schen Brücke in § 22, 8. Aufgabe).

Soweit zur Wiederholung des Früheren.

§ 49.

Einflußlinien für den Gerberschen Fachwerkträger.

Die Wirkung einer **beweglichen Belastung** ergibt sich am klarsten durch Aufzeichnen der Einflußlinien für die einzelnen Stäbe. Die betreffenden Untersuchungen sind natürlich ganz ähnlich den beim einfachen Fachwerkträger durchgeführten Betrach-

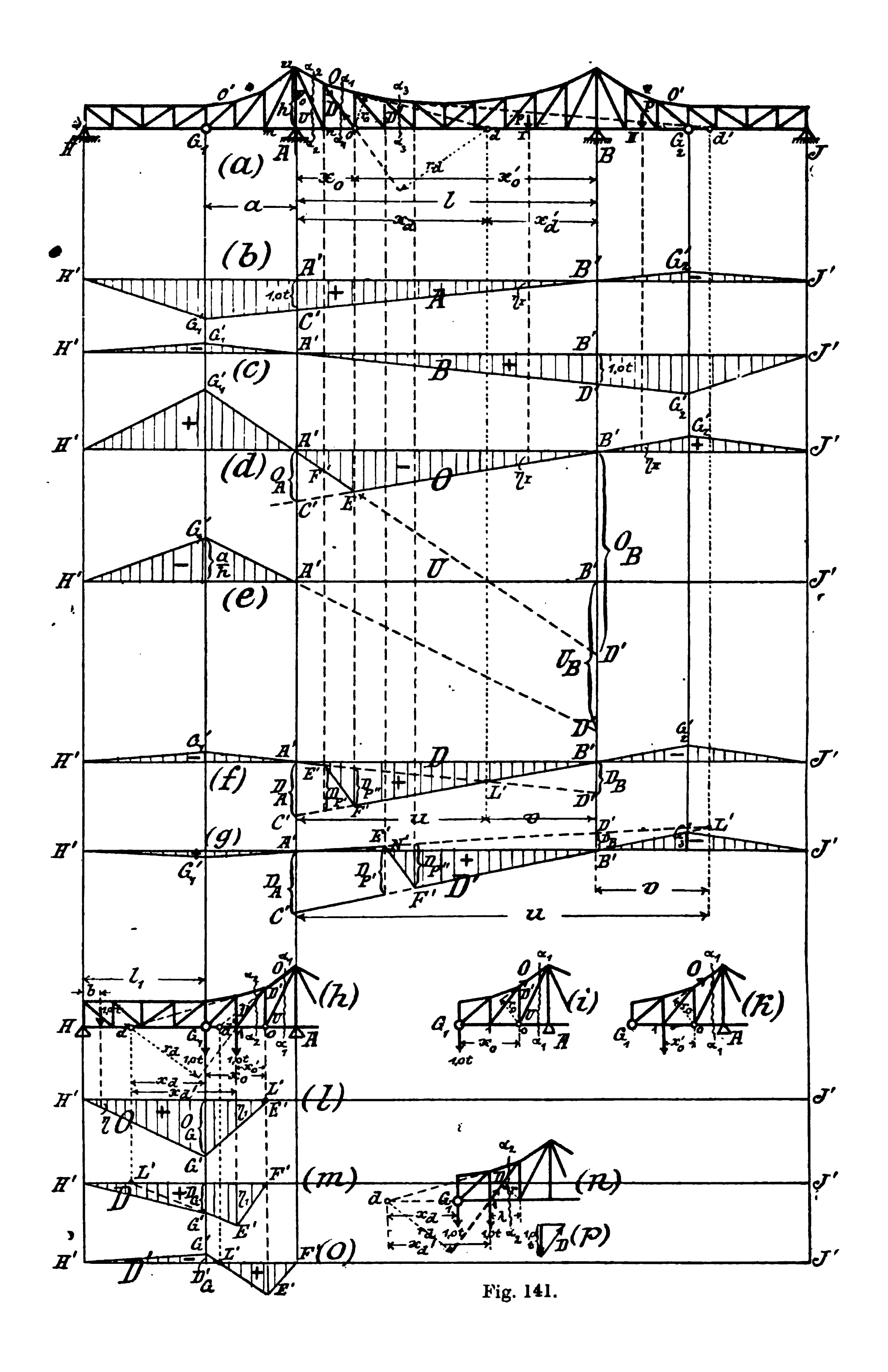


Fig. 141.

tungen. Wir wollen zunächst die Stäbe des mittleren Teiles A—B und dann die Stäbe der überkragenden Teile G_1—A und G_2—B behandeln.

I. Stäbe der Mittelöffnung.

1. Gurtstäbe.

a) *Obergurtstab* O.

α) Allgemeine Ableitung. Im Prinzip gehen wir in derselben Weise vor wie beim einfachen Fachwerkträger zwischen zwei Stützen: Um die Einflußlinie für den Stab O zu finden, untersuche ich zunächst den Fall, daß sich die Belastung nur *rechts* vom Schnitte α_1—α_1 befindet. Dann ist an dem *linken* Trägerteile der Auflagerdruck A die einzige äußere Kraft. Die Spannkraft des Stabes O ist also nur von der Größe des Auflagerdruckes A abhängig; sie verändert sich bei wechselnder Belastung in derselben Weise, in der sich A verändert. Um nun die bei den verschiedenen Werten von A entstehenden Stabkräfte O zu ermitteln, greife ich den Wert $A = 1{,}0$ t heraus und bestimme die hierzu gehörige Spannkraft O_A des Stabes O. [Graphisch nach *Culmann* oder mittels eines von A bis O gezeichneten Kräfteplanes; analytisch nach *Ritter* gleich $-A \cdot \frac{x_0}{r_0} = -1{,}0 \cdot \frac{x_0}{r_0}$]. Ändert sich dann die Belastung, so daß der Auflagerdruck nicht mehr gleich 1,0 t, sondern allgemein gleich A, und also die Stabkraft nicht mehr gleich O_A, sondern allgemein gleich O wird, so ergibt sich die neue Stabkraft aus der Bedingung, daß sich verhält:

$$O : O_A = A : 1{,}0 \text{ t};$$

hieraus

$$O = O_A \cdot A. \tag{I}$$

Durch diese Formel ist die Spannkraft O als Mehrfaches des Auflagerdruckes A dargestellt.

Um diesen Ausdruck graphisch darzustellen, zeichnen wir die Einflußlinie für A (Fig. 141b) im $O_A$fachen Maßstabe. Die A-Linie eines *Gerber*schen Trägers ist in Band I, Fig. 133b, entwickelt: Unter dem Auflager A wird von einer Nullachse aus der Betrag $A'C' = 1{,}0$ t aufgetragen, $C'B'$ gezogen, diese Linie beiderseitig bis zu den Gelenken verlängert und nach den Endpunkten der eingehängten Träger abgeschrägt. In Fig. 141b ist diese Linie noch einmal dargestellt.

Da wir jetzt aber das $O_A$fache des Auflagerdruckes brauchen, werden wir die unter A liegende Ordinate nicht mehr gleich 1,0 t, sondern gleich $O_A \cdot 1{,}0 = O_A$ auftragen (Fig. 141d). Steht dann

an der Stelle I eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die Ordinate η_I aus Fig. 141d den Wert $O_A \cdot A$, das ist die Spannkraft des Stabes O. Das Stück $E'B'G_2'J'$ der im $O_A$fachen Maßstabe aufgetragenen A-Linie ergibt also für alle Stellungen, die die Last $P = 1{,}0$ t rechts vom Schnitte $\alpha_1 - \alpha_1$ einnehmen kann, die Stabkraft O. Man braucht nur die betreffende Laststellung hinunterzuloten und hat dann durch die darunter liegende Ordinate η die Spannkraft O graphisch dargestellt (vgl. Laststellung II Fig. 141a). Man sieht aus der Figur, daß es nicht nötig ist, die volle A-Linie im $O_A$fachen Maßstabe aufzutragen, sondern daß es genügt, bei C' anzufangen. Ist die Last nicht gleich 1,0 t, sondern allgemein gleich P (t), so muß natürlich $P \cdot \eta$ genommen werden.

Wenn nun die Last links vom Schnitte $\alpha_1 - \alpha_1$ rückt, so sind auf dem linken Trägerteil der Auflagerdruck A und die Last P als äußere Kräfte wirksam. Jetzt ist also die Stabkraft O nicht mehr durch die eine äußere Kraft A ausdrückbar, sondern in der Formel für O müßte außer der Kraft A auch noch die Last P vorkommen. Deshalb ist es bei linksseitiger Laststellung zweckmäßig, die Spannkraft O aus dem Gleichgewicht des rechten Trägerteiles abzuleiten. Dann können wir O wiederum als nur von *einer* äußeren Kraft, nämlich dem Auflagerdruck B, abhängig darstellen, indem wir schreiben:

$$O = O_B \cdot B.$$

Hierin ist O_B die Spannkraft im Stabe O, die dann entsteht, wenn B gerade gleich 1,0 t ist; B ist der bei der betreffenden Laststellung entstehende Auflagerdruck. Graphisch tragen wir diesen Ausdruck auf, indem wir die Einflußlinie für B (die zur Wiederholung in Fig. 141c ebenfalls gezeichnet ist) im $O_B$fachen Maßstabe darstellen, also in Fig. 141d die Strecke $B'D'$ gleich $O_B \cdot 1{,}0 = O_B$ zeichnen. Dann geben die Ordinaten der Linie $H'G_1'A'F'$ die Spannkraft O für jede Stellung an, die die Last $P = 1{,}0$ t links vom Schnitte einnehmen kann.

Es fehlt nur noch die Spannkraft O für den Fall, daß die Last direkt innerhalb des von dem Schnitte $\alpha_1 - \alpha_1$ getroffenen Feldes steht. Diesen Teil der Einflußlinie finden wir, indem wir die beiden das Feld begrenzenden Belastungspunkte hinunterloten und die Endpunkte F' und E' der hierdurch bestimmten Ordinaten durch eine gerade Linie verbinden. (Letztere braucht in Fig. 141d nicht besonders eingezeichnet zu werden, da sie einen Teil der Linie $D'A'$ bildet.)

Die gesamte Linie $H'G_1'A'E'B'G_2'J'$ hat also folgende Eigen-

schaft: Steht an beliebiger Stelle der Brücke eine Last $P = 1{,}0$ t, so gibt die unter dieser Last gemessene Ordinate η diejenige Spannkraft an, die infolge dieser Laststellung im Stabe O entsteht. *Fig. 141d ist die Einflußlinie für O.*

β) **Vereinfachung.** Für das Aufzeichnen wollen wir uns noch merken, daß der Schnittpunkt E' der Linien $C'B'$ und $D'A'$ (Fig. 141d) senkrecht unter dem Bezugspunkte o (Fig. 141a) des Stabes O liegt. Dieses folgt daraus, daß $O_A = -\frac{x_0}{r_0}$, $O_B = -\frac{x_0'}{r_0}$ ist; daß sich also $A'C' : D'B' = x_0 : x_0'$ verhält. Es wird also meistens bequemer sein, nur den Wert $O_A = A'C'$ aufzutragen, hierauf die Linie $C'G_2'J'$ zu zeichnen, auf dieser den Punkt E' senkrecht unter o zu bestimmen und darauf die Linie $E'G_1'H'$ zu zeichnen. Auf diese Weise erspart man das Auftragen von O_B.

γ) **Vorzeichen.** Hinsichtlich des Vorzeichens ist zu beachten: Sowohl für O_A als O_B hat sich ein negativer Wert ergeben. Nun ist $O = O_A \cdot A$ resp. $= O_B \cdot B$. Daraus folgt, daß bei einer Laststellung, die einen *positiven* Auflagerdruck A resp. B erzeugt, sich für O ein Produkt: negativ $\times$ positiv $=$ *negativ*, ergibt. Für eine Laststellung dagegen, bei der der zugehörige Auflagerdruck A resp. B *negativ* ist, wird der Wert O *positiv*. Das Vorzeichen von O ist also stets entgegengesetzt dem Vorzeichen von A (für rechtsseitige Laststellung) bzw. von B (für linksseitige Laststellung). Somit ergeben sich die in Fig. 141d eingeschriebenen Vorzeichen. Man erkennt auch aus der Anschauung, daß eine in der Mittelöffnung stehende Last den Fachwerkteil $\overline{A—B}$ nach unten durchbiegt (wobei im Stabe O Druck entstehen muß), während eine Belastung der Außenöffnungen das Fachwerk $\overline{A—B}$ nach oben wölbt.

Hiermit ist die Einflußlinie des Stabes O auch hinsichtlich der Vorzeichen bestimmt.

b) *Untergurtstab U.*

In derselben Weise wie für den Stab O werden nun für die anderen Gurtstäbe des mittleren Trägers $\overline{A—B}$ die Einflußlinien gezeichnet. In Fig. 141e ist dieses noch für den Untergurt U geschehen, weil hierbei einige Besonderheiten zu beachten sind: Zu diesem Stabe gehört der Schnitt $\alpha_2—\alpha_2$. Nimmt man wieder die Belastung nur rechts vom Schnitte und zwar so an, daß $A = 1{,}0$ t wird, so ergibt sich, daß der Wert $U_A = 0$ wird. Es muß also bei A' in Fig. 141e der Wert Null aufgetragen werden; d. h. der rechts vom Schnitte liegende Teil der Einflußlinie fällt

mit der Nullachse zusammen. Nimmt man aber eine Belastung links vom Schnitte an (in der linken Außenöffnung), so daß $B = 1{,}0$ t wird, so ergibt sich für U_B ein bestimmter Wert. [Analytisch nach Fig. 141a: $U_B = +1{,}0 \cdot \frac{l}{h}$]. Dieser wird unter B' aufgetragen. Die gesamte Einflußlinie besteht somit aus dem Dreieck $H'G_1'A'$ in Fig. 141e und ist von A' bis J' gleich Null. Auch hier kommt man also mit dem Auftragen *eines* Wertes, nämlich O_B, aus.

Zusatz. Statt die Gurtstäbe mit Hilfe der Werte $O_A (U_A)$ bzw. $O_B (U_B)$ zu bestimmen, kann man sie natürlich auch aus den Momenten für ihre Bezugspunkte ableiten. Beispielsweise gilt für den Stab U (Bezugspunkt u in Fig. 141a) allgemein die *Ritter*sche Formel:

$$U = + \frac{M_u}{h}.$$

Es ergibt sich also die Einflußlinie für U, indem man die Einflußlinie für das Moment M_u im $(1 : h)$fachen Maßstabe aufträgt. Letztere Einflußlinie ist aber nach Band I, § 74 (vgl. daselbst Fig. 133g) ein Dreieck mit der Höhe a. Für den Stab U muß also das Dreieck die Höhe $\frac{a}{h}$ haben (Fig. 141e). Hiermit ist für den Stab U die Einflußlinie noch einfacher bestimmt als mit dem Werte U_B.

2. Füllungsstäbe.

a) *Diagonale* D (Bezugspunkt innenliegend).

α) **Allgemeine Ableitung.** Um die Einflußlinie für den Stab D abzuleiten, zerlegen wir den Träger durch den Schnitt α_1—α_1 in einen rechten und in einen linken Teil. Hierauf bestimmen wir die Spannkräfte D_A (infolge $A = 1{,}0$ t) und D_B (infolge $B = 1{,}0$ t). Für alle Laststellungen rechts vom Schnitte läßt sich dann D durch die Beziehung $D = D_A \cdot A$, und für alle Laststellungen links vom Schnitte durch die Beziehung $D = D_B \cdot B$ ausdrücken. Graphisch stellen wir diese Ausdrücke dar, indem wir die A-Linie im $D_A$fachen und die B-Linie im $D_B$fachen Maßstabe aufzeichnen, und zwar wird von der ersteren das Stück rechts vom Schnitt und von der zweiten das Stück links vom Schnitt gebraucht (Fig. 141f). Man wird also auch nicht die volle A-Linie resp. B-Linie auftragen, sondern erst von den Punkten C' und D' ab. In dem Felde, in dem der Schnitt α_1—α_1 liegt, werden dann die End-

punkte der beiden, unter dem linken und rechten Belastungspunkte liegenden Ordinaten durch die gerade Linie $E'F'$ verbunden, worauf die Einflußlinie für D fertig vorliegt.

Wenn man die Hilfswerte D_A und D_B nach *Ritter* analytisch bestimmt, so ergibt sich für den Stab D in Fig. 141a (mit d als Bezugspunkt für die Momente):

$$\text{(II)} \qquad D_A = +1{,}0 \cdot \frac{x_d}{r_d}; \qquad D_B = +1{,}0 \cdot \frac{x_d'}{r_d}.$$

[Am linken Teile dreht A rechts um Punkt d, folglich muß Stab D links herum drehen, folglich wirkt er als Zugkraft am linken Teile; entsprechend D_B aus Betrachtung des rechten Teiles.] D_A und D_B haben dasselbe Vorzeichen; sie müssen also von der Nullachse $A'B'$ aus nach derselben Seite aufgetragen werden (Fig. 141f). Somit kann man die Einflußlinie für D vollständig aufzeichnen.

β) **Vereinfachung.** Bezeichnen wir die Abstände des Schnittpunktes L' in Fig. 141f mit u und v, so verhält sich:

$$u : v = D_A : D_B = \frac{x_d}{r_d} : \frac{x_d'}{r_d}$$
$$= x_d : x_d'.$$

Daraus folgt, daß L' senkrecht unter dem Bezugspunkte d von Fig. 141a liegt. Wenn man diese Eigenschaft benutzt, genügt einer von den beiden Werten D_A und D_B zum Aufzeichnen der Einflußlinie.

Ein wichtigeres Hilfsmittel zur Vereinfachung der Einflußlinien sind aber die Vertikalabstände $D_{P'}$ und $D_{P''}$ zwischen den Strecken $C'B'$ und $D'A'$, links und rechts von dem zu D gehörigen Schnitte. Diese Vertikalabstände werden natürlich genau so bestimmt wie beim Fachwerksträger zwischen zwei Stützen (Fig. 112, 113). Man spart durch ihre Anwendung das Auftragen eines der Werte D_B und D_A.

γ) **Vorzeichen.** Das Vorzeichen von D für die verschiedenen Laststellungen ergibt sich aus den Gleichungen $D = D_A \cdot A$ resp. $D = D_B \cdot B$. Da nämlich nach den Formeln (II) für die Diagonale D beide Werte, D_A und D_B, *positiv* sind, so hat D überall das gleiche Vorzeichen wie der Auflagerdruck A bzw. B.

b) *Diagonale* D' (Bezugspunkt außerhalb).

In Fig. 141g ist noch die Einflußlinie für die Diagonale D' gezeichnet. Wenn man für diese den Schnitt $\alpha_3—\alpha_3$ legt, zeigt sich, daß ihr Bezugspunkt d' *außerhalb* der Stützweite $\overline{A—B}$ fällt. In einem solchen Falle ergibt sich bekanntlich stets, daß die

Werte D_A und D_B *verschiedene* Vorzeichen haben. Sie müssen also von der Nullachse $A'B'$ aus nach verschiedenen Richtungen aufgetragen werden (Fig. 141g). Zum Schlusse zeichnet man dann die Abschrägung $E'F'$ unter dem von dem Schnitte getroffenen Felde ein.

Da D_A und D_B nach verschiedenen Seiten aufgetragen sind, hat die Einflußlinie innerhalb der Spannweite $\overline{A-B}$ einen Nullpunkt N'. Eine über diesem Punkte stehende Last bringt in der Diagonalen D' die Spannkraft Null hervor.

Wie vorhin bei der Diagonalen D, so liegt auch jetzt der Schnittpunkt L' der Linien $C'B'$ und $D'A'$ vertikal unter dem Bezugspunkte d' des Stabes. [Dieses ergibt sich, indem man die Gleichung $u : v = D_A : D_B$ anschreibt und für D_A und D_B ihre analytischen Werte einsetzt.] Man kann also unter Zuhilfenahme von Punkt L' die Einflußlinie auch allein aus D_A oder D_B konstruieren. Besser aber benutzt man zur Vereinfachung der Zeichnung die Hilfswerte $D_{P'}$ und $D_{P''}$.

Die Vorzeichen der Einflußlinie Fig. 141g sind dadurch bestimmt, daß D_A positiv, D_B negativ ist. Das Produkt $A \cdot D_A$ ist also positiv, das Produkt $B \cdot D_B$ negativ. Die Einflußlinie für D' hat also das gleiche Vorzeichen wie die A-Linie und das entgegengesetzte Vorzeichen wie die B-Linie.

II. Stäbe der Außenöffnungen (Fig. 141h).

Wir wollen unseren Betrachtungen die Stäbe des linken überkragenden Armes zugrunde legen.

1. Gurtstäbe.

Zur Bestimmung des Stabes O legen wir den Schnitt $\alpha_1-\alpha_1$ und leiten die Stabkraft aus dem Gleichgewichte des links vom Schnitte liegenden Teiles ab. So, wie wir vorher A resp. $B = 1{,}0$ t genommen haben, nehmen wir jetzt den Gelenkdruck G_1 gleich 1,0 t an und bestimmen hierfür die Spannkraft des Stabes O. Sie werde O_G genannt. Analytisch ergibt sich diese Spannkraft O_G, indem wir in bezug auf den Punkt o die Momentengleichung anschreiben. In dieser liefern die Stäbe D' und U das Moment Null, so daß wir direkt die Spannkraft in O finden (Fig. 141i):

$$\text{(III)} \qquad O_G = +1{,}0 \cdot \frac{x_o}{r_o}.$$

Nun ist aber die Einflußlinie für O nichts anderes als die graphische Darstellung der Spannkraft O für die verschiedenen

Stellungen einer wandernden Last von 1,0 t. Für eine Stellung, nämlich wenn die 1,0 t gerade im Gelenkpunkt angreift, haben wir die Spannkraft O_G soeben bestimmt. Wir werden also diesen Wert O_G unter der Stelle G_1 auftragen und haben hiermit bereits eine Ordinate der Einflußlinie (Fig. 141 l).

Rückt nun die wandernde Last in einen anderen Knotenpunkt, z. B. in Punkt *1*, so ist die jetzt entstehende Spannkraft des Stabes O (Fig. 141 k):

$$O = +1{,}0 \cdot \frac{x_o'}{r_o} .$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem obigen O_G, so ergibt sich

$$O : O_G = \frac{x_o'}{r_o} : \frac{x_o}{r_o} ,$$

$$\text{(IV)} \qquad O : O_G = x_o' : x_o \qquad \text{bzw.}$$

$$\text{(IV a)} \qquad O = O_G \frac{x_o'}{x_o} .$$

In Worten: Die Spannkräfte bei diesen beiden Laststellungen (in G und in *1*) verhalten sich wie die Abstände der Last vom Bezugspunkte o. (Dieses Resultat folgt ja auch direkt aus der *Ritter*schen Schnittmethode.) Unter Zuhilfenahme des bereits bekannten Wertes O_G können wir also die Spannkraft O (bei Laststellung in Punkt *1*) direkt darstellen: Wir tragen (Fig. 141 l) die Strecke x_o ab, indem wir Punkt L' senkreckt unter o bestimmen, dann verbinden wir G' mit L', loten Punkt *1* hinunter und finden nach Fig. 141 l:

$$\eta_1 : O_G = x_o' : x_o \qquad \text{also}$$

$$\text{(V)} \qquad \eta_1 = O_G \cdot \frac{x_o'}{x_o} ,$$

$$\eta_1 = O .$$

Auf Grund der obigen Proportion (IV) haben wir jetzt also die bei Laststellung in *1* entstehende Spannkraft O durch eine Ordinate η dargestellt.

In derselben Weise ergibt sich für alle anderen Stellungen, die die Last auf dem links vom Schnitte α_1—α_1 liegenden Teile des Kragarms einnehmen kann, die Spannkraft O, dargestellt durch die Ordinaten der Linie $G'L'$. Diese Linie ist also bereits ein Stück der Einflußlinie. Sie gilt vom Gelenk G_1 aus bis zu dem Belastungspunkte, der unmittelbar links vom Schnitte liegt. [Dieser Belastungspunkt fällt beim Stabe O mit dem Bezugs-

punkte o zusammen; seine Projektion E' in Fig. 141 l also auf Punkt L'.]

Die noch fehlenden Stücke der Einflußlinie sind nun leicht zu finden: Steht die Last in dem rechts vom Schnitte liegenden Belastungspunkte, so wird O gleich Null. Denn in diesem Falle wird auf den Fachwerkteil Fig. 141 k gar keine Belastung mehr übertragen. Dasselbe gilt, wenn die Last noch mehr nach rechts rückt. Folglich hat die Einflußlinie von E' ab die Ordinaten Null.

Rückt aber die Belastung nach links, auf den eingehängten Träger, so entsteht an dem untersuchten Fachwerkteil ein Gelenkdruck $1{,}0 \cdot \frac{b}{l_1}$ (Fig. 141 h) und folglich im Stabe O eine Spannkraft gleich $O_G \cdot \frac{b}{l_1}$. [O_G war die Spannkraft infolge G_1 = *einer* t.] Graphisch finden wir diesen Ausdruck, indem wir G' mit H' verbinden und die unter der Laststellung liegende Ordinate η abmessen.

Insgesamt gibt also die Linie $H'G'E'J'$ für alle Stellungen der Last $P = 1{,}0$ t die Spannkraft des Stabes O an; *sie ist die Einflußlinie für* O. Wir haben sie gefunden, indem wir von der Laststellung $P = 1{,}0$ t im Gelenkpunkte G_1 ausgingen und dann der Reihe nach die drei Fälle: Last zwischen Gelenk und Schnitt, Last rechts vom Schnitt, Last links vom Gelenk, untersuchten. Hierbei zeigte es sich, daß alle anderen Spannkräfte sich durch die eine Spannkraft O_G ausdrücken lassen.

2. Füllungsstäbe.

a) *Diagonale* D. (Bezugspunkt außerhalb.)

Für die Diagonale D legen wir den Schnitt α_2—α_2 und leiten die Einflußlinie wieder in der Weise ab, daß wir für die verschiedenen Stellungen einer Last $P = 1{,}0$ t die Spannkraft des Stabes D aufstellen (Last $P = 1{,}0$ t im Gelenk; dann Last zwischen Gelenk und Schnitt, Last rechts vom Schnitt, Last links vom Gelenk).

Zunächst nehmen wir die wandernde Last $P = 1{,}0$ t im Punkte G_1 an, bestimmen die Spannkraft der Diagonalen und tragen diesen Wert D_G senkrecht unter G_1 ab (Fig. 141 m). Analytisch ergibt sich für D_G [aus der Momentengleichung für Punkt d, Fig. 141 h und n]:

$$D_G = +1{,}0 \cdot \frac{x_d}{r_d}.$$

Somit ist eine Ordinate der Einflußlinie bereits gefunden (und alle übrigen werden jetzt durch D_G ausgedrückt).

Nun stellen wir die Last $P = 1{,}0$ t in einen anderen Punkt, z. B. in Punkt *1*, und bestimmen auch hierfür die Spannkraft in D. Es ergibt sich (Fig. 141h und n):

$$D = +1{,}0 \cdot \frac{x'_d}{r_d}.$$

Da dieser Wert zu dem bereits gefundenen Wert D_G in der Beziehung steht:

$$D = D_G \cdot \frac{x'_d}{x_d},$$

braucht er aber nicht besonders ausgerechnet und aufgetragen zu werden, sondern wird einfacher in folgender Weise dargestellt (Fig. 141m): Wir bestimmen Punkt L' senkrecht unter Bezugspunkt d, ziehen die Gerade $\overline{L'G'}$ und verlängern diese bis E'. Dann stellt die Ordinate η_1 den obigen Wert D dar. Denn es ist nach Fig. 141m:

$$\eta_1 : D_G = x'_d : x_d;$$

also

$$\eta_1 = D_G \cdot \frac{x'_d}{x_d} = D.$$

Durch die Linie $G'E'$ haben wir somit die Diagonalkraft für alle Laststellungen vom Gelenk G_1 bis zu dem Belastungspunkte, der unmittelbar links vom Schnitte liegt (Punkt *1*).

Steht die Last in dem unmittelbar rechts vom Schnitte liegenden Belastungspunkte, so ist D gleich Null. Folglich ergibt sich für das Feld, durch das der Schnitt selber hindurchgeht, die Abschrägung $E'F'$ (Fig. 141m). Weiter nach rechts hat dann die Einflußlinie überall die Ordinate Null.

Um auch die Einflußlinie für die Laststellungen links vom Gelenk zu vervollständigen, ziehen wir die Gerade $G'H'$ (genau so wie vorhin bei der Einflußlinie für O, Fig. 141l).

Insgesamt erhalten wir also $H'G'E'F'J'$ als Einflußlinie für die Diagonale D, konstruiert aus D_G und Hilfspunkt L'.

b) *Diagonale D'.* (Bezugspunkt innerhalb.)

Nach demselben Schema bestimmen wir die Einflußlinie für die Diagonale D'. Der zu diesem Stabe gehörige Schnitt ergibt den Punkt d' als Bezugspunkt. Nun tragen wir die Spannkraft D'_G infolge eines Gelenkdruckes von $G_1 = 1{,}0$ t auf (Fig. 141o), bestimmen den Punkt L' senkrecht unter dem Bezugspunkte d' und verbinden G' mit L'. Dann ist die Linie $G'L'$, resp. deren Verlängerung, die Einflußlinie für alle Laststellungen von G_1 ab bis zu dem unmittelbar links vom Schnitte liegenden Belastungs-

punkte. Schließlich ziehen wir noch die Geraden $E'F'$ (für Laststellungen rechts vom Schnitt) und $G'H'$ (für Laststellungen links vom Gelenk) und haben $H'G'E'F'J'$ als vollständige Einflußlinie.

Aus dem Vergleiche von Fig. 141o mit Fig. 141m erkennen wir: Liegt der Bezugspunkt eines Füllungsstabes *innerhalb* der Strecke zwischen Gelenk und Schnitt, so wechselt die Einflußlinie ihr Vorzeichen; liegt aber der Bezugspunkt *außerhalb* dieser Strecke (links oder rechts davon), so hat die Einflußlinie nur *ein* Vorzeichen. Die Füllungsstäbe des überkragenden Teiles verhalten sich also gerade umgekehrt wie diejenigen des Mittelteiles.

c) Hilfsmittel bei ungünstig liegendem Bezugspunkte.

Wenn der Bezugspunkt weit außerhalb liegt, ist es schwierig, den Punkt L' zu bestimmen. In diesem Falle gehen wir so vor, daß wir außer dem Werte D_G noch eine andere Ordinate direkt bestimmen. Am zweckmäßigsten ist es dann, man nimmt die Last $P = 1{,}0$ t in dem Belastungspunkte unmittelbar links vom Schnitte an und bestimmt die darunter liegende Ordinate.

Diese Werte sind dann augenscheinlich dieselben wie unsere bereits vielfach gebrauchten Hilfswerte $D_{P'}$ und $D_{P''}$. Für die Diagonale D ist dieses in Fig. 141p durchgeführt. Die Spannkraft infolge der im Knoten *1* befindlichen Last von 1,0 t ergibt sich (Fig. 141p) graphisch mittels eines *Culmann*schen Viereckes (das in ein einfaches Dreieck übergeht). Analytisch finden wir D mittels der Formel (Fig. 141n, vgl. Fig. 112b)

$$D = +1{,}0 \cdot \frac{\lambda}{r}.$$

Dieser Wert wird dann bei der Einflußlinie der Diagonalen (Fig. 141m) senkrecht unter dem Knoten *1* aufgetragen (Ordinate η_1). Somit ist der Punkt E' bestimmt, ohne daß L' zur Hilfe genommen werden muß. Wie man sieht, sind auch in diesem Falle die Hilfswerte $D_{P'}$ das beste Mittel, um das Aufzeichnen der Einflußlinien zu vereinfachen.

III. Zusammenfassung.

Aus der Betrachtung von Fig. 141 ergeben sich für das Aufzeichnen der Einflußlinien folgende Regeln:

1. Mittlerer Teil.

Bei den Stäben der Mittelöffnung $\overline{A—B}$ sehen die Einflußlinien auf der Strecke zwischen den Auflagern (Strecke $\overline{A'—B'}$)

genau so aus wie bei einem einfachen Fachwerkträger zwischen zwei Stützen. Dieses Resultat ist ja auch einleuchtend. Denn, solange sich die Last innerhalb der Strecke $\overline{A-B}$ bewegt, treten die überkragenden Arme überhaupt nicht in Wirksamkeit. Beim Aufzeichnen der Einflußlinien werden wir also zunächst nur das Fachwerk $\overline{A-B}$ betrachten und für dieses nach den gewöhnlichen Methoden die Einflußlinien bestimmen. Hierdurch sind die Laststellungen innerhalb der Spannweite $\overline{A-B}$ erledigt. Dann verlängern wir die Einflußlinien über A' und B' hinaus *geradlinig bis zu den Gelenkpunkten* und knicken sie von hier aus nach den Endauflagern der eingehängten Träger ab (Fig. 141d—g).

2. Kragarme.

Für die Stäbe der überkragenden Teile $\overline{G_1-A}$ und $\overline{G_2-B}$ nehmen wir die Last $P = 1{,}0$ t zunächst in einem beliebigen Punkte an, bestimmen hierfür die Spannkraft und tragen diese Kraft unter dem betreffenden Punkte als Ordinate der Einflußlinie auf. Es empfiehlt sich, als diese eine, willkürliche, Laststellung die Belastung des Gelenkpunktes mit $P = 1{,}0$ t zu wählen, weil man diese Stellung für sämtliche Stäbe des Kragarmes verwenden kann. Hiermit sind die Punkte G' in Fig. 141l, m und o bestimmt.

Für das weitere Aufzeichnen benutzen wir dann die Eigenschaft der Einflußlinie, daß diese auf der Strecke vom Gelenkpunkt G' bis zu dem unmittelbar vor dem Schnitte liegenden Belastungspunkte E' *eine gerade, ohne Knick durchlaufende* Linie ist. Der Schnittpunkt dieser Linie $G'E'$ (Fig. 141l, m, o) mit der Nullachse, Punkt L', liegt senkrecht unter dem *Bezugspunkte* des betreffenden Stabes. Mit Hilfe dieses Punktes L' auf der Nullachse und der vorhin bestimmten einen Ordinate läßt sich dann die Linie $G'E'$ aufzeichnen.

Bei den Gurtstäben ist hierdurch die Einflußlinie schon vollständig bestimmt, da bei diesen Stäben der Punkt E' auf der Nullachse liegt. Bei den Füllungsstäben kommt für das geschnittene Feld noch die Abschrägung $E'F'$ hinzu.

Da bei den Füllungsstäben der Punkt L' mitunter ziemlich ungünstig liegt, empfiehlt es sich häufig, ihn gar nicht zu benutzen und statt dessen die Linie $G'E'$ mit Hilfe einer zweiten Ordinate festzulegen (Fig. 141p). Und zwar benutzt man als diese zweite Ordinate zweckmäßig die Ordinate unmittelbar seitlich vom Schnitte ($D_{P'}$ am linken Kragarm, $D_{P''}$ am rechten Kragarm).

IV. Zusätze.

Zusatz 1: Es sei darauf hingewiesen, daß eine Kragträgerbrücke auch dann als unsymmetrisch zu betrachten ist, wenn die Stäbe der Mittelöffnung zwar symmetrisch angeordnet, die Kragarme aber verschieden lang sind. Man bekommt dann für zwei symmetrisch gelegene Stäbe der Mittelöffnung zwei verschiedene Einflußlinien.

Zusatz 2: Sobald man weiß, wie die Einflußlinien der verschiedenen Stäbe aussehen, kann man das Verfahren auch unter Umständen abändern. Man kann z. B. für sämtliche Stäbe, auch für die der Mittelöffnung, eine Last im Gelenkpunkt annehmen und die Spannkraft bestimmen. [Dann muß man natürlich zunächst die infolge dieser Last $P = 1{,}0$ t entstehenden Auflagerkräfte berechnen.] Dann trägt man für sämtliche Stäbe die durch diese Laststellung hervorgerufene Spannkraft als Ordinate der Einflußlinie unter dem Gelenkpunkte auf, d. h. man bestimmt auch in Fig. 141d—g zunächst die Punkte G_1' und vervollständigt schließlich die Einflußlinie für die übrigen Öffnungen.

Zusatz 3: Bei den bisherigen Ableitungen haben wir vorausgesetzt, daß sich stets ein Schnitt legen läßt, der außer dem betreffenden Stabe nur noch zwei andere Stäbe trifft. Deren Treffpunkt wurde dann als Bezugspunkt für den zu untersuchenden Stab genommen, worauf sich einfache, leicht graphisch darstellbare Formeln ergaben. Nun gibt es aber auch Stäbe, bei denen sich nicht derartige Schnitte legen lassen. Bei V_0 z. B. (Fig. 141a) läßt sich kein nur durch drei Stäbe gehender Schnitt angeben. Dann helfen wir uns, indem wir das Gleichgewicht einzelner Knotenpunkte untersuchen:

Würde z. B. in Fig. 141a die Belastung am *Obergurt* angreifen, so würde sich, da der Untergurt horizontal ist, für jede beliebige Laststellung aus dem Gleichgewicht des Auflagerpunktes A ergeben:

$$V = -A .$$

Die Einflußlinie für V_0 wäre also genau dieselbe wie für den Auflagerdruck A, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Wenn aber, wie es in Fig. 141a der Fall ist, die Belastung am Untergurt angreift, so müssen wir unterscheiden: Ist die Last links von m oder rechts von n (Fig. 141a), so ist $V_0 = -A$; d. h. auf diesen Strecken ist die A-Linie auch Einflußlinie für V_0, nur sind die Vorzeichen umzukehren. Ist die Last P aber gerade

im Auflagerpunkt A, so ist $V = -A + P = -P + P = 0$, d. h. unter A hat die Einflußlinie für V_0 die Ordinate Null. Für die noch übrig bleibenden Felder $\overline{m-A}$ und $\overline{A-n}$ zeichnen wir dann gerade Linien ein, da jede Einflußlinie von Belastungspunkt zu Belastungspunkt eine gerade Linie ist. Hierdurch ist die Einflußlinie für V_0 bestimmt. Weitere Beispiele für derartige Stäbe finden sich in den folgenden Paragraphen (Stab V_9 in Fig. 145).

Zusatz 4: Zum Schlusse sei daran erinnert, daß man bei einem Fachwerke mit Vertikalen stets einen Ober- und Untergurtstab miteinander in Beziehung bringen kann. Legt man einen Schnitt $\beta-\beta$ durch eine Vertikale, so besteht zwischen dem von diesem Schnitte getroffenen Ober- und Untergurtstab die Gleichung:

$$O \cos\beta = -U .$$

Es genügt also, die Einflußlinien für die U-Stäbe zu zeichnen. Die O-Stäbe ergeben sich dann aus diesen.

§ 50.

Beispiel: Einflußlinien für eine Gerbersche Straßenbrücke.

***Aufgabe:** Die Fachwerkbrücke Fig. 142—145 mit untenliegender Fahrbahn ist mittels Einflußlinien zu berechnen!*

I. Allgemeines und System.

Für ständige Belastung ist die Brücke in § 22, 8. Aufgabe, berechnet. Daselbst sind auch die nötigen Systemangaben gemacht.

II. Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t und $G = 1{,}0$ t und Hilfswerte $D_{P'}$, $D_{P''}$.

Zum Aufzeichnen der Einflußlinien brauchen wir die Spannkräfte infolge eines Auflagerdruckes $A = 1{,}0$ t und eines Gelenkdruckes $G = 1{,}0$ t. Diese Hilfswerte sind nachstehend berechnet (Seite 494, 495); die ersteren für die Stäbe zwischen den Auflagern A und B, die zweiten für die Stäbe des Kragarmes. Außerdem sind die Hilfswerte $D_{P'}$ (links vom Schnitte) bzw. $D_{P''}$ (rechts vom Schnitte) bestimmt, soweit sie erforderlich sind. (Für den parallelen Teil des Systems sind sie nicht erforderlich, da hier die Strecken $C'B'$ und $D'A'$ der Einflußlinien parallel laufen. Es ist hierfür also $D_{P'} = D_A$.)

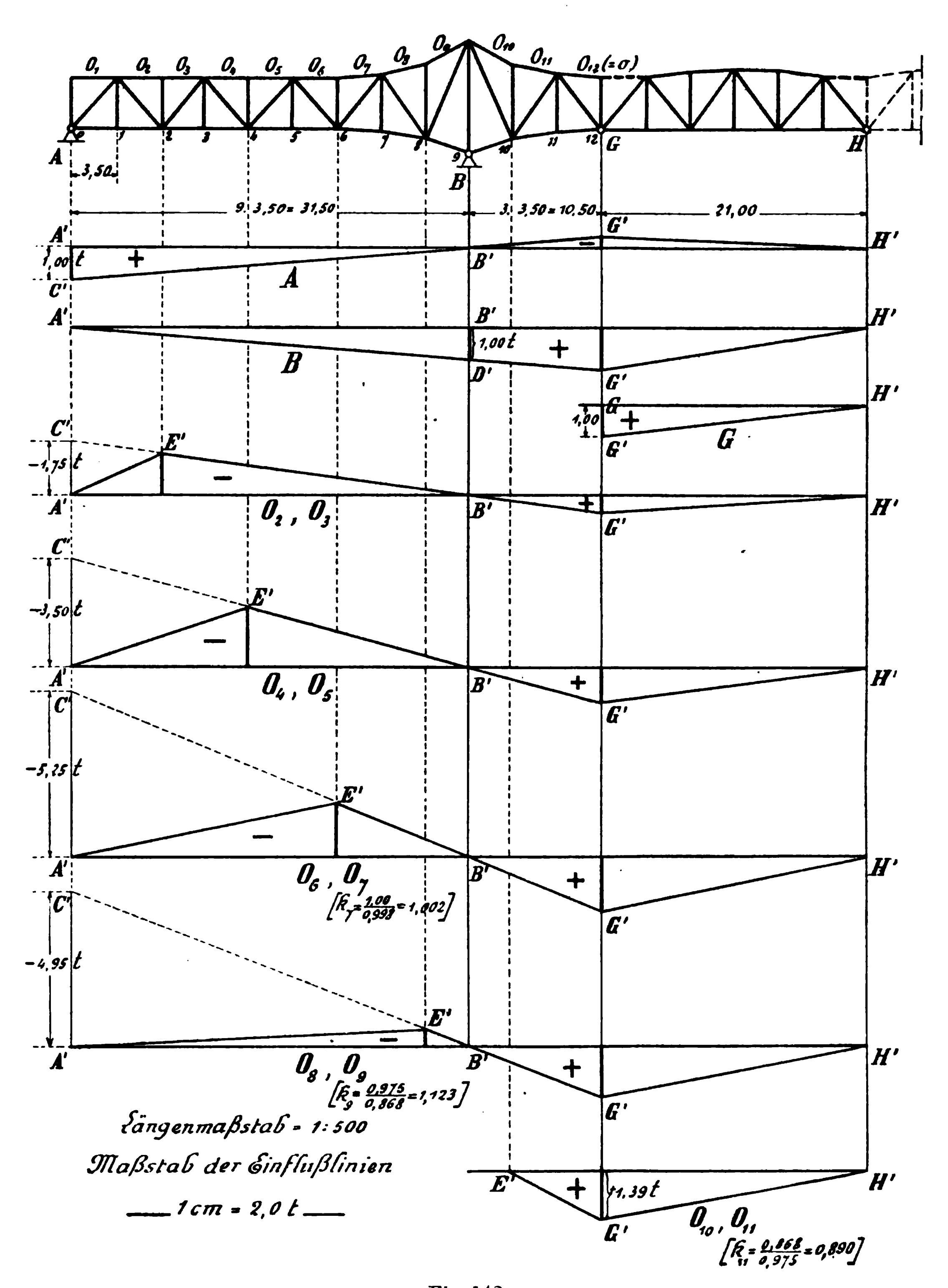
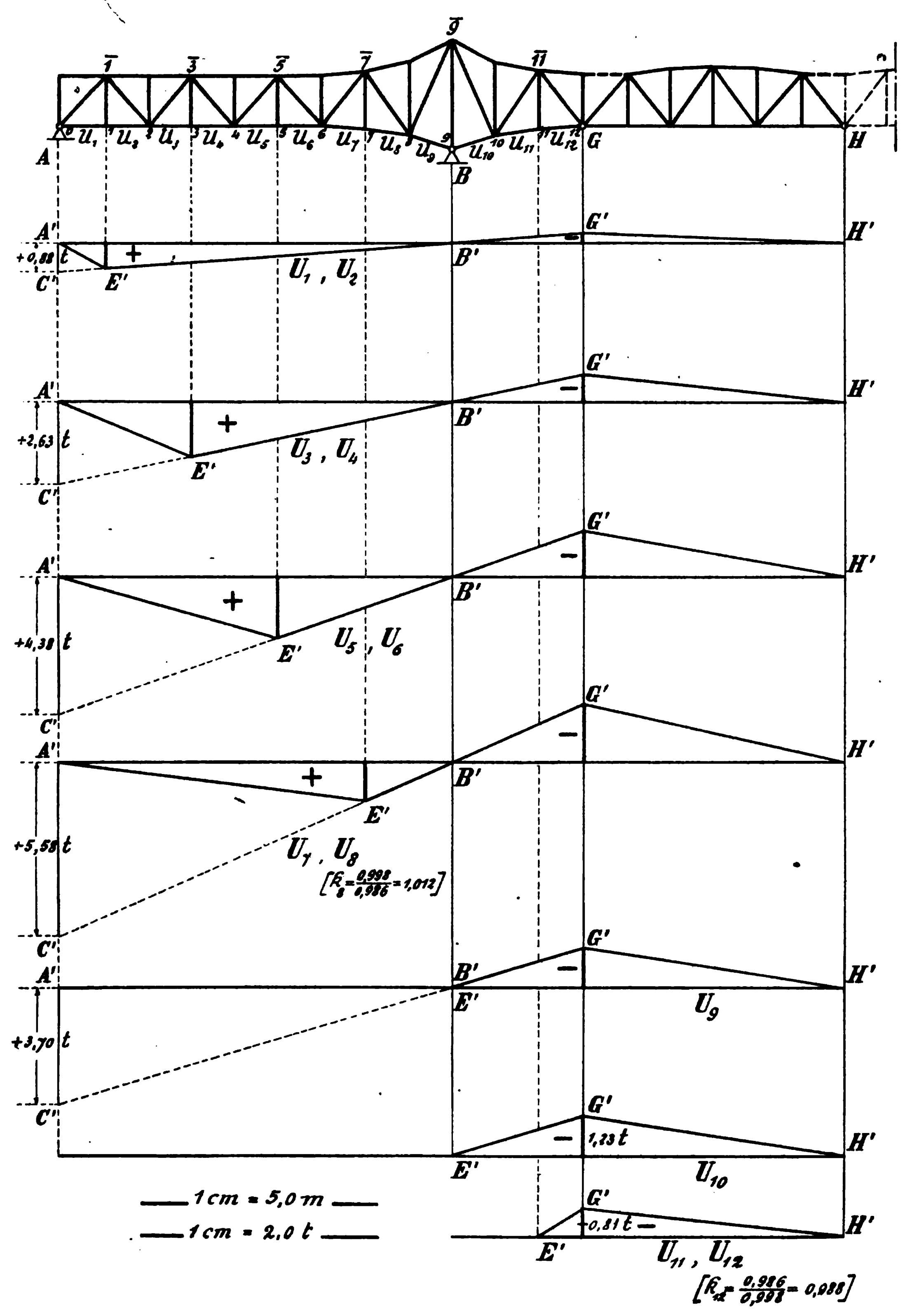


Fig. 142



U₁ , U₂
U₃ , U₄
U₅ , U₆
U₇ , U₈
U₉
U₁₀
U₁₁ , U₁₂
+0,88 t
+2,63 t
+4,38 t
+5,58 t
+3,70 t
1,23 t
0,81 t
1 cm = 5,0 m
1 cm = 2,0 t

Fig. 143.

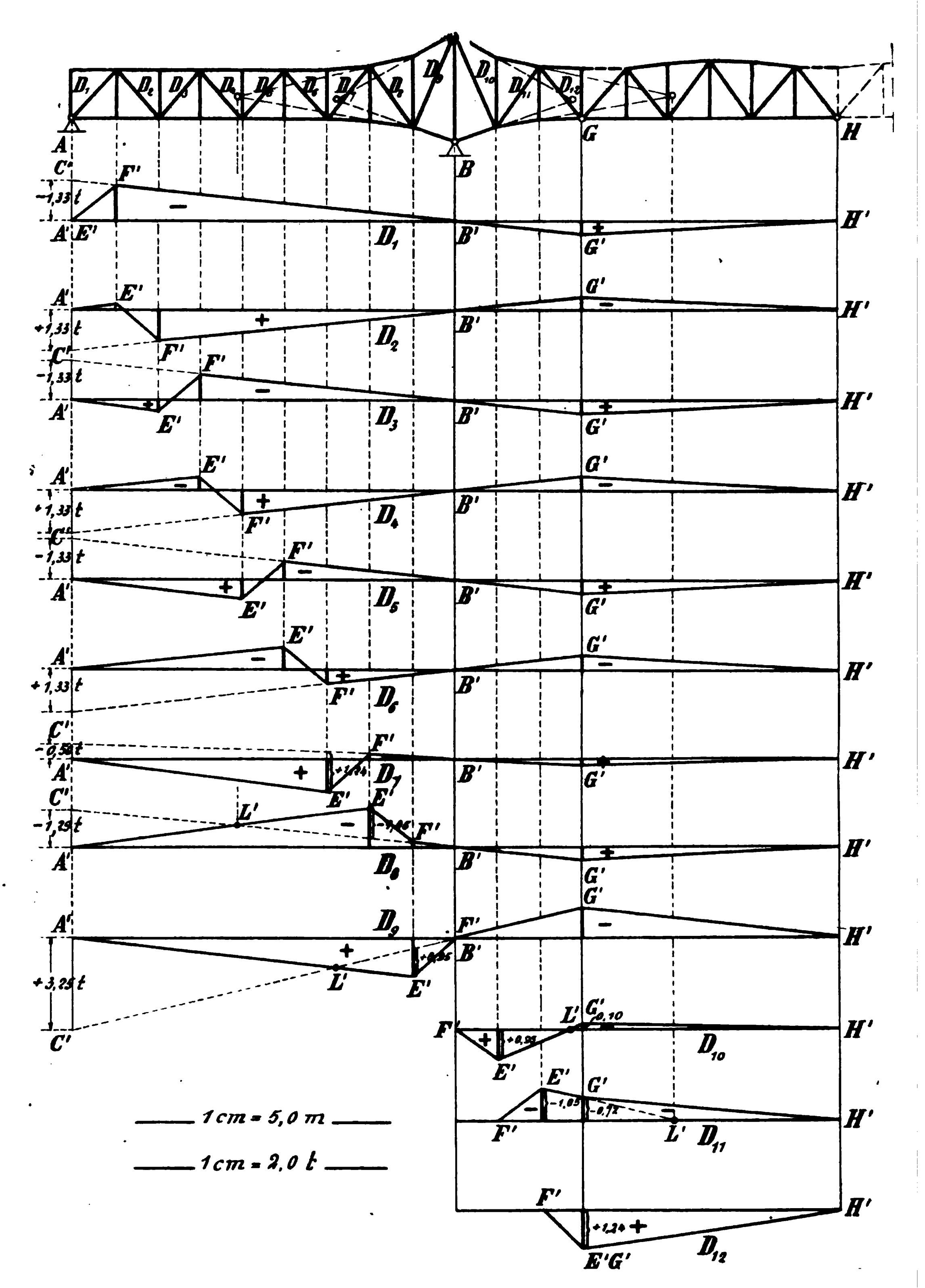


Fig. 144.

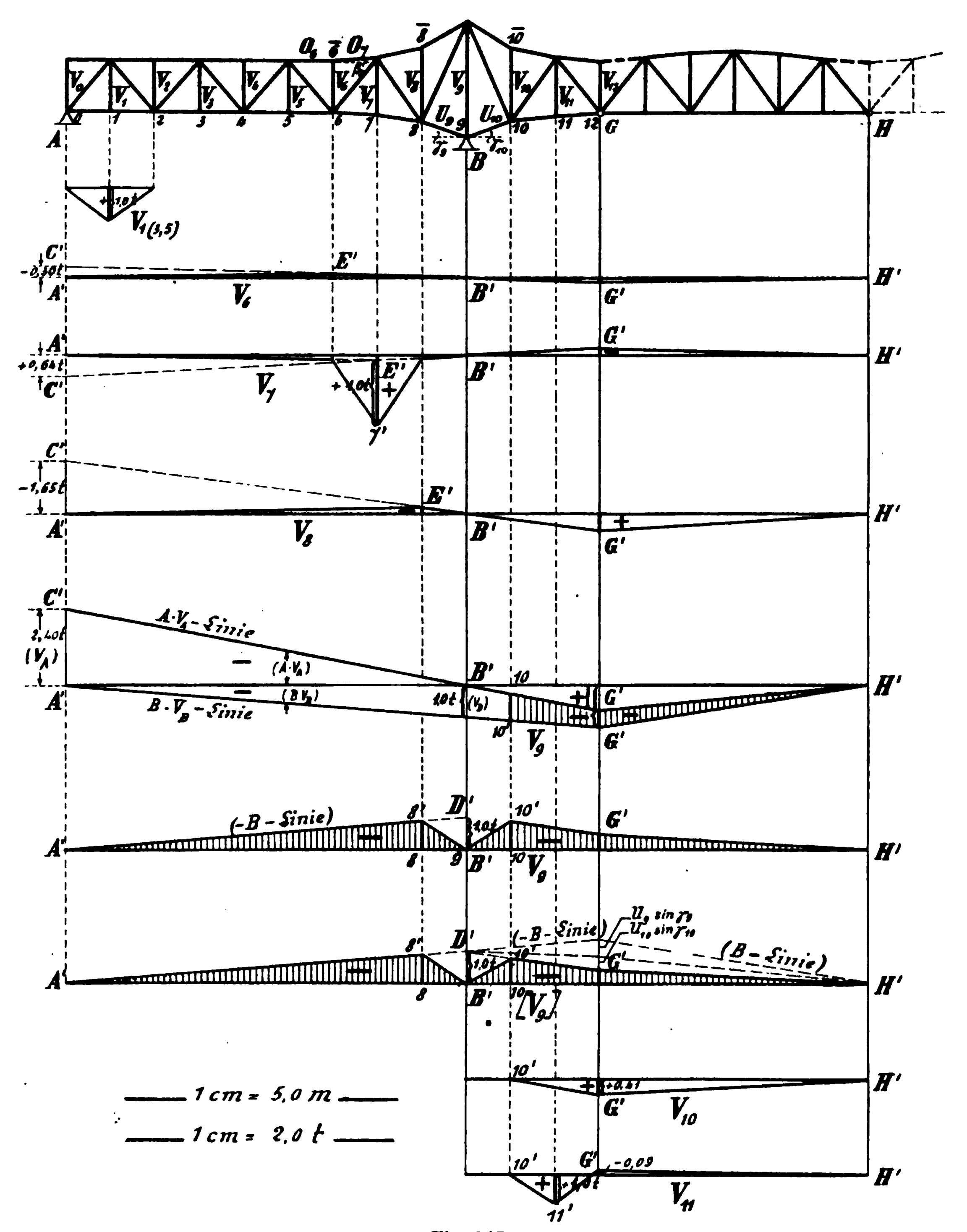


Fig. 145.

Tabelle I: Spannkräfte S_A und $D_{P'}$.

Momente M (mt)	Trägerhöhen h (m)	Quotienten $\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt $O = -\frac{M}{h \cdot \cos\beta}$ Neigungswinkel	Obergurt Stabkraft	Untergurt $U = +\frac{M}{h \cdot \cos\gamma}$ Neigungswinkel	Untergurt Stabkraft	Diagonalen $D = \frac{Q}{\sin\varphi}$; $= \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$; $D_{P'} = \pm\frac{\lambda}{h \cos\varphi}$ Neigungsw.	Diagonalen Stabkraft	$V = 0$; $= \frac{M}{h}(\text{tg}\,\beta_m - \text{tg}\,\beta_{m+1})$ bzw. $= \frac{M}{h}(-\text{tg}\,\gamma_m + \text{tg}\,\gamma_{m+1})$
$M_0 = 0{,}00$	$h_0 = 4{,}00$	$\frac{M_0}{h_0} = 0{,}000$	$\beta_1 \ldots {}_6 = 0°$	$O_1 = 0{,}00$			$\sin\varphi_{1-6} = 0{,}758$	$D_{1,3,5} = -\frac{1{,}0}{0{,}758} = -1{,}33$ $D_{2,4,6} = +1{,}33$	$V_0 \ldots {}_6 = 0{,}0$
$M_1 = +3{,}50$	$h_1 = 4{,}00$	$\frac{M_1}{h_1} = +0{,}875$			$\gamma_1 \ldots {}_6 = 0°$	$U_1 = +0{,}88$ $U_2 = +0{,}88$			
$M_2 = +7{,}00$	$h_2 = 4{,}00$	$\frac{M_2}{h_2} = +1{,}750$		$O_2 = -1{,}75$ $O_3 = -1{,}75$					
$M_3 = +10{,}50$	$h_3 = 4{,}00$	$\frac{M_3}{h_3} = +2{,}625$				$U_3 = +2{,}63$ $U_4 = +2{,}63$			
$M_4 = +14{,}00$	$h_4 = 4{,}00$	$\frac{M_4}{h_4} = +3{,}500$		$O_4 = -3{,}50$ $O_5 = -3{,}50$					
$M_5 = +17{,}50$	$h_5 = 4{,}00$	$\frac{M_5}{h_5} = +4{,}375$				$U_5 = +4{,}38$ $U_6 = +4{,}38$			
$M_6 = +21{,}00$	$h_6 = 4{,}00$	$\frac{M_6}{h_6} = +5{,}250$	$\text{tg}\,\beta_6 = 0{,}000$; $\cos\beta_6 = 1{,}000$ $\text{tg}\,\beta_7 = 0{,}057$; $\cos\beta_7 = 0{,}998$	$O_6 = -5{,}25$ $O_7 = -5{,}26$					$V_6 = 5{,}250\,(0{,}000 - 0{,}057) = -0{,}30$
$M_7 = +24{,}50$	$h_7 = 4{,}40$	$\frac{M_7}{h_7} = +5{,}568$			$\text{tg}\,\gamma_7 = 0{,}057$; $\cos\gamma_7 = 0{,}998$ $\text{tg}\,\gamma_8 = 0{,}171$; $\cos\gamma_8 = 0{,}986$	$U_7 = +5{,}58$ $U_8 = +5{,}65$	$\cos\varphi_7 = 0{,}640$	$D_7 = \frac{1}{0{,}640}\,(5{,}250 - 5{,}568) = -0{,}50$ $D_{P'} = +\frac{3{,}50}{4{,}40 \cdot 0{,}640} = +1{,}24$	$V_7 = 5{,}568\,(-0{,}057 + 0{,}171) = +0{,}64$
$M_8 = +28{,}00$	$h_8 = 5{,}80$	$\frac{M_8}{h_8} = +4{,}828$	$\text{tg}\,\beta_8 = 0{,}229$; $\cos\beta_8 = 0{,}975$ $\text{tg}\,\beta_9 = 0{,}571$; $\cos\beta_9 = 0{,}868$	$O_8 = -4{,}95$ $O_9 = -5{,}56$			$\cos\varphi_8 = 0{,}578$	$D_8 = \frac{1}{0{,}578}\,(4{,}828 - 5{,}568) = -1{,}29$ $D_{P'} = -\frac{3{,}50}{5{,}80 \cdot 0{,}578} = -1{,}05$	$V_8 = 4{,}828\,(0{,}229 - 0{,}571) = -1{,}65$
$M_9 = +31{,}50$	$h_9 = 9{,}00$	$\frac{M_9}{h_9} = +3{,}500$			$\text{tg}\,\gamma_9 = 0{,}848$; $\cos\gamma_9 = 0{,}946$	$U_9 = +3{,}70$	$\cos\varphi_9 = 0{,}409$	$D_9 = \frac{1}{0{,}409}\,(4{,}828 - 3{,}500) = +3{,}25$ $D_{P'} = +\frac{3{,}50}{9{,}00 \cdot 0{,}409} = +0{,}95$	$[V_9 = -2 \cdot 3{,}500 \cdot 0{,}848 = -2{,}40]$

Tabelle II: Spannkräfte S_G und $D_{P''}$.

Momente M (mt)	Trägerhöhen h (m)	Quotienten $\frac{M}{h}$ (t)	Obergurt $O = -\frac{M}{h \cos\beta}$ [Neigungswinkel s. Tabelle I]	Untergurt $U = +\frac{M}{h \cos\gamma}$ [Neigungswinkel s. Tabelle I]	Diagonalen $D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_o}{h_o} - \frac{M_u}{h_u}\right)$ $D_{P''} = \pm\frac{\lambda}{h \cos\varphi}$ [Neigungswinkel s. Tabelle I]	Vertikal. $V = \frac{M}{h}(-\mathrm{tg}\,\beta_m + \mathrm{tg}\,\beta_{m+1})$ bzw. $= \frac{M}{h}(+\mathrm{tg}\,\gamma_m - \mathrm{tg}\,\gamma_{m+1})$
$M_9 = -10{,}50$	$h_9 = 9{,}00$	$\frac{M_9}{h_9} = -1{,}167$		$U_{10} = -1{,}28$	$D_{10} = \frac{1}{0{,}409}(-1{,}207 + 1{,}167) = -0{,}10$	
$M_{10} = -7{,}00$	$h_{10} = 5{,}80$	$\frac{M_{10}}{h_{10}} = -1{,}207$	$O_{10} = +1{,}89$ $O_{11} = +1{,}24$		$D_{P''} = +\frac{8{,}50}{9{,}00 \cdot 0{,}409} = +0{,}95$ $D_{11} = \frac{1}{0{,}578}(-1{,}207 + 0{,}795) = -0{,}72$	$V_{10} = -1{,}207(-0{,}571 + 0{,}229) = +0{,}41$
$M_{11} = -8{,}50$	$h_{11} = 4{,}40$	$\frac{M_{11}}{h_{11}} = -0{,}795$		$U_{11} = -0{,}81$ $U_{12} = -0{,}80$	$D_{P''} = -\frac{8{,}50}{5{,}80 \cdot 0{,}578} = -1{,}05$ $D_{12} = \frac{1}{0{,}640}(0{,}000 + 0{,}795) = +1{,}24$	$V_{11} = -0{,}795(+0{,}171 - 0{,}057) = -0{,}09$
$M_{12} = -0{,}00$	$h_{12} = 4{,}00$	$\frac{M_{12}}{h_{12}} = 0{,}000$	$O_{12} = 0{,}00$			$V_{12} = 0{,}0$

III. Aufzeichnen der Einflußlinien.

Mit Hilfe der obigen Werte sind in Fig. 142—145 die Einflußlinien gezeichnet.

1. Auflagerdrücke und Obergurt.

In Fig. 142 sind die Einflußlinien für die Auflagerkräfte A und B, für den Gelenkdruck G und für die Obergurtstäbe gezeichnet. Für je zwei Stäbe, die den gleichen Bezugspunkt haben, wird natürlich nur eine Einflußlinie verwendet. Haben diese beiden Stäbe außerdem auch den gleichen Neigungswinkel, so stimmen die Einflußlinien und also auch die Spannkräfte vollständig überein. Haben sie aber verschiedene Neigungswinkel, so muß die eine Stabkraft aus der anderen durch das Verhältnis der Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t, oder durch das umgekehrte Verhältnis der Kosinus der Neigungswinkel gefolgert werden (vgl. § 24, 3. Aufgabe).

Der Stab O_{10} ist durch die Spannkraft infolge $G = 1{,}0$ t bestimmt. Der Stab O_{11} folgt dann aus der Beziehung:

$$O_{11} = O_{10} \cdot \frac{O_{11(A)}}{O_{10(A)}}$$

oder auch

$$= O_{10} \cdot \frac{\cos\beta_{10}}{\cos\beta_{11}} \left(= O_{10} \cdot 0{,}890\right).$$

Der Faktor $(\cos\beta_{10} : \cos\beta_{11})$ erscheint also als „Multiplikator“ bei der Einflußlinie von O_{11}.

2. Untergurt.

Die Untergurtstäbe sind in Fig. 143 erledigt. Für die U_9-Linie wird der zwischen A und B liegende Teil zu Null. (Der Bezugspunkt fällt in die Auflagervertikale von B.) Trotzdem wird aber die Spannkraft infolge $A = 1{,}0$ t aufgetragen, um den rechten Teil der Einflußlinie zu erhalten. Dieser Stab erfährt also keine Spannkraft, solange die Last zwischen A und B ist. Dagegen bekommt er Druck, sobald die Last auf dem Kragarm oder dem eingehängten Träger steht.

Der Stab U_{10} ist durch die Spannkraft infolge $G = 1{,}0$ t bestimmt. Man sieht, daß die Einflußlinien von U_{10} und U_9 miteinander übereinstimmen. Beide Stäbe sind ja auch gleich dem Biegungsmoment des Punktes $\bar{9}$, dividiert durch die Höhe h_9.

3. Diagonalen.

Die Diagonalen sind in Fig. 144 dargestellt. Das Aufzeichnen der Einflußlinien für D_7—D_9 geschieht mit Hilfe der Werte infolge $A = 1{,}0$ t und der Vertikalabstände $D_{P'}$. (Letztere gehören bekanntlich immer zu dem Knotenpunkte, der unmittelbar links vom Schnitte ist.) Hat $D_{P'}$ das gleiche Vorzeichen wie D_A, so muß der Vertikalabstand so an den Endpunkt der von D_A herrührenden Ordinate angesetzt werden, daß letztere verlängert wird. Andernfalls muß $D_{P'}$ so angesetzt werden, daß es sich von der D_A-Ordinate subtrahiert.

Die Diagonalen D_{10} und D_{11} sind dadurch bestimmt, daß für zwei Punkte direkt die Ordinaten aufgetragen sind; nämlich für den Gelenkpunkt (D_G) und für den unmittelbar rechts vom Schnitte gelegenen Punkt ($D_{P''}$). Beide Ordinaten werden natürlich direkt von der Nullachse und mit Berücksichtigung der Vorzeichen aufgetragen. Für D_{10} ist nur D_G erforderlich.

Zur Sicherheit sind in Fig. 144 auch die Bezugspunkte der einzelnen Diagonalen hinuntergelotet, soweit sie nicht zu ungünstig liegen, und hierdurch die Punkte L' bei den Einflußlinien kontrolliert. Hier zeigt sich wieder der bereits erwähnte Unterschied: Bei den Stäben des Teiles A—B bedeutet ein innenliegender Bezugspunkt, daß die Einflußlinie auf der Strecke A—B nur *ein* Vorzeichen hat. Bei den Füllungsstäben des Kragarmes bedeutet ein innenliegender Bezugspunkt (innerhalb der Länge des Kragarmes), daß die Einflußlinie ihr Vorzeichen *wechselt*.

4. *Vertikalen.*

Die Vertikalen sind in Fig. 145 dargestellt. Die Zwischenvertikalen V_0, V_2, V_4 erhalten keine Spannung. Die Einflußlinie für die Zwischenvertikale V_6 ist durch die Spannkraft infolge $A = 1{,}0$ t bestimmt. Der Punkt $\bar{6}$, aus dessen Gleichgewicht die Stabkraft V_6 gefolgert wird, gehört der unbelasteten Gurtung an. Deshalb ist V_6 bei jeder Laststellung gegeben durch den Ausdruck:

$$V_6 = (-O_6 \cdot \sin\beta_6 + O_7 \sin\beta_7) = \frac{M_6}{h_6}(\operatorname{tg}\beta_6 - \operatorname{tg}\beta_7)\,.$$

Die Einflußlinie für V_6 entspricht also derjenigen von M_6: ein Dreieck $A'E'B'$ mit der Verlängerung $E'B'G'H'$. Bestimmt ist dieses Dreieck für V_6 durch die Strecke $A'C' = V_A$. (Vgl. die Ableitung der Zwischenvertikalen in § 26.)

Die Einflußlinie für V_7 ist entsprechend zu finden. Nur muß berücksichtigt werden, daß der Knotenpunkt, aus dessen Gleichgewicht die Spannkraft V_A des Stabes V_7 abgeleitet wurde, der belasteten Gurtung angehört. Wenn also die Last direkt im Punkte *7* steht, so muß zu dem durch V_A gegebenen Werte noch der Betrag von (+1,0 t) hinzugefügt werden. Auf diese Weise entsteht unter dem Belastungspunkte *7* eine Spitze.

V_8 ist wie V_6 zu behandeln.

Die Vertikale V_9 erfordert eine etwas eingehendere Behandlung: Steht die Last rechts vom Punkte *10*, so ist V_9 abhängig von den beiden Kräften A und B. [Ein von links aus gezeichneter Kräfteplan würde A und B enthalten, bevor er zum Stabe V_9 kommt.] Der Einfluß von A, für sich genommen, ist bestimmt durch den Betrag V_A, den eine Kraft $A = 1{,}0$ t hervorbringt. Der Einfluß von $B = 1{,}0$ t, für sich genommen, auf den Stab V_9 ist: $V_B = -1{,}0$ t. Insgesamt erhalten wir also für Laststellung rechts von Punkt *10* (mit $V_A = -2{,}40$ t, nach Tabelle I):

$$\begin{aligned} V_9 &= A \cdot V_A + B \cdot V_B \\ &= A \cdot (-2{,}40) + B \cdot (-1{,}0)\,. \end{aligned}$$

Die Einflußlinie für V_9 für diese Laststellungen ergibt sich demnach, indem man die A-Linie im $(-2{,}40)$ fachen und die B-Linie im (-1) fachen Maßstabe aufzeichnet und beide Linien (mit Berücksichtigung der Vorzeichen) zusammenlegt.

Dies ist in Fig. 145 geschehen. Die A-Linie ist rechts von Punkt *10* negativ. Das Produkt $A \cdot V_A$ also positiv. Das Produkt $V \cdot V_B$ dagegen ist rechts von Punkt *10* negativ. Die obige Summe stellt also eine Differenz dar. Durch die Art der Auf-

tragung in Fig. 145 ist erreicht, daß diese Differenz direkt abgegriffen werden kann (schraffierte Fläche in Fig. 145). Hiermit ist die Laststellung rechts von *10* erledigt.

Steht die Belastung links von Punkt *8*, so ist

$$V_9 = -B .$$

(Dann wird $U_9 = U_{10} = 0$). Und steht schließlich die Last im Punkt *9*, so wird

$$V_9 = 0 .$$

(Die Last wird dann direkt durch das Auflager aufgenommen.) Insgesamt haben wir also: Von *0—8* die negativ zu nehmende B-Linie, im Punkte *9* die Ordinate Null, und von *10* ab nach rechts der Ausdruck $A \cdot V_A + B \cdot V_B$. Hiernach ist die gesamte V_9-Linie in Fig. 145 von einer Nullachse $A'H'$ aus aufgetragen. (Der Teil rechts von *10* ist von der darüberliegenden schraffierten Fläche übernommen.)

Zusatz 1. Statt durch V_A und V_B hätte man V_9 auch direkt durch das Gleichgewicht des Punktes *9* ausdrücken können: Wenn sich im Punkte *9* keine Last befindet, so lautet der Ausdruck für V_9:

$$V_9 = -B - U_9 \cdot \sin\gamma_9 - U_{10} \cdot \sin\gamma_{10} .$$

Wir bekommen also die Einflußlinie für V_9, indem wir zunächst die B-Linie aufzeichnen und deren Vorzeichen überall umkehren. Dann die U_9-Linie (Fig. 143) mit dem Faktor $\sin\gamma_9$ multiplizieren und von der vorhin aufgezeichneten $(-B)$-Linie subtrahieren. Und schließlich noch die mit $\sin\gamma_{10}$ multiplizierte U_{10}-Linie abziehen. Da die U_9- und U_{10}-Linien einfache Dreiecke sind, so braucht man bei ihnen nur eine Ordinate zu multiplizieren und hat dadurch die ganze Einflußlinie mit dem betreffenden Faktor multipliziert. Auf diese Weise erhält man ebenfalls die Einflußlinie für alle Laststellungen außer im Punkte *9*. Für letztere Laststellung aber ist $V_9 = 0$. Insgesamt ergibt sich also die in Fig. 145 gezeichnete Einflußlinie $[V_9]$, natürlich übereinstimmend mit der Einflußlinie V_9.

Zusatz 2. Da in Wirklichkeit die Fahrbahn nicht direkt in Höhe des Untergurtes, sondern etwas darüber liegt, müssen wir die Vertikale V_9 eigentlich in einen oberen und einen unteren Teil zerlegen. Ein Unterschied zwischen den beiden Teilen besteht natürlich nur dann, wenn der Knotenpunkt *9* selber belastet ist. Und zwar ist für diese Laststellung:

für den oberen Teil von V_9: $S = 0$,

" " unteren " " V_9: $S = -B = -P = -1{,}0$ t.

Für den unteren Teil (vom Punkte B bis zur Fahrbahn) ist also die Einflußlinie V_9 von Fig. 145 insofern abzuändern, als die Ordinate bei 9 nicht gleich Null sondern gleich $-1{,}0$ anzutragen ist.

Allgemein lautet für solche Fälle unsere Regel (§ 22, 8. und 9. Aufgabe): Greift die Belastung nicht an den Endpunkten, sondern inmitten einer Vertikalen an, so ist der obere Teil derselben so zu berechnen, als ob die Last im unteren Knotenpunkte wäre, und umgekehrt.

Hiermit ist auch die Auflagervertikale V_9, die schon oft eine statische Berechnung aufgehalten hat, erledigt.

Zum Schlusse sind die Vertikalen V_{10} und V_{11} gezeichnet: Unter dem Gelenk ist die Spannkraft infolge $G = 1{,}0$ t aufgetragen; ferner unter der Vertikalen selber die Spannkraft, die infolge einer an der Vertikalen hängenden Kraft $P = 1{,}0$ t entstehen würde. Hierdurch sind zwei Ordinaten und somit die ganze Einflußlinie bestimmt.

Somit sind sämtliche Einflußlinien aufgezeichnet und die Brücke kann für jede beliebige Belastung berechnet werden.

Übungsaufgabe. Man bestimme die gebrauchten Hilfswerte mittels Kräfteplans, zeichne die Einflußlinien auf und berechne die Brücke für eine bewegliche Belastung $p = 2{,}5$ t/m.

§ 51.

Beispiel: Einflußlinien für eine Ausleger-Verladebrücke.

Aufgabe: Die Verladebrücke Fig. 146 mit obenliegender Fahrbahn ist mittels Einflußlinien zu berechnen!

Gesamte Länge gleich 26,40 m; Weite der Mittelöffnung gleich 15,40 m; Auskragungen je 5,50 m. Höhe des Trägers $h = 1{,}76$ m; Feldweite gleich 2,20 m. Bewegliche Belastung pro Hauptträger: Zwei Raddrücke von je 5,00 t bei 1,65 m Radstand.

A. Allgemeines.

Ist das System statisch bestimmt? Das in Fig. 146a gezeichnete System ist statisch bestimmt; denn es hat

$$s = 77 \text{ Stäbe und } k = 40 \text{ Knotenpunkte,}$$

so daß die Bedingung der statischen Bestimmtheit:

$$s = 2k - 3$$

erfüllt ist.

Einfacher als durch Abzählen der Stäbe können wir aber die statische Bestimmtheit des Systems aus der Art erkennen,

in der es entstanden ist: Zunächst sind die drei Punkte *0*, *1* und *2* zu einem Dreieck verbunden. Dann ist an *1* und *2* der Knotenpunkt *3* zweistäbig angeschlossen; dann an *1* und *3* der Knotenpunkt *4* usw., zunächst bis Punkt *9*. Von da ab aber fängt das obere Dreieckfachwerk mit seinem ebenfalls zweistäbigen Anschlusse an. Die ganze Konstruktion ist also statisch bestimmt aufgebaut.

Allerdings sind die Stäbe nicht so angeordnet, daß ausschließlich Dreiecke entstehen. Denn wir haben in Fig. 146a auch Polygone mit vier Knotenpunkten. Zwar liegen von diesen je drei in einer Geraden, so daß die Polygone wie Dreiecke aussehen; für die statische Untersuchung sind es aber Vierecke. Durch diesen Umstand werden sich im folgenden einige Schwierigkeiten einstellen, da ja unsere Ableitung der Einflußlinien von einem einfachen Dreieckfachwerke ausgegangen und zunächst also auch nur für ein solches eingerichtet ist. Außerdem wird die ganze Berechnung durch die angesetzten Stützen erschwert.

Ein Bedenken besteht weiterhin hinsichtlich der Lagerung, da wir hier meistens nicht ein richtig durchgebildetes festes oder bewegliches Lager haben. Wir wollen aber davon absehen und die Berechnung so durchführen, als ob das eine Lager fest und das andere beweglich wäre. Solange es sich nur um vertikale Lasten handelt, treten bei beiden Lagern nur vertikale Auflagerdrücke auf. Dann braucht kein Unterschied zwischen den beiden Lagern gemacht zu werden.

B. Untersuchung der Stützen.

Wenn wir, um das Fachwerk zum Beispiel mittels Kräfteplan zu untersuchen, am Auflager *A* anfangen, so zeigt sich, daß wir schon an den Punkten *1* oder *2* nicht weiterkommen, da hier mehr als zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sind. Dieses kommt eben daher, weil die Stäbe kein einfaches Dreieckfachwerk bilden.

In § 22, Fig. 81c, haben wir dieses Stützensystem bereits vollständig untersucht. Damals hatte sich folgendes Resultat ergeben, das wir jetzt ohne weiteres auf das vorliegende Bockgerüst übertragen können: Solange die äußere Kraft nur an der Spitze der Stütze angreift, sind sämtliche Füllungsstäbe spannungslos. (Vgl. § 22, 18. Aufgabe). In Fig. 146a (rechte Seite) sind also bei den Füßen die Zwischenstäbe *a*, *a'*, *b*, *b'*, *c*, *d* und *d'* sämtlich spannungslos, und nur die Stäbe *S*

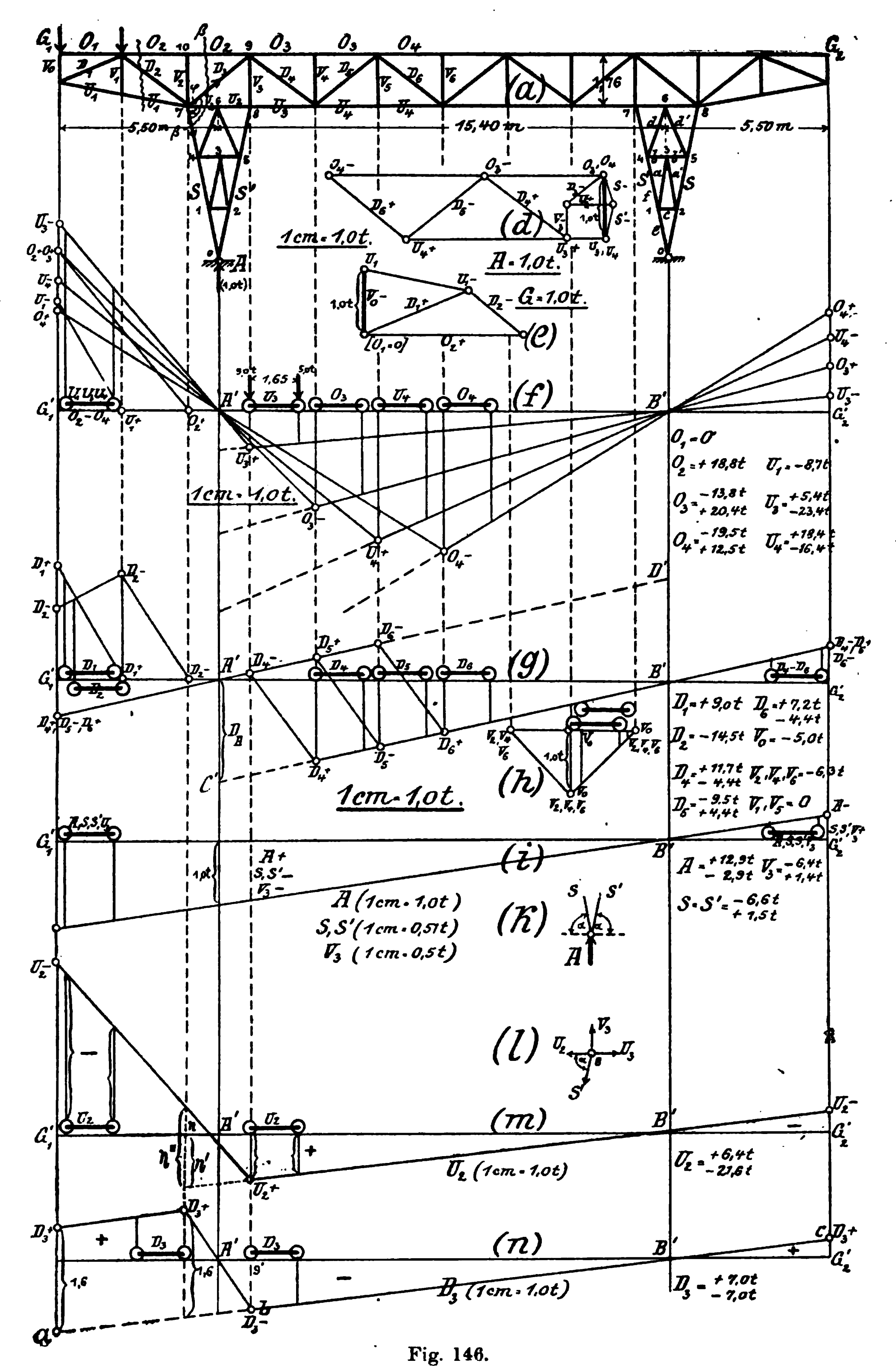


Fig. 146.

und S' erhalten Spannung. Diese Stäbe haben demnach auf der ganzen Länge *0—7* bzw. *0—8* die gleiche Spannkraft; sie können auf diese Länge als ohne Knotenpunkt durchlaufend angesehen werden.

Ferner ist ersichtlich: Da die Stäbe d und d' spannungslos sind, haben die beiden mit U_2 bezeichneten Untergurtstäbe des Parallelträgers (Fig. 146a, linke Hälfte) stets dieselbe Spannkraft. Diese beiden Stäbe können also im folgenden als *ein*, vom Punkt *7* bis Punkt *8* ohne Unterbrechung durchlaufender, Stab behandelt werden.

C. Einflußlinien für den oberen Teil.

Da in Fig. 146 eingehängte Träger nicht vorhanden sind, fallen die in Fig. 141 mit $\overline{G_1'H'}$ resp. $\overline{G_2'J'}$ bezeichneten Teile der Einflußlinien fort. Im übrigen bleibt die Untersuchung natürlich dieselbe.

I. Ermittlung der Hilfswerte.

Wir nehmen den Auflagerdruck A in der Größe von 1,0 t an und bestimmen für diesen Zustand die Spannkräfte. Hierzu ist diesmal ein Kräfteplan gezeichnet (Fig. 146d). Die Stäbe O_1, O_2, U_1, D_1, D_2, V_0, V_1 und V_2 des überkragenden Teiles werden bei diesem Belastungszustand gleich Null, wie aus dem Gleichgewicht der Knotenpunkte ohne weiteres folgt. Wir fangen also bei Punkt *o* an, ermitteln die Stäbe S und S' (die Füllungsstäbe der Strebe sind gleich Null), dann D_3 und U_2, V_3 und U_3 usw. Es genügt, den Plan bis zur Trägermitte zu zeichnen.

Dann wird im äußersten Punkte, in G_1, eine Last von 1,0 t angenommen und für diesen Belastungszustand ein Kräfteplan für die Stäbe des Kragarmes gezeichnet (Fig. 146e).

Die Hilfswerte $D_{P'}$ brauchen wir für den mittleren Teil nicht, da dieser ein Parallelträger ist $(D_{P'} = D_A)$. Beim äußeren Teile werden wir $D_{P'}$ nur für die eine Diagonale D_3 brauchen.

II. Aufzeichnen der Einflußlinien.

1. Gurtstäbe.

Nachdem somit die erforderlichen Hilfswerte bestimmt sind, sind in Fig. 146f die Einflußlinien für die Ober- und Untergurtstäbe dargestellt. Bei den Stäben des mittleren Teiles (Stäbe O_3, O_4, U_3, U_4) werden von einer Nullachse $A'B'$ aus die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t auf der Vertikalen durch A' aufgetragen, dann die betreffenden Bezugspunkte hinuntergelotet, hierdurch die Spitzen der Dreiecke bestimmt und dann schließlich deren Seiten geradlinig über A' und B' hinaus verlängert. Bei den

Gurtstäben des überkragenden Teiles (Stäbe O_1, O_2, U_1) werden von der Nullachse aus auf der Vertikalen durch G_1' die Spannkräfte infolge $G_1 = 1{,}0$ t aufgetragen, die Bezugspunkte der Stäbe hinuntergelotet, hierdurch die Nullpunkte der Einflußlinien bestimmt und dann die betreffenden Dreiecke gezeichnet.

[Da es sich nur um wenige Stäbe handelt, konnten in Fig. 146f sämtliche Einflußlinien gemeinschaftlich von ein und derselben Nullachse aus aufgetragen werden, ohne daß die Zeichnung undeutlich wurde. Die Bezeichnung ist so geschehen, daß in den Punkten, in denen eine Einflußlinie anfängt, abknickt oder aufhört, der betreffende Stab hinzugeschrieben ist, und zwar mit dem Vorzeichen, das die Einflußlinie an dieser Stelle hat.]

Der Stab U_2 nimmt unter den Gurtstäben eine besondere Stellung ein, da er nicht mehr zu dem aus einfachen Dreiecken gebildeten Teile gehört. Ein Schnitt durch U_2 trifft außer diesen Stab noch drei andere Stäbe, so daß sich für U_2 kein Bezugspunkt zum Aufstellen einer *Ritter*schen Momentengleichung angeben läßt.

Um die Einflußlinie für U_2 zu finden, betrachten wir zunächst die Stellungen rechts vom Punkte *9*. Für diese Laststellungen ist der linke Teil bis einschließlich Stab O_2 spannungslos. Es läßt sich also U_2 direkt durch den Auflagerdruck A ausdrücken (z. B. nach *Ritter* oder mittels eines von A aus gezeichneten Kräfteplanes); d. h. für alle Laststellungen rechts von *9* ist U_2 direkt proportional dem Auflagerdruck A. Wir finden also diesen Teil der Einflußlinie, indem wir die A-Linie im $U_{2(A)}$fachen Maßstabe zeichnen (Fig. 146 m).

Steht nun die Last $P = 1{,}0$ t im Knoten *10*, so ist U_2 abhängig von dem Auflagerdruck A und der Last P. In Wirklichkeit sind diese beiden Ursachen gleichzeitig vorhanden. Wir betrachten aber für die Rechnung zunächst A, dann P und addieren nachträglich beide Wirkungen.

Die Wirkung von A, für sich betrachtet, ist in Fig. 146 m dargestellt durch die Ordinate η' (Verlängerung der $A \cdot U_A$-Linie). Da U_A positiv ist, ist auch η' positiv.

Die Wirkung von P, für sich betrachtet, läßt sich ebenfalls einfach ermitteln. Wenn nämlich A ausgeschaltet ist, ist der ganze Fuß spannungslos. Wir erhalten also aus dem Schnitte β—β für diesen Teilzustand die Spannkraft (Bezugspunkt *9* für die Momente):

$$U_2 = -P \cdot \frac{\lambda}{h} = -1{,}0 \cdot \frac{2{,}20}{1{,}76} = -1{,}25 \text{ t}$$

[λ = Abstand *10*—*9*, h = Trägerhöhe].

Nun zählen wir die Wirkung von A und die von P wieder zusammen. Die erstere (positiv) ist in Fig. 146 m bereits durch die Strecke η' dargestellt. Daran setzen wir, und zwar so, daß sie sich subtrahiert, die Strecke $\eta'' = -1{,}25$. Die resultierende Strecke η gibt dann die endgültige Spannkraft des Stabes U_2 bei Laststellung im Punkte *10* an.

Durch diese Ordinate η ist weiterhin der ganze noch fehlende linke Teil der U_2-Linie festgelegt. Man beachte, daß diese Einflußlinie bei A' nicht die Ordinate Null hat. Das heißt, eine in der Mitte des Feldes *10—9* stehende Last bringt im Stabe U_2 eine Spannkraft hervor.

2. Auflagerdruck und Stützenstäbe.

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A ist in Fig. 146i gezeichnet.

Aus der A-Linie ergeben sich weiterhin die Einflußlinien für die Stäbe S und S'. Aus dem Gleichgewicht des Punktes *0* folgt nämlich (Fig. 146k):

$$S = S' = -\frac{1}{2}\,\frac{A}{\sin\alpha}\,.$$

Nach der Systemfigur ist $\sin\alpha = 0{,}98$. Somit wird

$$S = S' = -0{,}51\,A\,.$$

Die Einflußlinie für A kann also auch als Einflußlinie für S und S' benutzt werden; nur müssen die Ordinaten nicht im Maßstabe 1 cm = 1,0 t, sondern 1 cm = 0,51 t abgemessen werden. Außerdem sind die Vorzeichen zu vertauschen (Fig. 146i).

3. Füllungsstäbe (des oberen Teiles).

a) Bei den Diagonalen wurden für D_4, D_5, D_6 zunächst die Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t aufgetragen (Fig. 146g). Diese Werte sind, abgesehen vom Vorzeichen, einander gleich, da es sich um einen Parallelträger handelt. Der Bezugspunkt für die Diagonalen D_4, D_5 und D_6 liegt im Unendlichen. Deshalb sind in Fig. 146g die Linien $C'B'$ und $A'D'$ einander parallel. Man kommt also mit dem Auftragen des einen Wertes D_4 aus und hat in den betreffenden Feldern nur noch die Abschrägungen einzuzeichnen.

Bei der Diagonalen D_1 wurde die Spannkraft infolge $G_1 = 1{,}0$ t aufgetragen (Kräfteplan Fig. 146e) und die Abschrägung eingezeichnet. (Bei diesem Stabe besteht der Teil links vom Schnitt nur aus dem einen Belastungspunkte G_1.)

Bei der Diagonalen D_2 wurde zunächst ebenfalls die Spann-

kraft infolge eines Gelenkdruckes von 1,0 t aufgetragen. Dann wurde, da der Bezugspunkt von D_2 ziemlich ungünstig liegt, in dem unmittelbar links vom Schnitte befindlichen Knotenpunkte eine Last von 1,0 t angenommen, die hierbei im Stabe D_2 entstehende Spannkraft $D_{P'}$ ermittelt und diese unter der Laststellung als Ordinate der Einflußlinie aufgetragen. Auf diese Weise läßt sich auch D_2 leicht bestimmen. (Die Berechnung von $D_{P'}$ führe der Leser selber aus.)

Die Diagonale D_3 muß besonders behandelt werden: Wir betrachten das Gleichgewicht des links vom Schnitte β—β liegenden Teiles, und zwar benutzen wir die Gleichgewichtsbedingung $R_y = 0$. Steht dann die bewegliche Last $P = 1,0$ t rechts vom Schnitte, auf der Strecke $\overline{9-G_2}$, so ist:

$$R_y = +D_3 \sin\varphi - S \sin\alpha = 0\,,$$

$$D_3 = +S\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = +S\frac{0,98}{0,625}\,,$$

$$D_3 = +S\cdot 1,57\,.$$

Wir tragen also die Einflußlinie für S (Fig. 146i) im 1,57 fachen Maßstabe auf (Linie $\overline{abB'c}$ in Fig. 146n) und benutzen von dieser das Stück von $9'$ bis G_2'. Das Vorzeichen ist dasselbe wie bei S.

Tritt nun die Last $P = 1,0$ t links vom Schnitt β—β, so wird

$$R_y = +D_3 \sin\varphi - S\sin\alpha - 1,0\text{ t} = 0\,;$$

$$D_3 = +S\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} + \frac{1,0}{\sin\varphi}\,,$$

$$D_3 = +S\cdot 1,57 + 1,6\,.$$

Wir müssen also zu dem Beitrag $+S\cdot 1,57$ noch den Wert $+1,6$ t hinzufügen. In Fig. 146n wurden vorhin die negativen Ordinaten nach unten und die positiven nach oben aufgetragen. Wir müssen also jetzt von dem Werte $+S\cdot 1,57$ (der eine negative Zahl darstellt, da S für diese Laststellungen negativ ist) den positiven Beitrag $+1,6$ nach oben hin abtragen. Dann zeichnen wir für das durchschnittene Feld selber noch die gerade Verbindungslinie der Ordinaten-Endpunkte ein und haben die gesamte Einflußlinie für D_3.

b) Bei den Vertikalen ergibt sich aus dem Gleichgewicht der betreffenden Knotenpunkte, daß V_1 und V_5 stets spannungslos sind. Für V_2, V_4 und V_6 ist die Einflußlinie in Fig. 146h dargestellt: Die Spannkraft der Vertikalen ist gleich $-1,0$ t, wenn die Last $P = 1,0$ t direkt in dem betreffenden Knotenpunkte steht,

und sie wird gleich Null, wenn die Last P über den linken oder rechten Knotenpunkt hinausrückt. Für die erste Vertikale, V_0, gilt die Hälfte der Fig. 146h.

Die Vertikale V_8 wird aus dem Gleichgewicht des Knotenpunktes 8 bestimmt. Aus diesem ergibt sich (wenn wir zunächst sämtliche Stäbe als positiv einführen):

$$R_y = + V_8 - S' \sin\alpha = 0\,;$$

hieraus

$$V_8 = + S' \sin\alpha\,.$$

V_8 ist also stets gleich der mit $\sin\alpha$ multiplizierten Spannkraft S' und hat auch stets dasselbe Vorzeichen wie S'. Nun hatten wir vorhin gefunden:

$$S' = -0{,}51\,A\,.$$

Wir erhalten also:

$$V_8 = + (-0{,}51\,A) \sin\alpha = + (-0{,}51\,A) \cdot 0{,}98$$
$$= -0{,}5\,A\,.$$

Dieses Resultat konnte man auch direkt hinschreiben. Denn V_8 muß gleich der vertikalen Seitenkraft von S' sein, und diese ist gleich der Hälfte des Auflagerdruckes A. Wir können also für V_8 die Einflußlinie für A benutzen; nur müssen wir die Vorzeichen umändern und als Maßstab nicht 1,0 cm = 1,0 t, sondern 1,0 cm = 0,5 t nehmen.

III. Auswerten der Einflußlinien.

Nachdem nun sämtliche Einflußlinien gefunden sind, wurde zu jeder derselben die aus zwei Raddrücken von je 5,0 t bestehende Belastung eingezeichnet. Das eine Rad muß stets da stehen, wo die größte Ordinate ist. Hiernach ist dann für jeden Stab die maßgebende Stellung leicht zu finden. Bei Belastung der Kragarme ist zu beachten, daß das äußere Rad aus Konstruktionsgründen nur bis zu einer gewissen Strecke vor das Ende des Trägers gelangen kann. Zu den Laststellungen wurden in Fig. 146 die Stäbe hinzugeschrieben, für die die betreffende Stellung maßgebend ist; dann wurden die Ordinaten abgemessen, mit 5,0 multipliziert und die hierdurch erhaltenen Spannkräfte zusammengestellt. Somit ist jeder Stab für die vorgeschriebene bewegliche Belastung berechnet.

IV. Bemerkung hinsichtlich nicht-einfacher Systeme.

Auch bei diesem Beispiele hat sich gezeigt, daß unsere einfachen Regeln für die Stabberechnung natürlich ohne weiteres nur für den Fall passen, für den sie abgeleitet sind, nämlich für das einfache Dreieckfachwerk. Ist das Fachwerk ein nicht-einfaches, wie im vorliegenden Falle in dem Teile über den Auflagern, so erfordert die Berechnung besondere Überlegung. Dann kann man für die Stabkräfte nicht mehr einfache Formeln aufstellen, die sich leicht graphisch darstellen lassen, sondern man muß häufig einen Stab durch andere Stäbe ausdrücken und dann deren Einflußlinien kombinieren.

In Abschnitt V werden wir uns besonders mit nicht-einfachen Systemen bei beweglicher Belastung beschäftigen und einige allgemeine Regeln ableiten, durch die auch bei diesen Systemen das Aufzeichnen der Einflußlinien wesentlich erleichtert wird. Derartige Umwege, wie wir sie zur Bestimmung der Stäbe U_2, D_2, V_2 machen mußten, werden dann nicht mehr nötig sein.

§ 52.

Analytische Berechnung von Gerberschen Fachwerkbrücken.

Wenn man erst aus den Einflußlinien weiß, in welcher Weise die einzelnen Stäbe bei wechselnder Belastung beansprucht werden, kann man die eigentliche Berechnung der Stabkräfte auch in analytischer Weise durchführen. Namentlich wird dies bei gleichmäßig verteilter Belastung zweckmäßig sein.

I. Stäbe des Teiles zwischen den Lagern *A*—*B* (vgl. Fig. 141 d—g).

1) Zunächst berechnen wir diese Stäbe so, als ob die Kragarme überhaupt nicht vorhanden wären. Hierbei erhalten wir im Obergurt Druck, im Untergurt Zug, in einem Füllungsstabe im allgemeinen einen größten Zug und einen größten Druck.

2) Dann belasten wir den linken Kragarm nebst eingehängtem Träger und erhalten für einen Obergurtstab (des Teiles *A*—*B*) Zug, für einen Untergurtstab Druck, und für einen Füllungsstab entweder Zug oder Druck.

3) Schließlich belasten wir die rechte Kragseite und erhalten für einen Obergurtstab Zug, für einen Untergurtstab Druck, für einen Füllungsstab Druck oder Zug.

Nun kombinieren wir diese drei Fälle und erhalten für jeden Stab den größten Zug und den größten Druck, entsprechend folgendem Schema (vgl. Fig. 141 d—g):

Stab	Größter Zug	Größter Druck
1. Obergurt	Linke und rechte Kragseite voll	Mittlerer Teil voll
2. Untergurt	Mittlerer Teil voll	Linke und rechte Kragseite voll
3a. Füllungsstab, Bezugspunkt innen	Mittlerer Teil voll	Linke und rechte Kragseite voll
	oder umgekehrt	
3b. Füllungsstab, Bezugspunkt außen	Rechtsseitige Teilbelastung und linke Kragseite voll	Linksseitige Teilbelastung und rechte Kragseite voll
	oder umgekehrt	

Indem man also der Reihe nach den mittleren Teil und dann die Kragteile belastet, ergibt sich für jeden Stab die größte Spannkraft. Der Fall, daß z. B. der linke Kragteil belastet ist, ist sehr einfach zu erledigen, weil dann sämtliche Momente des mittleren Teiles durch den Auflagerdruck B gegeben sind. Auf diese Weise geht die Berechnung derartiger Konstruktionen schnell vonstatten.

II. Stäbe der Kragarme.

Wir nehmen Vollbelastung des Kragarmes und des anschließenden eingehängten Trägers. Diese Belastung ist maßgebend für Obergurt, Untergurt und für diejenigen Füllungsstäbe, deren Bezugspunkt außerhalb des Gelenkes liegt. Für die übrigen Füllungsstäbe wird der Bezugspunkt hinuntergelotet, hierdurch die Lastscheide bestimmt und nun die Belastung einmal links und einmal rechts von der Lastscheide aufgestellt. Für Füllungsstäbe mit Bezugspunkt innen muß also zweimal gerechnet werden, entsprechend den beiden verschiedenen Spannkräften (Zug und Druck), die ein solcher Stab erfährt.

Auch bei Einzellasten läßt sich die analytische Berechnung durchführen. Namentlich beachte man, daß für die Stäbe zwischen A und B der links von A und rechts von B liegende Teil der Einflußlinie stets ein Dreieck $A'H'G_1'$ bzw. $B'J'G_2'$ mit der Spitze unter dem Gelenke bildet. Aus dieser Übereinstimmung der Form der Einflußlinien folgt, daß alle Stäbe der Öffnung $A-B$ hinsichtlich der Belastung der Kragöffnungen ein und dieselbe ungünstigste Laststellung haben. Und zwar ist der Einfluß dieser Lasten proportional der Höhe des Dreieckes.

Abschnitt IV.

Besondere Methoden für den Dreigelenkbogen.

7. Vortrag:

Allgemeine Untersuchung und Berechnung für ständige Belastung.

§ 53.

Allgemeines.

Unsere bisherigen Untersuchungen haben sich in der Hauptsache auf solche Systeme erstreckt, die ein festes und ein bewegliches Lager haben (statisch bestimmte Lagerung). Auch wenn mehrere Träger zu einem System verbunden wurden (*Gerber*sche Träger), war die Anordnung so getroffen, daß jeder der einzelnen Träger an einem Ende fest und am anderen verschieblich gestützt war.

Diese Bauart hat bekanntlich den großen Vorteil, daß die Auflagerdrücke sich in einfacher Weise durch bloße Anwendung der drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik bestimmen lassen. Da in diesen Gleichungen nur die äußeren Kräfte (nach Größe, Richtung und Lage) und die Abmessungen des Trägers vorkommen, so hängen die Auflagerkräfte auch nur von diesen Werten ab. Andere Einflüsse, z. B. Temperaturänderungen oder Nachgeben der Widerlager, erzeugen bei dieser Stützungsart keine Auflagerkräfte. Dieses lehrt der Augenschein, da ja der Träger infolge der beweglichen Lagerung allen Einflüssen frei folgen kann. Es kommt auch mathematisch zum Ausdruck, da in den zur Ermittlung der Auflagerdrücke aufgestellten Gleichungen die obigen Einflüsse (Temperatur, Senkung der Stützpunkte) gar nicht vorkommen.

Betrachten wir nun im Gegensatz hierzu eine Konstruktion mit zwei festen Lagern, „Zweigelenkbogen". Jetzt haben wir an jedem Auflager zwei Unbekannte (Größe und Richtung der Auflagerkraft). Im ganzen sind also *vier* Auflagerunbekannte, und zu deren Ausrechnung reichen die *drei* Gleichungen der Statik nicht aus. Das System ist (äußerlich) statisch unbestimmt. (Vgl. auch § 20, Absatz III, Fig. 63b.)

Es soll an dieser Stelle nicht darauf eingegangen werden, wie sich die Auflagerkräfte trotzdem ermitteln lassen; allerdings nur dadurch, daß man das elastische Verhalten der Konstruktion untersucht. Es sei nur darauf hingewiesen, daß in dem Ausdrucke für eine Auflagerkraft jetzt nicht nur die Lasten und die Abmessungen des Bauwerkes, sondern außerdem die *Temperatur* und die eventuelle *Verschiebung der Auflager gegenüber der ursprünglichen Lage* vorkommen. Bei einer derartigen, beiderseitig festen Lagerung werden also auch ohne äußere Lasten, allein durch Temperaturänderungen oder durch Verrücken der Widerlager Auflagerkräfte und somit auch Spannungen im Innern der Konstruktion hervorgerufen. Dieses ist ein großer Nachteil der Trägers mit zwei festen Lagern. Demgegenüber steht allerdings der Vorteil, daß durch die beiderseitig feste Lagerung eine Herabminderung des Materialbedarfes erzielt wird.

Die Gegenüberstellung der Nachteile (schwierige Berechnung, Empfindlichkeit gegenüber Temperatur- und Widerlagsänderungen) und der Vorteile (geringes Gewicht) legt nun den Gedanken nahe, ein System aufzusuchen, das die Vorzüge, nicht aber die Nachteile hat. Dieses System ist der Dreigelenkbogen. Er hat den Vorteil, daß seine Auflagerpunkte ebenfalls fest zusammengehalten sind, wodurch, wie später noch im einzelnen nachgewiesen werden wird, eine bedeutende Materialersparnis gegenüber den fest-beweglich gelagerten Systemen erzielt wird. Andererseits ist er aber auch statisch bestimmt, wie wir ja bereits bei der allgemeinen Untersuchung der Tragwerke erkannt haben (§ 12, Fig. 34).

Natürlich bedarf es besonderer Überlegungen, wie die vorhandenen Hilfsmittel der Berechnung (Gleichgewichtsbedingungen) auf den vorliegenden Fall (Tragwerk mit zwei festen Lagern und Mittelgelenk) anzuwenden sind. Immerhin müssen wir zum Ziele kommen, da die Anzahl der Unbekannten nicht größer ist als die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen.

Namentlich lassen sich auch seine Auflagerkräfte einfach berechnen und sind unabhängig von der Temperatur und einem

eventuellen Nachgeben der Auflager. Daß dieses der Fall ist, lehrt der Augenschein, da das System allen Dehnungen und Verschiebungen frei folgen kann. Es wird sich auch mathematisch darin zeigen, daß beim Aufstellen der Gleichungen zur Berechnung der Auflagerkräfte die obigen Einflüsse (Temperatur und Widerlagsverschiebung) gar nicht vorkommen werden.

Allerdings ist durch das Einschalten des Gelenkes eine unangenehme Eigenschaft hervorgerufen: große Erschütterungen bei beweglicher Belastung. Aus diesem Grunde verbietet sich das System z. B. bei größeren Eisenbahnbrücken. Außerdem ist es natürlich, wie jede Bogenbrücke, nur dort am Platze, wo sich die festen, zur Aufnahme schräger Kräfte geeigneten Auflagerpunkte ohne große Umstände schaffen lassen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir zur Berechnung des Systems übergehen, und zwar werden wir zunächst einige allgemein gültige Methoden für den Dreigelenkbogen und dann noch einige besondere Methoden für bewegliche Belastung ableiten.

§ 54.

Graphische Bestimmung der Auflagerkräfte.

1. Belastung durch eine Kraft.

a) Die Auflagerkräfte A und B. Auf den Dreigelenkbogen Fig. 147a wirke eine Kraft P. Die Auflagerkräfte bei A und B sollen bestimmt werden!

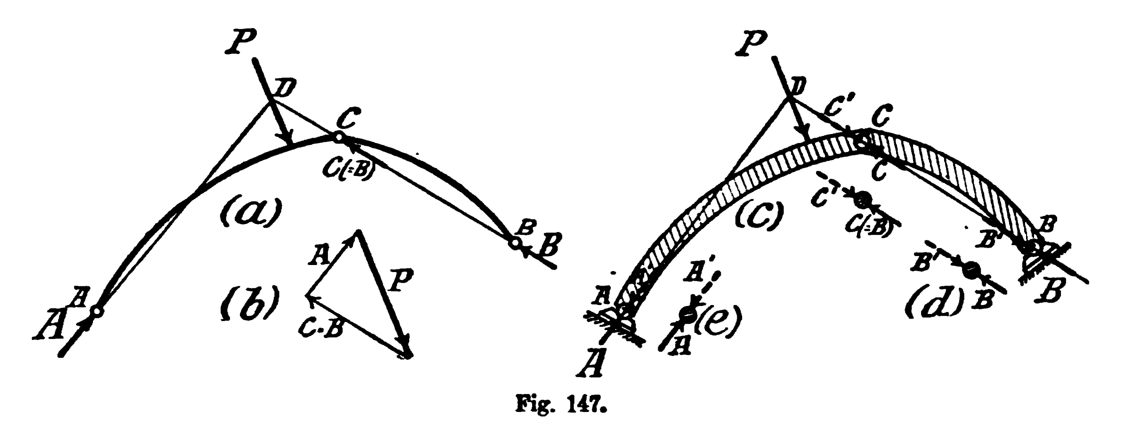


Fig. 147.

Da wir bei A und bei B feste Kipplager haben, läßt sich zunächst weder über die Größe noch über die Richtung der Auflagerkräfte etwas aussagen. Die Größe ist natürlich unbekannt. Aber

auch die Richtung ist zunächst vollständig unbestimmt, da ja ein *festes* Lager jede beliebig gerichtete Auflagerkraft erzeugen kann.

Aus dem Vorhandensein des Mittelgelenkes C ergibt sich aber folgendes: Der Körper BC ist im Punkte C gegen den anderen Körper AC gestützt und bei B durch die äußere Kraft B beansprucht. Sonstige Kräfte greifen nicht an. Im allgemeinen würde eine Kraft B eine Bewegung um den Punkt C herbeiführen. Nur in einem Falle würde diese Bewegung nicht eintreten, nämlich wenn die Richtung der Kraft B durch den Stützpunkt C hindurchgeht. Dann findet keine Drehung statt, und der Körper BC bleibt in Ruhe. Dieser Fall liegt aber gerade bei uns vor, denn jeder Teil des Dreigelenkbogens bleibt ja unter der einwirkenden Belastung in Ruhe. Somit können wir folgern, daß die Auflagerkraft B diese eine, das Gleichgewicht ermöglichende Richtung durch den Punkt C haben muß. Hierdurch ist die *Richtung* von B bestimmt.

Nun betrachten wir den Körper AC. An diesem greifen an 1. die bekannte Kraft P, 2. die nach Größe und Richtung unbekannte Kraft A und 3. diejenige Kraft, die im Punkte C durch Vermittlung des Mittelgelenkes von dem Körper BC auf den Körper AC ausgeübt wird. Diese Kraft in C ist ebenso groß und ebenso gerichtet wie die Auflagerkraft B; denn letztere wird, da am Körper BC keine weiteren Kräfte wirken, unverändert nach Punkt C übertragen. Die Kraft B haben wir soeben der Richtung nach bestimmt. Somit ist auch die Richtung des Gelenkdruckes C gegeben. Wir haben also am Körper AC zwei Kräfte (C und P), die der Richtung nach bekannt sind, und eine Kraft (A), die der Richtung nach unbekannt ist. Nun wissen wir aus den Lehren der Mechanik, daß drei Kräfte einen Körper nur dann im Gleichgewicht halten, wenn sie sich in *einem* Punkte schneiden (vgl. Band I, § 13, Fig. 34). Wenn wir also die beiden, der Richtung nach bekannten Kräfte C und P zum Schnitte bringen, so muß die dritte Kraft ebenfalls durch diesen Schnittpunkt D hindurchgehen. Hierdurch ist die *Richtung* von A bestimmt.

Es bleiben noch übrig zu bestimmen die *Größen* der Kräfte A und C. Diese ergeben sich nun aus der Bedingung, daß P, A und C ein Kräftedreieck bilden müssen (Fig. 147b). Da der Auflagerdruck B gleich dem Gelenkdruck C ist, ist hiermit auch B bestimmt. Somit haben wir die gesuchten Auflagerkräfte A und B nach Richtung und Größe gefunden.

Die Reihenfolge der Überlegungen war die, daß wir zunächst die *Richtung* von B aus dem Gleichgewicht des Teiles BC bestimmten und dann die *Richtung* von A und die *Größen* von A und B ($= C$) aus dem Gleichgewicht des Teiles AC fanden. Wir können die ganze Untersuchung in Fig. 147a und b auch so auffassen, daß wir die Auflagerkräfte eines Trägers AC ermitteln, der durch P belastet ist, bei A ein festes Lager hat und bei C durch den schrägen Auflagerstab $\overline{BC}$ gestützt ist.

Die bei A und B wirkenden Auflagerdrücke nennt man die „*Kämpferdrücke*“ des Bogens.

b) Die Beanspruchung der Gelenkbolzen. Nach Bestimmung der Auflagerkräfte wollen wir noch etwas auf die Beanspruchung der Gelenkbolzen eingehen. In Fig. 147c sind die Gelenke etwas deutlicher dargestellt. Die Auflagerkraft B ist in Fig. 147c so eingezeichnet, wie sie auf den Teil BC einwirken muß, um diesen im Gleichgewicht zu halten. Im einzelnen kommt diese Einwirkung dadurch zustande, daß die Kraft B zunächst von der Lagerplatte auf den Bolzen ausgeübt wird und dann von diesem auf den Trägerteil BC weiter übertragen wird. Umgekehrt übt, nach dem Grundsatz von Wirkung und Gegenwirkung, der Teil BC auf den Bolzen eine Kraft aus, die ebenso groß wie die Kraft B, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Im ganzen wirken also auf den Bolzen die beiden Kräfte B und B' ein (Fig. 147d), und zwar rührt die erste von der Auflagerplatte und die andere vom Teile CB her. Für diese Belastung ist dann der Bolzen auf Leibungsdruck zu berechnen, so wie der Zapfen eines gewöhnlichen Kipplagers.

In Fig. 147 sind auch die auf die Bolzen A und C einwirkenden Kräfte gezeichnet. Man mache sich klar, daß auf jeden Bolzen stets zwei gleichgroße Lasten wirken, die von den beiden den Bolzen berührenden Konstruktionsteilen herrühren. Dann kann über die Beanspruchung eines solchen Bolzens kein Zweifel sein.

2. Belastung durch zwei Kräfte.

a) Die Auflagerkräfte A und B. Nun wollen wir den Fall betrachten, daß ein Dreigelenkbogen durch *zwei* äußere Kräfte, P_1 und P_2, beansprucht ist (Fig. 148). Um diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen, werden wir jede der beiden Lasten für sich allein untersuchen.

Die Auflagerdrücke und der Gelenkdruck, die von P_1 herrühren, mögen mit A_1, B_1 und C_1 bezeichnet werden. Um diese Kräfte zu finden, ziehen wir (entsprechend Fig. 147a) die Linie BC,

bestimmen den Punkt D_1 auf der gegebenen Last und verbinden A mit D_1. Nun zeichnen wir (Fig. 148b) $P_1 = ab$, ziehen durch Anfangs- und Endpunkt von P_1 Parallele zu BD_1 und AD_1 und erhalten:

$$\overline{bc} = \text{Gelenkdruck } C_1 = \text{Auflagerdruck } B_1 ,$$
$$\overline{ca} = \text{Auflagerdruck } A_1 .$$

Somit ist der Einfluß der Last P_1 ermittelt.

Dasselbe geschieht nun mit der Last P_2. Wir bestimmen zunächst den Punkt D_2, tragen dann $P_2 = bd$ auf, ziehen die

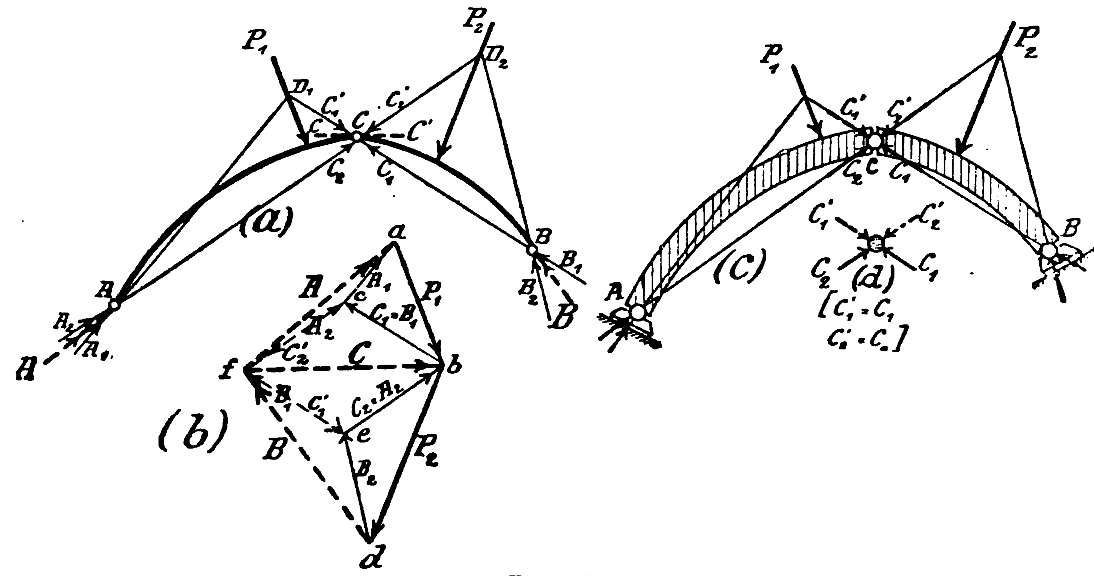


Fig. 148.

Parallelen zu AD_2 und BD_2 und finden die durch P_2 hervorgerufenen Auflagerdrücke resp. Gelenkdrücke A_2, B_2 und C_2:

$$\overline{eb} = \text{Gelenkdruck } C_2 = \text{Auflagerkraft } A_2 ,$$
$$\overline{de} = \text{Auflagerkraft } B_2 .$$

Somit ist der Einfluß der Last P_2 ermittelt.

Nun setzen wir die Wirkungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 zusammen. Am Punkte A haben wir die Auflagerkräfte A_1 und A_2. Die Resultierende aus diesen beiden Kräften ist die endgültige Auflagerkraft infolge P_1 und P_2. Sie werde A genannt. Um sie zu finden, tragen wir in Fig. 148b die Kraft A_2 an A_1 an (in Fig. 148b punktiert gezeichnet) und zeichnen die Linie A. Letztere ist dann die Resultierende aus A_1 und A_2, d. h. der Gesamtauflagerdruck am Punkte A.

In derselben Weise finden wir den Gesamtauflagerdruck B am Auflager B.

b) Der Gelenkdruck C. Beim Mittelgelenk haben wir die vier in Fig. 148c und d eingezeichneten Kräfte. Betrachten wir z. B. den Teil AC, so werden von diesem die beiden Kräfte C_2 und C_1' ausgeübt (letztere als Gegenkraft der zunächst bestimmten Kraft C_1). Nun ist in Fig. 148b die Kraft C_2 dargestellt durch die Strecke $\overline{eb}$; C_1' durch die Strecke $\overline{fe}$ (mit punktiert gezeichneter Pfeilrichtung). Die Resultierende C aus diesen beiden Drücken ergibt sich also gleich der Verbindungslinie $\overline{fb}$. Entsprechend ergibt sich die gleichgroße Resultierende C' der von dem Teile BC auf den Bolzen ausgeübten Drücke dargestellt durch die Strecke $\overline{bf}$. Hiermit sind die für die Berechnung der Bolzen erforderlichen Belastungen ermittelt.

c) Regel beim Aufzeichnen. Beim Aufzeichnen von Fig. 148b merke man sich: Wir haben die Lasten in der Reihenfolge $P_1 .. P_2$, also rechtsherum am Umfange des Bogens, aufgetragen. Dann müssen wir auch die Kräftedreiecke abc und bde so aufzeichnen, daß die Lasten rechtsherum aufeinander folgen; also $P_1—B_1—A_1$ und $P_2—B_2—A_2$.

3. Belastung durch beliebig viele Kräfte.

Zum Schlusse untersuchen wir den Fall, daß der Bogen durch beliebig viele Kräfte belastet ist (Fig. 149). Diese Aufgabe führen

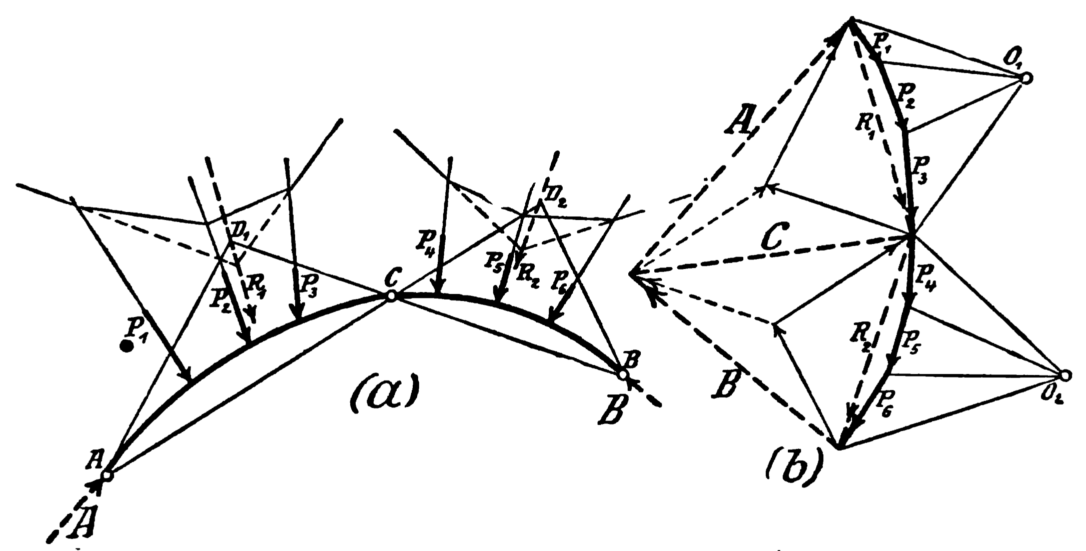


Fig. 149.

wir auf die vorige zurück, indem wir die auf den Teil AC wirkenden Kräfte zu einer Resultierenden R_1, und die auf den Teil BC wirkenden Kräfte zu einer Resultierenden R_2 zusammensetzen. In Fig. 149 ist diese Zusammensetzung mittels Seilpolygone geschehen. Das Seilpolygon mit dem Pole O_1 dient zur Bestimmung von R_1, und das Polygon mit dem Pole O_2 zur Bestimmung von R_2. Jetzt haben wir es nur mit zwei Kräften, nämlich R_1 und R_2, zu tun. Zu diesen Kräften ermitteln wir dann die Auflagerkräfte und den Mittelgelenkdruck in der vorhin besprochenen Weise.

§ 55.

Analytische Bestimmung der Auflagerkräfte.

I. Mechanische Grundlagen.

1. Gegenüberstellung der Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen.

In Fig. 150 sind zwei Körper I und II gezeichnet, die bei A und B gelenkig gelagert und bei C durch ein Mittelgelenk miteinander verbunden seien. Also ein Dreigelenkbogen. Wir wollen

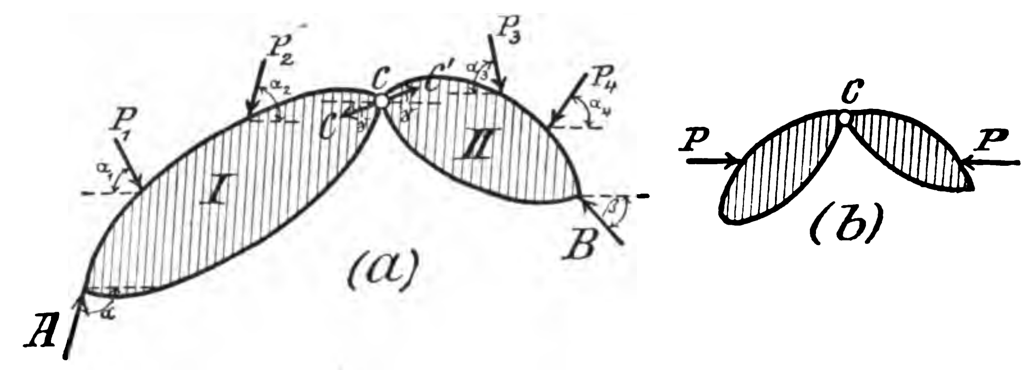


Fig. 150.

nun untersuchen, wieviel unbekannte Kräfte hier auftreten und wieviel Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen.

An *Unbekannten* haben wir die beiden Kämpferdrücke A und B und den Mittelgelenkdruck C. Bei jedem dieser Drücke sind unbekannt Größe und Richtung. Also $3 \cdot 2 = 6$ Unbekannte.

An *Gleichungen* stehen zur Verfügung: Die Scheibe I stellt einen starren Körper dar, der durch die angreifenden Kräfte A, P_1, P_2 und Gelenkdruck C im Ruhezustand gehalten wird. Folglich können wir die bekannten drei Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Kräften aufstellen. Desgleichen können wir am Körper II

drei Gleichungen aufstellen. Insgesamt haben wir somit zwischen allen Kräften $2 \cdot 3 = 6$ Gleichungen aufzustellen.

Also ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte. Auch aus dieser Scheibenbetrachtung hat sich die statische Bestimmtheit der Konstruktion ergeben.

2. Geschickte Aufstellung der Gleichungen.

Nun kommt es darauf an, diese sechs Gleichungen so zu verwenden, daß die Unbekannten sich möglichst bequem berechnen lassen. Hierbei zeigt sich folgendes: Die Gleichungen können zum Teil so aufgestellt werden, daß die Mittelgelenkkraft überhaupt nicht vorkommt. Und zwar wird diese Vereinfachung dadurch erreicht, daß die beiden Körper I und II wie ein gemeinsamer, im Ruhezustand befindlicher Körper behandelt werden.

Nehmen wir beispielsweise die Gleichgewichtsbedingung: Summe der Horizontalprojektionen gleich Null. Diese lautet bei Körper I (mit den Kräften A, P_1, P_2 und Gelenkdruck C):

$$(1)\qquad +A \cdot \cos\alpha + P_1 \cdot \cos\alpha_1 - P_2 \cdot \cos\alpha_2 - C \cdot \cos\gamma = 0\,.$$

Bei Körper II würde diese Bedingung lauten:

$$(2)\qquad -B \cdot \cos\beta - P_4 \cdot \cos\alpha_4 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + C' \cdot \cos\gamma = 0\,.$$

Nun ist aber in diesen beiden Gleichungen die Kraft C ebenso groß wie die Kraft C', da es sich ja um den Druck ein und desselben Bolzens, dargestellt in seiner Wirkung auf die beiden anschließenden Körper, handelt. Wenn wir also die beiden Gleichungen addieren, so heben sich die Glieder mit C, C' fort und wir erhalten eine neue Gleichung:

$$(3)\quad +A \cdot \cos\alpha + P_1 \cdot \cos\alpha_1 - P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 - P_4 \cdot \cos\alpha_4 - B \cdot \cos\beta = 0\,.$$

Denken wir uns nun, Fig. 150 wäre ein starrer, in sich unbeweglicher Körper, an dem die Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_4 und B angreifen. Dann würde die Gleichgewichtsbedingung: Summe der Horizontalprojektionen, genau so lauten wie die vorhin erhaltene Gleichung (3). Eine entsprechende Übereinstimmung würde sich ergeben, wenn wir eine andere Gleichgewichtsbedingung, z. B. $\Sigma M = 0$, für die beiden Körper zunächst einzeln angeschrieben und dann addiert hätten. Insgesamt haben wir somit das Resultat: Sind zwei Körper I und II nicht starr, sondern durch ein Gelenk miteinander verbunden, so können wir entweder getrennt für jeden der beiden Körper die Gleichgewichtsbedingungen anschreiben, oder aber wir können auch die beiden Körper wie einen starren Körper behandeln und für diesen die Gleichgewichtsbedingungen

anschreiben. Im letzteren Falle darf dann die im Mittelgelenk wirkende Kraft überhaupt nicht mit aufgeführt werden. (Sie erscheint gewissermaßen als innere Kraft dieses starren Körpers I, II.)

Wir haben also verschiedene Wege, wie wir die zur Verfügung stehenden sechs Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten verwenden können.

II. Berechnung der Auflagerkräfte bei gleich hohen Kämpfern.

Der Einfachheit wegen wollen wir zunächst den Fall betrachten, daß die beiden Lagerpunkte des Dreigelenkbogens in gleicher Höhe liegen.

1. Entwicklung von A, B und C.

a) Auflagerdruck A (Fig. 151a und c). Wir zerlegen die Kraft A in die vertikale Seitenkraft V_A und die horizontale Seitenkraft H_A. Diese Seitenkräfte stellen dann die beiden in der Kraft A enthaltenen Unbekannten (Größe und Richtung) dar. Die Kraft H führt die besondere Bezeichnung *„Horizontalschub"* des Bogens.

Um nun V_A auszurechnen, betrachten wir die Körper I, II gemeinsam und stellen in bezug auf den Auflagerpunkt B die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ auf. Hierdurch wird die Gleichung nämlich ganz besonders einfach. Denn, wie vorhin bewiesen, tritt bei der gemeinsamen Betrachtung ber beiden Körper der Mittelgelenkdruck überhaupt nicht in Erscheinung, so daß die Unbekannte C von vornherein ausscheidet. Außerdem ist durch die Wahl des Bezugspunktes erreicht, daß die Kräfte B und H_A das Moment Null ergeben. Die Gleichung $\Sigma M = 0$ lautet also (Fig. 151a):

$$\text{(I)} \qquad V_A \cdot l + H_A \cdot 0 - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 + B \cdot 0 = 0 .$$

Hieraus folgt nach Fortlassung der den Wert Null ergebenden Glieder:

$$\text{(Ia)} \qquad V_A = \frac{1}{l}(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3) .$$

Somit ist die Seitenkraft V_A durch die Lasten P und deren Hebelarme a ausgedrückt.

Die Seitenkraft H_A ergibt sich am einfachsten, indem wir den Körper I getrennt betrachten. Dann müssen also die Kräfte A, P_1, P_2 und C berücksichtigt werden. Um nun auch in diesem Falle von der Unbekannten C frei zu werden, stellen wir für den

Körper I eine Momentengleichung $\Sigma M = 0$ in bezug auf das Mittelgelenk auf (Fig. 151c):

$$\text{(II)} \qquad +V_A \cdot a - H_A \cdot f - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2 + C \cdot 0 = 0 .$$

In dieser Gleichung ist H_A die einzige Unbekannte. Denn V_A ist ja soeben durch den Ausdruck (Ia) berechnet und das Glied mit C wird zu Null. Somit ergibt sich H_A:

$$\text{(IIa)} \qquad H_A = \frac{1}{f}(V_A \cdot a - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2) .$$

Hiermit ist auch H_A bestimmt.

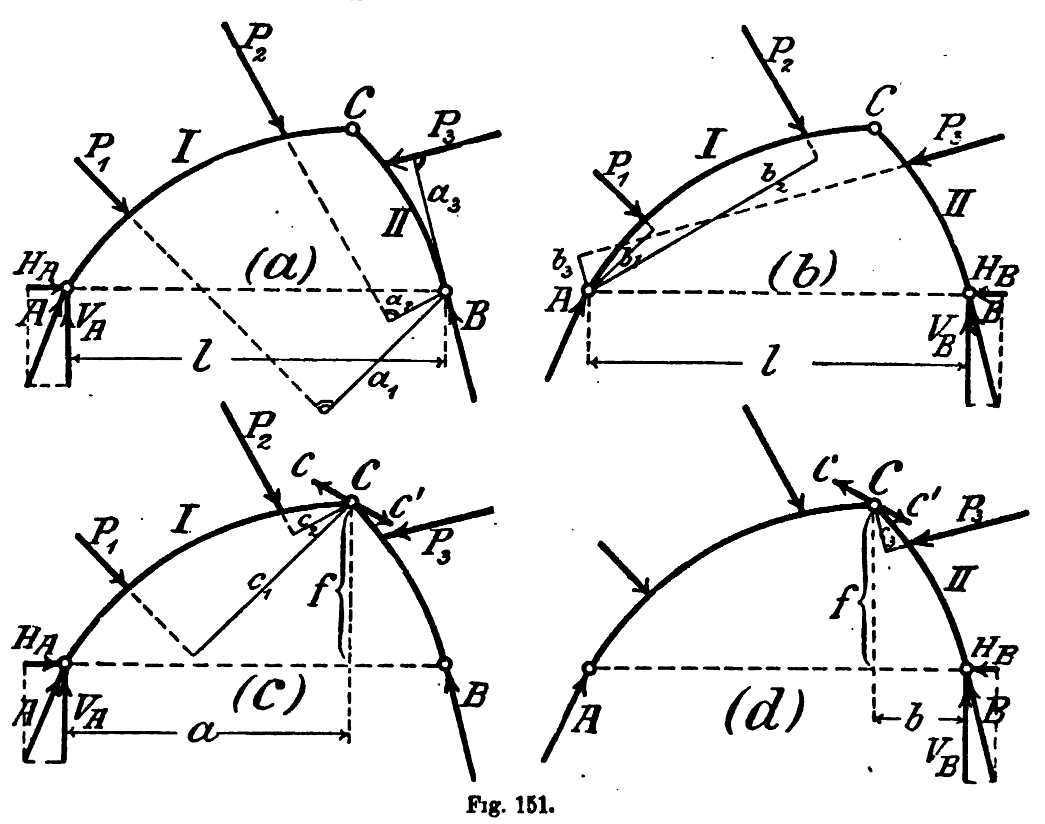


Fig. 151.

Aus den beiden Seitenkräften V_A und H_A ergibt sich dann der gesamte Kämpferdruck A nach Größe und Richtung.

b) Auflagerdruck B. In derselben Weise ist in Fig. 151b und d der Kämpferdruck B berechnet: Die Vertikalkomponente V_B durch Betrachtung der Scheibenverbindung I, II als gemeinsamen s t a r r e n Körper und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ in bezug auf den Punkt A; die Horizontalkomponente H_B durch

Betrachtung des Körpers *II* **allein** und Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ in bezug auf den Punkt C. Die hierdurch erhaltenen Gleichungen lauten (nach Fortlassung der Glieder, die Null ergeben):

$$\text{(III)} \qquad V_B \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 = 0\,; \quad \text{hieraus}$$

$$\text{(IIIa)} \qquad V_B = \frac{1}{l}\,(P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3)\,.$$

$$\text{(IV)} \qquad V_B \cdot b - H_B \cdot f - P_3 \cdot c_3 = 0\,; \quad \text{hieraus}$$

$$\text{(IVa)} \qquad H_B = \frac{1}{f}\,(V_B \cdot b - P_3 \cdot c_3)\,.$$

Durch (IIIa) und (IVa) ist somit die Auflagerkraft B bestimmt.

c) **Mittelgelenkdruck C, C'.** Die Mittelgelenkkraft C, C' ergibt sich nach Größe und Richtung, indem man Körper *I* oder Körper *II* betrachtet. **Vier** Gleichgewichtsbedingungen haben wir bereits benutzt. **Zwei** sind also noch übrig. Beispielsweise kann man für den Körper *I* die Bedingungen anschreiben: Summe der Horizontalprojektionen gleich Null, Summe der Vertikalprojektionen gleich Null. Dann haben wir zwei Gleichungen, aus denen sich die beiden in C enthaltenen Unbekannten sofort ergeben. (Zur einfachen Berechnung wird man die Kraft C ebenfalls vorher horizontal und vertikal zerlegt haben.)

2. Zusammenfassung.

Zur Berechnung der Kämpferdrücke A und B zerlegen wir jeden derselben in eine vertikale und eine horizontale Seitenkraft. Die vertikalen Seitenkräfte ergeben sich dann, indem man die Scheibenverbindung wie einen **starren** Körper behandelt und von den äußeren Kräften die statischen Momente in bezug auf die Auflagerpunkte B und A aufstellt. Die horizontalen Seitenkräfte ergeben sich, indem man die Scheiben *I* und *II* **getrennt** betrachtet und die Momente in bezug auf den Punkt C aufstellt. In Formeln:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} V_A = \dfrac{M_B}{l}\,; & H_A = \dfrac{M_{I,C}}{f}\,, \\[2ex] V_B = \dfrac{M_A}{l}\,; & H_B = \dfrac{M_{II,C}}{f}\,. \end{cases}$$

3. Spezialfall: *Vertikale* Lasten.

Für den Fall, daß die Belastung **vertikal** wirkt, ist die Ausrechnung der für V_A usw. aufgestellten Ausdrücke besonders einfach, da dann die Abstände a_1, b_1, c_1 usw. der einzelnen Lasten horizontal zu messen sind. Für den Dreigelenkbogen Fig. 152a ergibt sich:

$$
\text{(VI)} \quad \begin{cases} V_A = \dfrac{1}{l}(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3)\,, \\ V_B = \dfrac{1}{l}(P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3)\,, \\ H_A = \dfrac{1}{f}(V_A \cdot a - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2)\,, \\ H_B = \dfrac{1}{f}(V_B \cdot b - P_3 \cdot c_3)\,. \end{cases}
$$

Fig. 152.

Außerdem kann man zur Kontrolle die Beziehungen verwenden (aus den Bedingungen $R_y = 0$, $R_x = 0$):

$$
\text{(VII)} \quad \begin{cases} V_A + V_B = P_1 + P_2 + P_3\,, \\ H_A = H_B\,. \end{cases}
$$

Zum Vergleiche wollen wir nun einen einfachen, horizontalen Balken betrachten, der durch die obigen drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 belastet wäre (Fig. 152b). Dessen Auflagerkräfte wären:

$$A_0 = \frac{1}{l}(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3),$$

$$B_0 = \frac{1}{l}(P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3).$$

Ferner wäre sein Biegungsmoment an der Stelle C (vertikal unter dem Mittelgelenk):

$$M_C = (A_0 \cdot a - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2)$$

bzw.

$$= (B_0 \cdot b - P_3 \cdot c_3).$$

Vergleichen wir nun diese Werte mit den obigen Formeln (VI), so ergibt sich folgende Übereinstimmung: **Bei einem durch vertikale Lasten beanspruchten Dreigelenkbogen sind die Vertikalkomponenten V_A, V_B der Kämpferdrücke gleich den Auflagerdrücken A_0, B_0 eines entsprechend belasteten wagerechten Balkens, und die Horizontalkomponenten sind gleich dem Biegungsmoment an der Stelle C dieses (gedachten) Balkens, dividiert durch die Pfeilhöhe f des Bogens.**

Dieser Vergleich gibt eine einfache Gedächtnisstütze zur Berechnung derartiger Dreigelenkbögen. Außerdem läßt sich hierdurch gelegentlich auch eine Rechenvereinfachung erzielen (vergleiche zweite Aufgabe des folgenden Paragraphen).

III. Berechnung der Auflagerkräfte bei ungleich hohen Kämpfern.

1. Entwicklung der Formeln.

Dadurch, daß die beiden Kämpferpunkte des Dreigelenkbogens in ungleicher Höhe liegen, wird das Grundsätzliche der vorhin abgeleiteten Rechenmethode natürlich keineswegs berührt.

Wir zerlegen die Kräfte A und B wieder in eine vertikale Seitenkraft und in eine andere Seitenkraft, die durch die Verbindungslinie der Kämpferpunkte A und B hindurchgeht. Der Unterschied gegen früher ist nur der, daß jetzt diese beiden Seitenkräfte nicht mehr rechtwinklig zueinander stehen (Fig. 153a und Fig. 153b). Deshalb wollen wir sie jetzt auch nicht mit V_A und H_A bzw. V_B und H_B bezeichnen, sondern mit Y_A und Z_A bzw. Y_B und Z_B (Fig. 153). Z_A führe die besondere Bezeichnung „Bogenkraft". [Wir müssen diese **schräge** Zerlegung vornehmen, damit die Gleichungen ebenso einfach werden wie früher.]

Die Ausrechnung dieser Seitenkräfte erfolgt nun wie früher: Um Y_A zu finden, stellen wir vom ganzen System die Bedingung $\Sigma M = 0$ in bezug auf Punkt B auf (Fig. 153a):

(VIII) $$Y_A \cdot l - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 = 0 .$$

Hieraus folgt:

(VIIIa) $$Y_A = \frac{1}{l}(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3) .$$

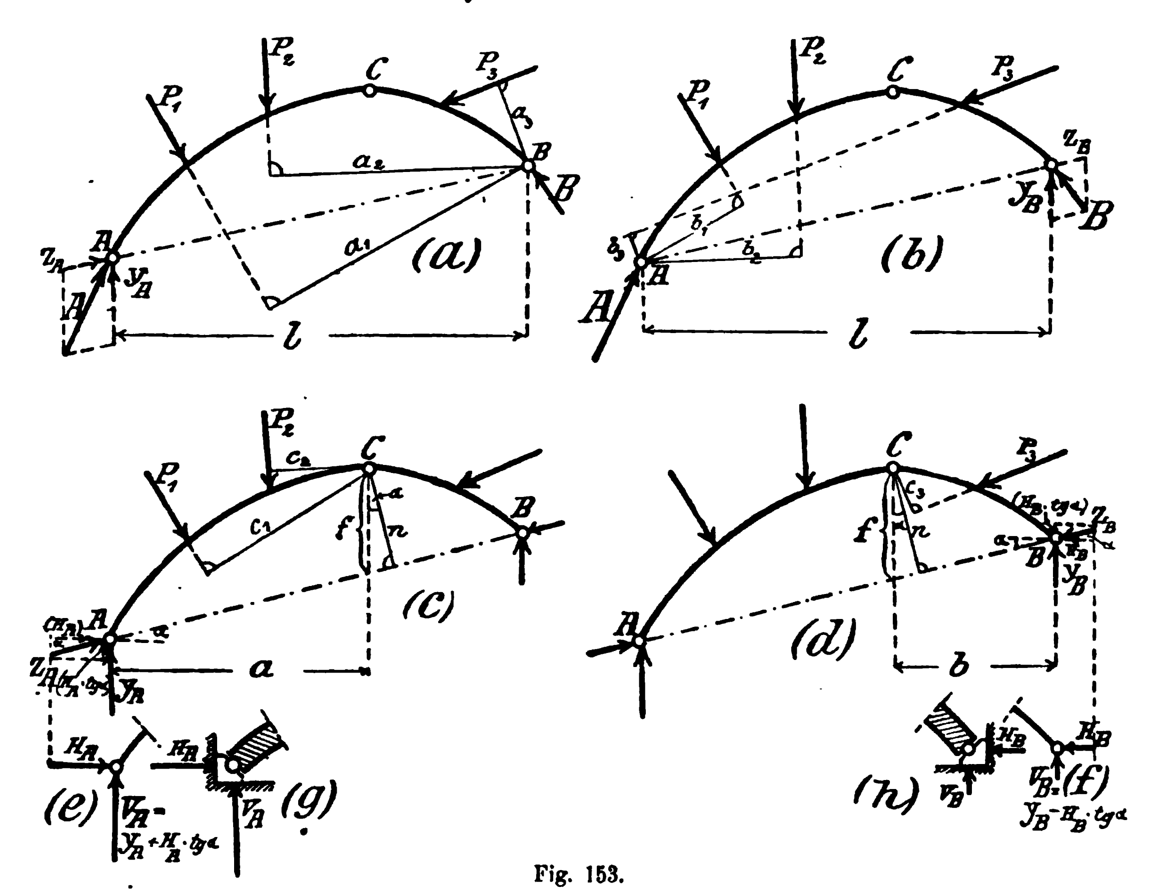


Fig. 153.

Z_A bestimmen wir aus der Betrachtung der linken Scheibe (Bezugspunkt C, Fig. 153c)

(IX) $$+ Y_A \cdot a - Z_A \cdot n - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2 = 0 .$$

Hieraus:

(IXa) $$Z_A = \frac{1}{n}(+ Y_A \cdot a - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2) .$$

(Y_A ist bereits als bekannte Kraft anzusehen.)

Aus Y_A und Z_A ergibt sich dann durch Zusammensetzung der gesamte Auflagerdruck A.

Entsprechend finden wir die Seitenkräfte von B (Fig. 153b und Fig. 153d):

(Xa) $$Y_B = \frac{1}{l}(+P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3),$$

(XIa) $$Z_B = \frac{1}{n}(+Y_B \cdot b - P_3 \cdot c_3).$$

Durch diese Seitenkräfte ist dann B bestimmt.

Somit haben wir sowohl A als auch B analytisch ermittelt.

Man muß beachten, daß die Werte Y_A und Y_B nicht die gesamten Vertikaldrücke der Auflager A und B darstellen. Denn auch die Kräfte Z_A und Z_B geben vertikale Seitenkräfte ab. Will man die gesamte vertikale Kraft an einem Lager wissen, so muß man noch Z_A und Z_B vertikal und horizontal zerlegen. Bezeichnet α den Neigungswinkel der Verbindungslinie $\overline{AB}$, so entstehen bei dieser Zerlegung:

vertikale Seitenkräfte: $Z_A \cdot \sin\alpha$ bzw. $Z_B \cdot \sin\alpha$,
horizontale " : $H_A = Z_A \cdot \cos\alpha$ " $H_B = Z_B \cdot \cos\alpha$.

Diese Seitenkräfte müssen nun (mit Berücksichtigung der Pfeilrichtungen) zu den bereits vorhandenen Kräften Y_A und Y_B hinzugefügt werden, so daß sich schließlich ergibt (Fig. 153g):

(XII) $\begin{cases} \text{gesamte vertikale Kraft eines Lagers: } V_A = Y_A + Z_A \cdot \sin\alpha, \\ \text{,, horizontale ,, ,, ,, : } H_A = Z_A \cdot \cos\alpha. \end{cases}$

Dieses ist also das Resultat, wenn man die Zerlegung des Kämpferdruckes A so weit durchführt, daß sich schließlich eine vertikale und eine horizontale Seitenkraft ergibt.

Entsprechend ist es bei B.

2. Vereinfachung.

Statt auf dem Wege über Z_A und Z_B kann man die Horizontalprojektionen

$$H_A = Z_A \cdot \cos\alpha$$

und $$H_B = Z_B \cdot \cos\alpha$$

auch direkt bestimmen (Fig. 153c und d). Nach der Figur ist nämlich das auf die Verbindungslinie $\overline{AB}$ gefällte Lot n gleich der (absolut vertikal gezogenen) Pfeilhöhe f, multipliziert mit $\cos\alpha$:

$$n = f \cdot \cos\alpha.$$

Wenn wir diesen Wert in die Gleichungen (IXa) und (XIa) einsetzen und beide Seiten mit dem Nenner $\cos\alpha$ multiplizieren, so ergibt sich:

$$\text{(IXb)}\qquad Z_A\cdot\cos\alpha\,(=H_A)=\frac{1}{f}(Y_A\cdot a-P_1\cdot c_1-P_2\cdot c_2)\,,$$

$$\text{(XIb)}\qquad Z_B\cdot\cos\alpha\,(=H_B)=\frac{1}{f}(Y_B\cdot b-P_3\cdot c_3)\,.$$

Somit sind die Horizontalprojektionen H_A und H_B der Kräfte Z_A und Z_B direkt bestimmt, ohne Zuhilfenahme von Z_A und Z_B selber. Diese Gleichungen sind bequem auszurechnen, weil der Stich f meistens vorgeschrieben ist.

Nachdem wir jetzt H_A und H_B haben, drücken wir auch die Vertikalprojektionen von Z_A und Z_B durch diese soeben bestimmten Horizontalprojektionen aus, indem wir umformen:

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{cases} Z_A\cdot\sin\alpha=Z_A\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=H_A\cdot\operatorname{tg}\alpha\,,\\ Z_B\cdot\sin\alpha=H_B\cdot\operatorname{tg}\alpha\,.\end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (XII) ein, so erhalten wir den gesamten Vertikaldruck und den gesamten Horizontaldruck eines Lagers:

$$\text{(XIIa)}\qquad \begin{cases} \text{gesamte vertikale Kraft:}\quad V_A=Y_A+H_A\cdot\operatorname{tg}\alpha\,,\\ \quad\text{,,}\qquad\text{horizontale ,,}\;:\;=H_A\,.\end{cases}$$

Entsprechend bei B.

Diese Berechnung der Auflagerkräfte durch Y_A und H_A ist etwas bequemer als die ursprünglich sich ergebende Berechnung mit Y_A und Z_A. (Letztere wurde nur eingeführt, um zunächst einfache Gleichungen $\Sigma M=0$ zu erhalten.)

8. Zusammenfassung.

Zunächst berechnen wir die vertikalen Hilfskräfte (Fig. 153a und Fig. 153b):

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{cases} Y_A=\dfrac{M_B}{l}\,,\\[2ex] Y_B=\dfrac{M_A}{l}\,,\end{cases}$$

und die horizontalen Kräfte (Fig. 153c und d):

$$\text{(XIV)}\qquad \begin{cases} H_A=\dfrac{M_{I,C}}{f}\,,\\[2ex] H_B=\dfrac{M_{II,C}}{f}\,.\end{cases}$$

Letztere sind dann bereits die endgültigen Horizontalkräfte der Lager (Fig. 153g und h). Die endgültigen Vertikalkräfte der Lager ergeben sich durch Zusammenzählung, natürlich mit Berücksichtigung der Pfeilrichtungen (Fig. 153c, e, g und d, f, h):

$$\text{(XV)} \qquad \begin{cases} V_A = Y_A + H_A \cdot \operatorname{tg}\alpha\,, \\ V_B = Y_B - H_B \cdot \operatorname{tg}\alpha\,. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (XIV) und (XV) sind die Lagerkräfte endgültig bestimmt (Fig. 153g und h).

Man beachte, daß in die Momentensummen $M_{I,C}$ und $M_{II,C}$ die Kräfte Y_A und Y_B mit einzuführen sind. Letztere müssen also zuerst bestimmt werden.

4. Spezialfall: *Vertikale* Lasten (Fig. 154).

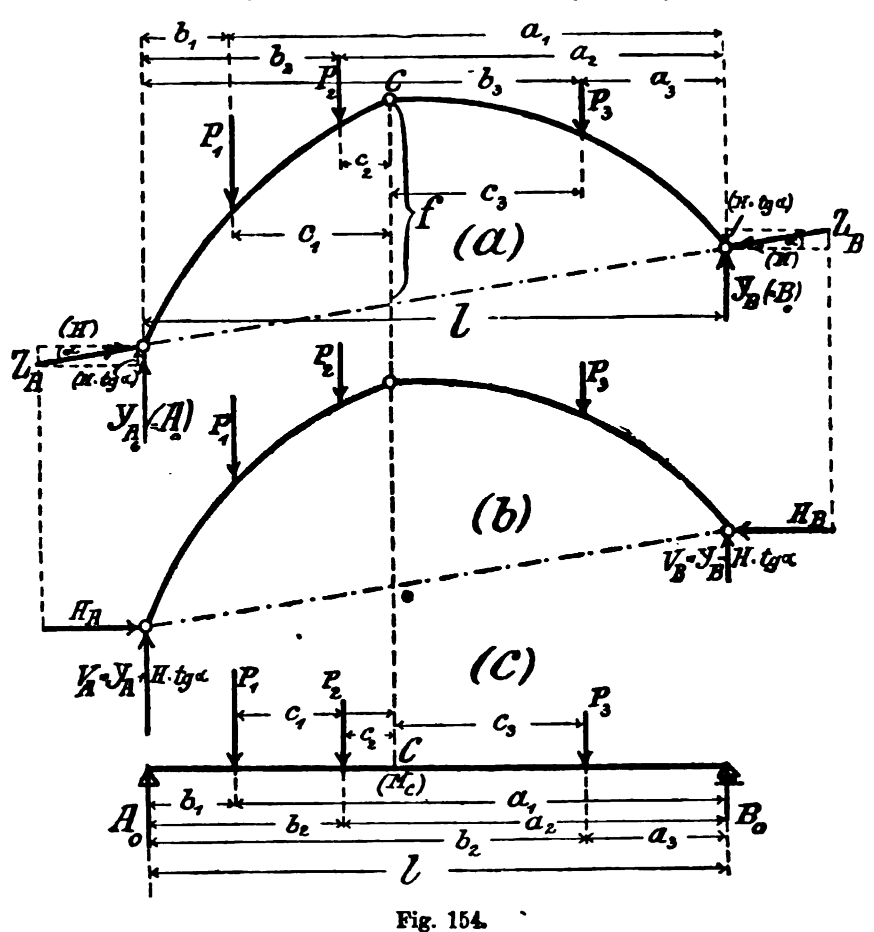


Fig. 154.

Hier zeigt sich: Beim Zerlegen der Auflagerkräfte in Y und Z (Fig. 154a) wird Y_A gleich dem Auflagerdruck A_0 und Y_B gleich dem Auflagerdruck B_0 eines einfachen, horizontalen Balkens, der bei A_0 und B_0 gestützt und durch P_1—P_3 belastet ist (Fig. 154c). Bei dem dann folgenden weiteren Zerlegen der schrägen Kräfte Z (Fig. 154b) ergibt sich, daß die beiden Horizontalkomponenten H_A und H_B einander gleich werden, und zwar ist jede gleich dem für die Stelle C berechneten Biegungsmoment des gedachten Balkens Fig. 154c, dividiert durch die Pfeilhöhe f des Bogens. In Formeln also:

$$(\text{XVI}) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_A &= \text{Auflagerdruck } A_0 \text{ eines einfachen Balkens,} \\ Y_B &= \quad\text{"} \quad B_0 \quad\text{"} \quad\text{"} \quad\text{"}, \\ H_A = H_B &= \frac{\text{Moment } M_C \text{ eines einfachen Balkens}}{\text{Stich } f}, \end{aligned} \right.$$

$$\left[Z_A = Z_B = \frac{\text{Moment } M_C \text{ eines einfachen Balkens}}{\text{Lot } n} \right].$$

[Der Beweis hierfür ergibt sich, indem man nach den Formeln (XIII), (XIV) die Werte Y_A, Y_B und H_A, H_B ausrechnet und diese Ausdrücke mit den Werten A_0, B_0 und M_C des Balkens Fig. 154c vergleicht. (S. den entsprechenden Beweis in Absatz II, 3 dieses Paragraphen.)]

Wir können also bei vertikaler Belastung so vorgehen, daß wir uns die Lasten nicht auf den Dreigelenkbogen, sondern auf den einfachen Balken wirkend denken und nun bei diesem die Auflagerdrücke und das Moment an der Stelle C berechnen. Letzteres dividieren wir noch durch die Pfeilhöhe f des Bogens. Dann haben wir die Hilfswerte Y_A, Y_B, H_A und H_B, aus denen sich schließlich die Endwerte

$$\left\{ \begin{aligned} V_A &= Y_A \pm H_A \cdot \operatorname{tg}\alpha, \\ V_B &= Y_B \mp H_B \cdot \operatorname{tg}\alpha \end{aligned} \right.$$

ergeben. Die Rechenarbeit ist ja schließlich dieselbe; man hat aber ein einfaches Rezept.

Wenn der Bogen durch *schräge* Lasten beansprucht ist, wird man übrigens vielfach diese zunächst vertikal und horizontal zerlegen und dann die Berechnung für jede dieser beiden Komponentengruppen getrennt durchführen.

IV. Zusätze.

Zusatz 1. Bisher haben wir die Gleichungen $R_x = 0$ und $R_y = 0$ noch gar nicht gebraucht, sondern statt dessen die Momentengleichung für mehrere Bezugspunkte angeschrieben. Im allgemeinen ist dieses auch vorzuziehen. Die Gleichungen $R_x = 0$ und $R_y = 0$

benutzt man dann zur Kontrolle, und zwar sagt die erste aus, daß $H_A - H_B$ gleich der Summe der Horizontalprojektionen aller Lasten ist, während die zweite aussagt, daß $V_A + V_B$ gleich der Summe der Vertikalprojektionen aller Lasten ist. Man kann diese Beziehungen natürlich auch benutzen, um H_A aus H_B, usw. direkt abzuleiten.

Zusatz 2. Hinsichtlich des ganzen Rechnungsganges ist noch folgendes zu bemerken. Wir haben uns bei der Entwicklung des Verfahrens zunächst klargemacht, daß den sechs Unbekannten auch sechs Gleichungen gegenüberstehen. Hierdurch war die Aufgabe im Prinzip gelöst. In welcher Form wir die Gleichungen schließlich verwenden, ist eine reine Zweckmäßigkeitsfrage. Wir brauchten durchaus nicht die Punkte B, A und C als Bezugspunkte der Momentengleichungen zu nehmen, sondern könnten die Gleichgewichtsbedingungen in irgendwelcher Form anschreiben und würden schließlich doch zum Ziele kommen. Nur die Rechenarbeit wäre umständlicher.

Dies muß gesagt werden, da man häufig die falsche Anschauung antrifft: „Der Körper I (oder II) kann sich um den Punkt C drehen. Folglich muß für diesen Punkt das Biegungsmoment gleich Null sein, und folglich müssen wir auch für diesen Punkt die Gleichung $\Sigma M = 0$ ansetzen."

Es dürfte jetzt klar sein, daß diese Ableitung das Anwendungsgebiet der Gleichgewichtsbedingungen in ganz unberechtigter und willkürlicher Weise einschränkt. Das „Drehen" hat mit den Gleichgewichtsbedingungen gar nichts zu tun. Letztere folgen vielmehr einzig und allein aus der Tatsache des Gleichgewichtes, und ihre Anwendung (Wahl der Bezugspunkte) ist vollständig unabhängig von dem, was die Körper unter anderen Bedingungen tun oder nicht tun werden. (Denn zunächst können sich die Körper doch überhaupt nicht drehen.)

Wenn wir die sechs Gleichungen nicht wahllos hinschreiben, sondern uns mit Vorliebe gerade die Momentengleichungen mit geschickt gewählten Bezugspunkten heraussuchen, so geschieht dies ausschließlich im Interesse der Bequemlichkeit. Nämlich, um die Anzahl der in einer Gleichung enthaltenen Unbekannten so weit wie möglich zu verringern (am liebsten nur *eine* Unbekannte). Von irgendeinem „Muß", etwa gefolgert aus den möglichen Bewegungen der Körper, ist keine Rede.

Wohl aber „muß" man sich über diese Sachen Klarheit verschaffen, damit endlich dieses in der Praxis immer wieder an-

zutreffende Herumtappen in den wichtigsten oder vielmehr alleinigen Grundlagen der technischen Statik aufhört.

Zusatz 3. Wir haben gesehen, daß eine gelenkige Scheibenverbindung dieselben Gleichgewichtsbedingungen erfüllt wie ein starrer Körper. Es gilt aber nicht die Umkehrung; d. h. ein Kräftesystem, das einen starren Körper im Ruhezustande halten würde, tut dieses im allgemeinen nicht bei einer gelenkigen Scheibenverbindung (z. B. Fig. 150b). Bei letzterer Konstruktion müssen vielmehr 6 Bedingungen (an jeder Scheibe 3) erfüllt sein, um den Ruhezustand eines jeden einzelnen Teiles zu gewährleisten.

§ 56.

Wiederholung und Beispiele zu § 55.

I. Wiederholung.

Da die Berechnung der Kämpferdrücke das wichtigste bei der Theorie des Dreigelenkbogens ist, mögen zunächst die Methoden des vorigen Paragraphen wiederholt werden. Wir haben die beiden folgenden Fälle 1. und 2. unterschieden.

1. Kämpfer A und B in gleicher Höhe.

Hierzu folgender Rechnungsgang: Wir zerlegen die Kämpferdrücke vertikal und horizontal. Dann ergeben sich die vertikalen Komponenten, indem man das System wie einen starren Körper behandelt und für die Auflagerpunkte die Momente aufstellt. Die horizontalen Komponenten ergeben sich, indem man die linke und die rechte Scheibe des Bogens für sich betrachtet und die Momente für das Mittelgelenk aufstellt. In Formeln:

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{M_B}{l}; \qquad V_B = \dfrac{M_A}{l}, & \text{(I)} \\[2ex] H_A = \dfrac{M_{I,C}}{f}; \qquad H_B = \dfrac{M_{II,C}}{f}. & \text{(II)} \end{cases}$$

Für den Spezialfall: vertikale Belastung, ist

$$H_A = H_B .$$

Ferner ergeben sich einfache Vergleiche mit einem horizontalen Balken auf einem festen und einem beweglichen Lager. Nämlich:

$$\text{(Ia)} \quad \begin{cases} V_A = \text{Auflagerdruck } A_0 \text{ dieses einfachen Balkens,} \\ V_B = \quad\text{"}\quad B_0 \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} \end{cases}$$

$$\text{(IIa)} \quad H_A = H_B = \frac{\text{Moment an der Stelle } C \text{ dieses einfachen Balkens}}{\text{Bogenstich } f}$$

2. (Allgemeiner Fall.) Kämpfer in ungleicher Höhe.

Die Zerlegung haben wir auf verschiedene Weise durchgeführt.

a) Wir stellen die Kämpferdrücke durch eine vertikale Seitenkraft Y und eine schräge Seitenkraft Z in Richtung der Kämpferverbindungslinie dar. Diese ergeben sich:

$$\text{(III)} \qquad Y_A = \frac{M_B}{l}; \qquad Y_B = \frac{M_A}{l},$$

$$\text{(IV)} \qquad Z_A = \frac{M_{I,C}}{n}; \qquad Z_B = \frac{M_{II,C}}{n}.$$

Spezialfall (vertikale Belastung): Es ist

$$Z_A = Z_B.$$

Ferner bestehen die Vergleiche:

$$\text{(IIIa)} \quad \begin{cases} Y_A = \text{Auflagerdruck } A_0 \text{ eines einfachen Balkens,} \\ Y_B = \quad \text{,,} \qquad B_0 \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \qquad \text{,,} \quad , \end{cases}$$

$$\text{(IVa)} \qquad Z_A = Z_B = \frac{\text{Biegungsmoment } M_C \text{ eines einfachen Balkens}}{\text{Lot } n}.$$

b) Wir stellen die Kämpferdrücke schließlich durch eine vertikale Seitenkraft V und eine horizontale Seitenkraft H dar. (Das heißt, wir zerlegen die schräge Kraft Z noch weiter.) Die Berechnung muß jedoch über dem Umwege von Y erfolgen:

$$\text{(III)} \qquad Y_A = \frac{M_B}{l}; \qquad Y_B = \frac{M_A}{l},$$

$$\begin{cases} \text{(V)} \quad H_A = \dfrac{M_{I,C}}{f}; \qquad H_B = \dfrac{M_{II,C}}{f}. \\ \text{(VI)} \quad V_A = Y_A \pm H_A \cdot \operatorname{tg}\alpha; \quad V_B = Y_B \mp H_B \cdot \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Spezialfall (vertikale Belastung): Es ist

$$H_A = H_B = \frac{\text{Moment } M_C \text{ eines einfachen Balkens}}{\text{Bogenstich } f}.$$

Im übrigen Y_A, Y_B nach den Formeln (IIIa) und V_A, V_B nach den Formeln (VI).

Erste Aufgabe.

Bei dem in Fig. 155a gezeichneten Dreigelenkbogen mit der daselbst angegebenen Belastung sind die Kämpferdrücke zu berechnen!

Wir haben „Kämpfer in gleicher Höhe“ und außerdem den Spezialfall: vertikale Belastung. Wie hierfür in § 55, II bewiesen wurde, sind dann die Vertikaldrücke V_A und V_B gleich den

Auflagerdrücken A_0 und B_0 eines wagerechten Balkens mit derselben Belastung (Fig. 155). Und die Horizontalschübe H_A und H_B sind gleich dem Biegungsmomente an der Stelle C dieses (zum Vergleiche herangezogenen) einfachen Balkens, dividiert durch die Pfeilhöhe f des Bogens. Somit erhalten wir für den Dreigelenkbogen (Fig. 155 a):

$$V_A = \frac{3}{4} P = \frac{3}{4} 7450 = 5590 \text{ kg},$$

$$V_B = \frac{1}{4} P = 1860 \text{ kg},$$

$$H_A = H_B = \frac{1860 \cdot 16{,}50}{15{,}00} = 2050 \text{ kg}.$$

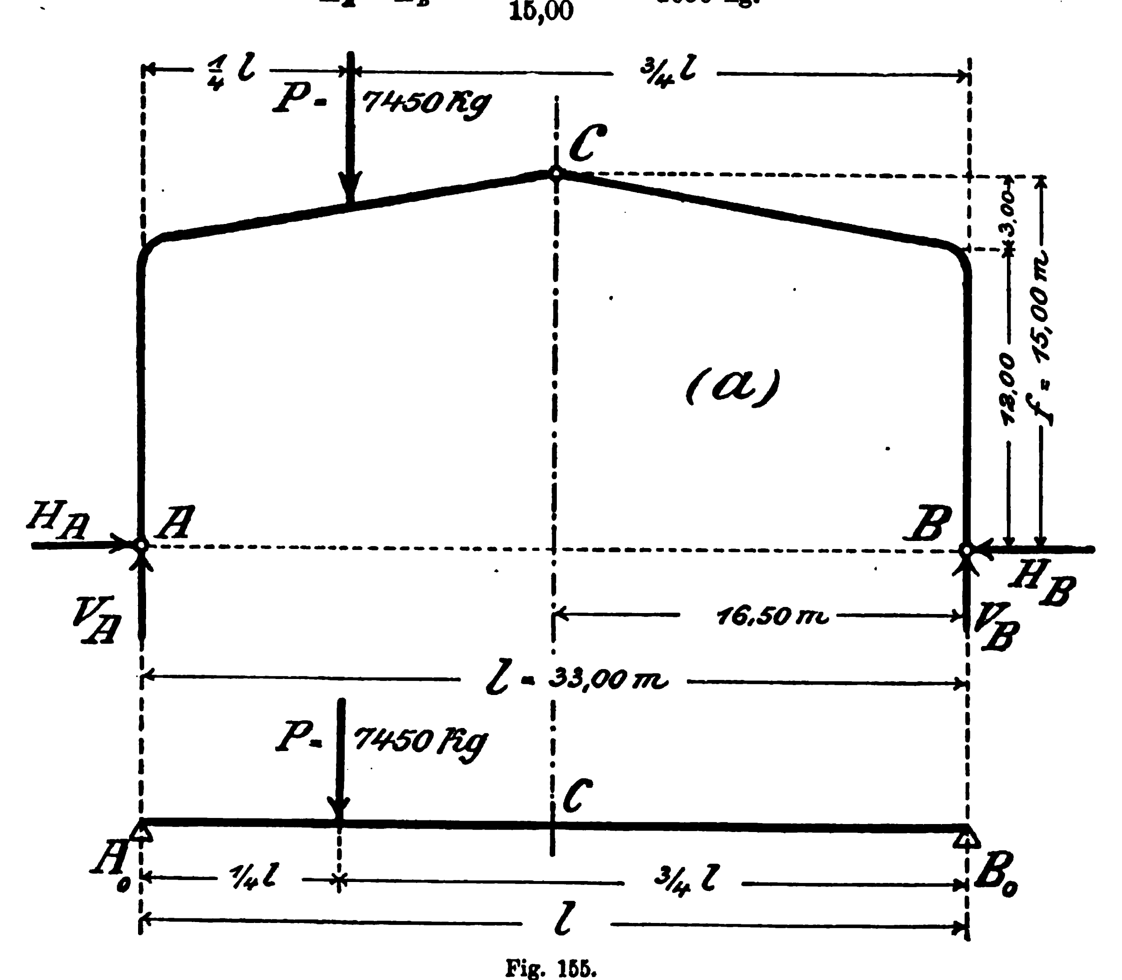


Fig. 155.

Zweite Aufgabe.

Der Dreigelenkbogen Fig. 155a sei durch eine gleichmäßig verteilte Last $P = 7450$ kg belastet. Die Kämpferdrücke sind zu berechnen!

Es ergibt sich:

$$V_A = V_B = \tfrac{1}{2} P = 3725 \text{ kg},$$

$$H_A = H_B = \frac{\frac{1}{8} Pl}{f} = \frac{Pl}{8f}$$

$$= \frac{7450 \cdot 33{,}00}{8 \cdot 15{,}00} = 2050 \text{ kg}.$$

Dritte Aufgabe.

Für den in Fig. 156 gezeichneten Dreigelenkbogen mit der daselbst angegebenen Belastung sind die Auflagerkräfte zu berechnen!

Die Kämpfer liegen in gleicher Höhe. Die Kräfte V_A usw. werden zunächst in die Figur eingezeichnet (Fig. 156a). Ob die angenommenen Pfeilrichtungen richtig sind, wird sich ja nachher durch die sich ergebenden Vorzeichen der Resultate erweisen.

Somit ergibt sich:

$$V_A = \frac{M_B}{l}$$

$$= (+P_1 \cdot 24{,}75 - P_2 \cdot 13{,}50 - P_3 \cdot 6{,}00) \frac{1}{33{,}00}.$$

[Hinsichtlich der Vorzeichen der Kräfte P_1, P_2 und P_3: Eine links um B drehende Kraft ruft augenscheinlich eine Auflagerkraft V_A hervor, die so wirkt, wie von vornherein in der Zeichnung angenommen. Deshalb wird eine solche Kraft mit positivem Vorzeichen eingeführt. Dagegen würde eine um den Punkt B rechtsherum zeigende Kraft ein Abheben des Lagers verursachen, also einen negativen Auflagerdruck V_A hervorrufen. Deshalb erhält eine solche Kraft ein negatives Vorzeichen. Entsprechend ist bei V_B usw. von vornherein ersichtlich, welches Vorzeichen den einzelnen Kräften beizulegen ist.]

Insgesamt ergeben sich folgende Werte:

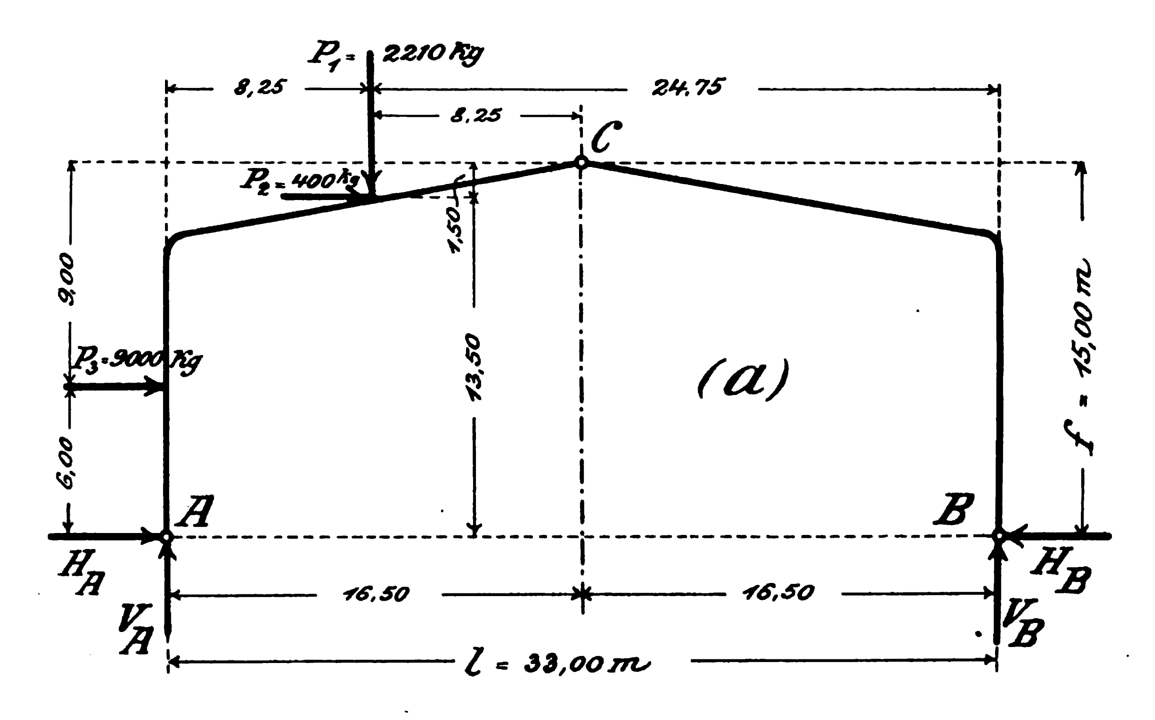
$$V_A = (2210 \cdot 24{,}75 - 400 \cdot 13{,}50 - 9000 \cdot 6{,}00) \frac{1}{33{,}00}$$
$$= -140 \text{ kg},$$

$$H_A = (V_A \cdot 16{,}50 - P_1 \cdot 8{,}25 - P_2 \cdot 1{,}50 - P_3 \cdot 9{,}00) \frac{1}{f}$$
$$= (-140 \cdot 16{,}50 - 2210 \cdot 8{,}25 - 400 \cdot 1{,}50 - 9000 \cdot 9{,}00) \frac{1}{15{,}00}$$
$$= -6810 \text{ kg},$$

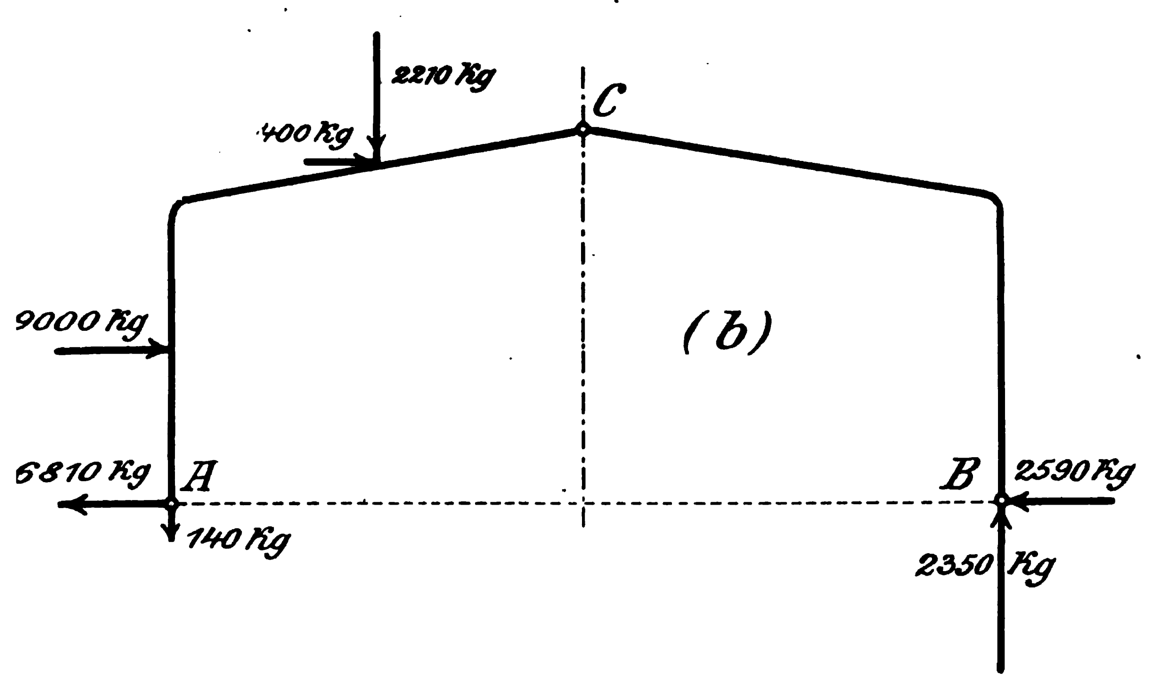
$$V_B = (2210 \cdot 8{,}25 + 400 \cdot 13{,}50 + 9000 \cdot 6{,}00) \frac{1}{33{,}00}$$
$$= +2350 \text{ kg},$$

$$H_B = \frac{V_B \cdot 16{,}50}{f} = \frac{+2350 \cdot 16{,}50}{15{,}00}$$
$$= +2590 \text{ kg}.$$

[Kontrollen (Fig. 156a): $V_A + V_B = -140 + 2350 = P_1$,
$H_B - H_A = 2590 - (-6810) = P_2 + P_3$.]



P1 = 2210 Kg
8,25
24,75
8,25
C
P2 = 400 Kg
1,50
9,00
13,50
P3 = 9000 Kg
6,00
(a)
f = 15,00 m
A
B
HA
HB
VA
VB
16,50
16,50
l = 33,00 m



2210 Kg
C
400 Kg
9000 Kg
(b)
6810 Kg
A
B
2590 Kg
140 Kg
2350 Kg

Fig. 156.

Hiermit sind die Größen der Kräfte bestimmt. Hinsichtlich der Pfeilrichtungen ist noch zu beachten: Für V_A und H_A haben sich negative Werte ergeben. Dieses bedeutet: V_A wirkt nicht, wie bei der Ableitung angenommen, nach oben, sondern es wirkt nach unten. H_A wirkt nicht nach rechts (als Druck auf den Bogen) sondern nach links. In Fig. 156b ist der Bogen mit den Auflagerkräften, wie sie in Wirklichkeit von den Lagern ausgeübt werden müssen, dargestellt.

§ 57.

Die Mittelkraftlinie.

I. Zweck der Kräftezusammensetzung.

Nachdem jetzt die Auflagerkräfte untersucht sind, können wir zur Ermittelung der inneren Kräfte übergehen. Um z. B. bei dem in Fig. 157 dargestellten Dreigelenkbogen die im Schnitte α—α auftretenden inneren Kräfte zu finden, betrachten wir das Gleichgewicht des links vom Schnitte liegenden Teiles. Hier greifen die äußeren Kräfte A, P_1 und P_2 an. Da diese Kräfte verschiedene Richtungen haben, wird es zweckmäßig sein, sie für die Berechnung zu ersetzen durch *eine* Kraft, die Resultierende.

Die Kraft A sei bereits nach einer der in den vorigen Paragraphen erläuterten Methoden bestimmt. Nun kommt es darauf an, die Resultierende aus A, P_1 und P_2 am einfachsten darzustellen.

Hierzu benutzen wir das mit dem Namen „Kräftezug" bezeichnete Verfahren (s. Band I, § 9, I. Methode): Wir bringen die beiden Kräfte A und P_1 zum Schnitt und ersetzen sie im Schnittpunkte durch ihre Ersatzkraft. Letztere finden wir aus Fig. 157b, und zwar ist sie dargestellt durch die Strecke R_{A-1}. Somit sind in Fig. 157a die beiden Kräfte A und P_1 durch eine Kraft R_{A-1} ersetzt.

Diese Kraft setzen wir nun mit der nächsten Kraft, P_2, zusammen. Die Größe und Richtung der Ersatzkraft R_{A-2} ergeben sich aus dem Kräftepolygon Fig. 157b. Die Lage von R_{A-2} in Fig. 157a ist dadurch bestimmt, daß sie durch den Schnittpunkt von R_{A-1} und P_2 geht. Auf diese Weise sind A, P_1 und P_2 durch eine Ersatzkraft ersetzt.

Der Sinn dieser Arbeit ist also der, daß wir uns um die Kräfte A, P_1 und P_2 nicht mehr einzeln zu kümmern brauchen, sondern daß wir vielmehr die Spannungen im Schnitte α—α jetzt

so berechnen können, als ob an dem betrachteten Teile nur die *eine* Kraft R_{A-2} wirksam wäre. Die Größe und Pfeilrichtung von R_{A-2} sind aus dem Kräftepolygon Fig. 157b zu entnehmen; die Lage ist durch Fig. 157a gegeben.

II. Weiterer Verlauf der Mittelkraftlinie.

Wie wir nun mit Hilfe dieser Kraft R_{A-2} die inneren Kräfte an der Stelle $\alpha-\alpha$ finden, werden wir später sehen. Jetzt wollen wir zunächst mit der Zusammensetzung der Kräfte fortfahren.

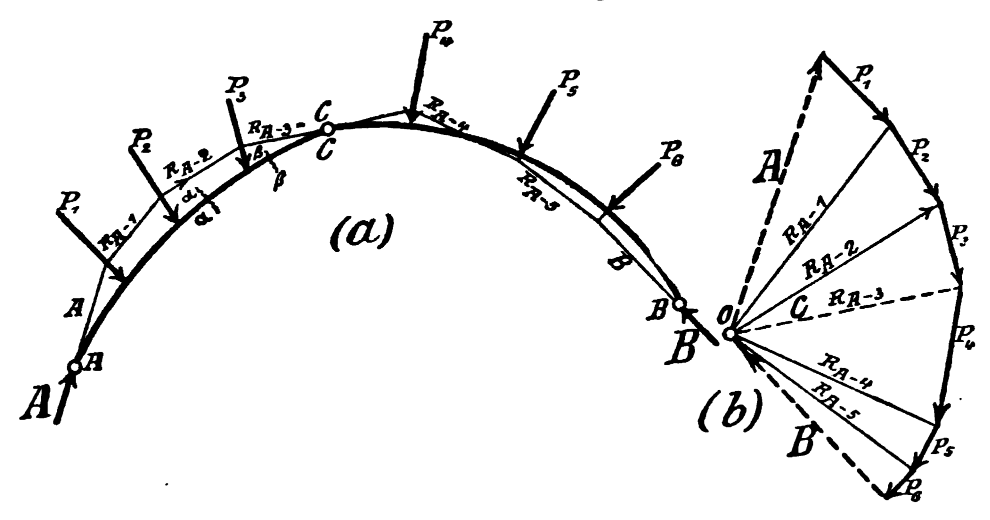


Fig. 157.

Wir bringen also R_{A-2} mit der folgenden Kraft, P_3, zum Schnitt und setzen die neue Resultierende, R_{A-3} aus Fig. 157b, in Fig. 157a an den Schnittpunkt an. Dann sind die Kräfte $A \ldots P_3$ durch eine Resultierende ersetzt.

Hierbei zeigt sich nun, daß R_{A-3} durch den Gelenkpunkt C hindurchgeht. In der Tat ist ja R_{A-3} nichts anderes als die Kraft, mit der die Scheibe $\overline{AC}$ (d. h. deren vier Kräfte $A \ldots P_3$) gegen den Stützpunkt C wirkt. Die Kraft R_{A-3} aus Fig. 157b und a stellt also den Mittelgelenkdruck C dar. Würde R_{A-3} in Fig. 157a nicht durch den Punkt C hindurchgehen, so wäre dies ein Zeichen, daß entweder bei der Ermittlung von A oder beim Zusammensetzen der Kräfte ein Fehler unterlaufen ist.

In Fig. 157 wurden die Kräfte noch weiter zusammengesetzt. Schließlich kommt man dann zum Auflagerdruck B zurück.

Die Linie $A-R_{A-1}-R_{A-2}\ldots$ nennen wir die ***„Mittelkraftlinie“***, weil sie für jeden Schnitt die Resultierende (Mittelkraft)

der links (oder rechts) von dem Schnitte angreifenden äußeren Kräfte angibt. [Für den Schnitt β—β z. B. ist R_{A-2} die Mittelkraft aus allen seitlich vom Schnitte befindlichen äußeren Kräften; usw.] Sie führt auch den Namen „*Stützlinie*", weil sie bei Gewölben den Verlauf der einzelnen Fugendrücke angibt.

III. Andere Auffassung der Mittelkraftlinie.

Man kann Fig. 157 auch als ein zu den Kräften P_1—P_6 gezeichnetes Seilpolygon auffassen. Der Pol desselben ist der Punkt O. Der erste Strahl ist die Strecke A, der letzte Strahl ist B. Dann stellt sich die Aufgabe, die Mittelkraftlinie zu zeichnen, also in der Form dar: Zu den Kräften P_1—P_6 ist ein Seilpolygon zu zeichnen, das durch die drei Punkte A, B und C hindurchgeht.

Diese Aufgabe kann man auch ganz für sich, ohne Bezugnahme auf den Dreigelenkbogen, stellen, indem man also die Lasten P_1—P_6 und die Punkte A, B und C angibt und nun zu den Lasten ein Seilpolygon verlangt, das durch die drei Punkte A, B und C hindurchgeht. Natürlich ist sie dann aber eine rein mathematische Aufgabe geworden.

Es gibt verschiedene Methoden, um diese Aufgabe zu lösen. Die eine (und praktischste) Lösung ist durch die vorhergehenden Untersuchungen gegeben: Wir fassen die vorgeschriebenen Punkte A, B und C als Gelenkpunkte eines Dreigelenkbogens, und die gegebenen Kräfte als Lasten dieses Bogens auf, ermitteln dessen Kämpferdrücke und zeichnen die Mittelkraftlinie ein. Letztere stellt dann — geometrisch gesprochen — das Seilpolygon dar, das zu den gegebenen Kräften gehört und durch die drei vorgeschriebenen Punkte geht.

§ 58.

Berechnung von vollwandigen Dreigelenkbogen.

Da der Dreigelenkbogen im I. Bande überhaupt nicht behandelt wurde, möge jetzt die Berechnung des vollwandigen Bogens nachgeholt werden.

I. Berechnung mittels der Mittelkraftlinie.

1. Die angreifende Kraft und Art der Beanspruchung.

In Fig. 158a ist der Teil an der Stelle α—α des in Fig. 157a behandelten Dreigelenkbogens in größerem Maßstabe in Ansicht und Schnitt gezeichnet. Die Spannungen im Schnitte α—α sollen ermittelt werden.

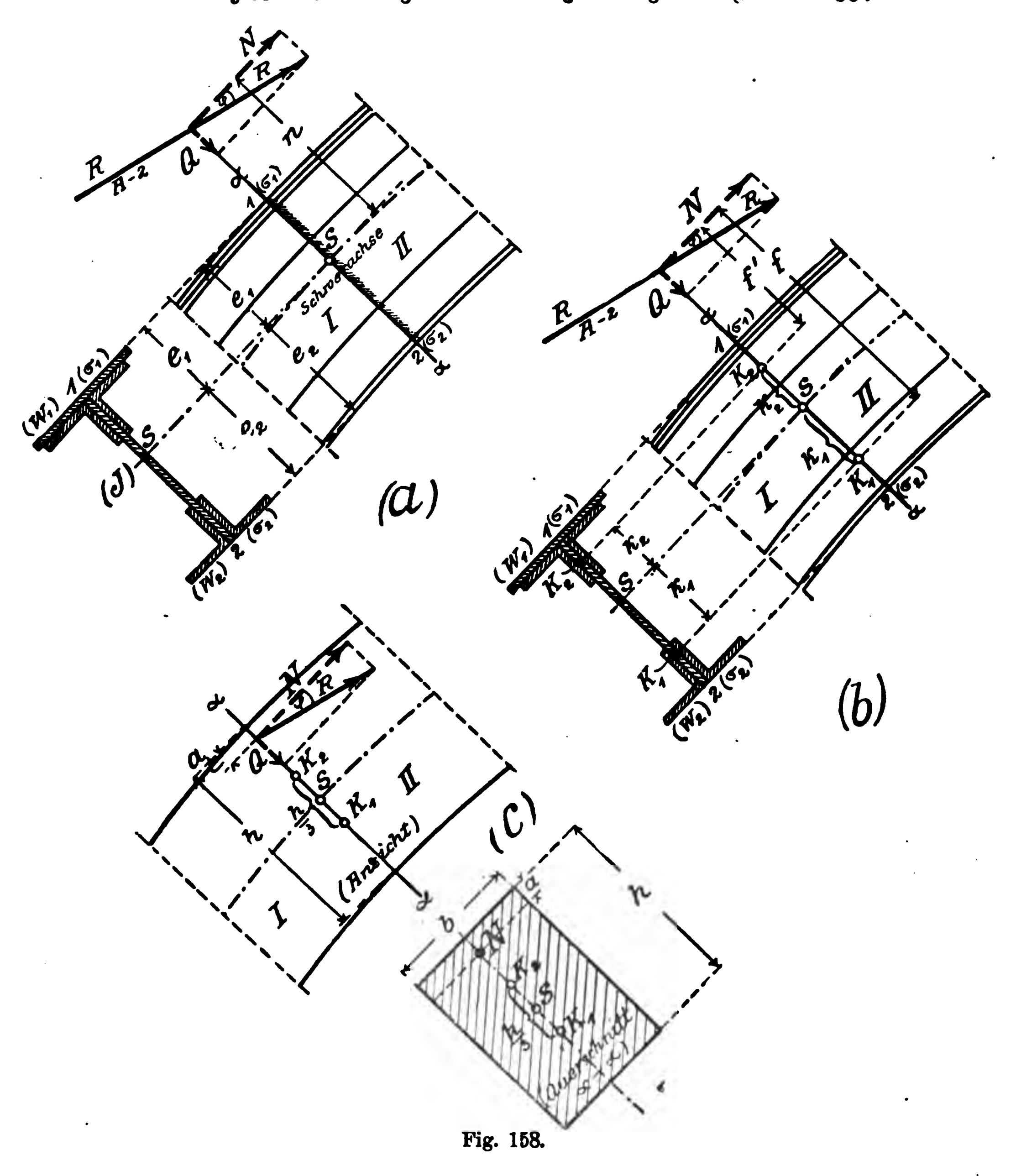


Fig. 158.

Der Querschnitt sei z. B. ein genietetes Profil, bestehend aus Stehblech, Winkeleisen usw. Die Mittelkraftlinie ist bereits bestimmt, und zwar gehört die Resultierende R_{A-2} zu dem zu untersuchenden Querschnitte $\alpha—\alpha$. (R_{A-2} ist also die Ersatzkraft

aller Kräfte, die zwischen Auflager und Schnitt α—α vorhanden sind.)

Betrachten wir nun den Teil links (oder rechts) vom Schnitte. Dieser stellt einen Körper dar, der durch eine exzentrisch liegende Kraft R beansprucht ist und durch die in der Schnittstelle α—α auftretenden inneren Kräfte gestützt ist. Die Berechnung dieser Spannungen hat also zu erfolgen nach den Regeln über „Biegung durch exzentrischen Zug oder Druck“ (Band I, 16. Vortrag).

Daß die Kraft R_{A-2} scheinbar in gar keinem körperlichen Zusammenhange mit dem Bogen steht, ist ohne Bedeutung für die Berechnung. Denn die Ersatzkraft ist ja nur eine gedachte, zur Vereinfachung eingeführte Kraft an Stelle der wirklich vorhandenen Kräfte A usw.

Zunächst zerlegen wir die schräge Kraft R_{A-2} in eine Seitenkraft N parallel der Stabachse und in eine Seitenkraft Q rechtwinklig dazu. Als Ort der Zerlegung nehmen wir die Schnittstelle α—α. Bezeichnen wir dann den Richtungsunterschied zwischen der angreifenden Kraft R und der Stabachse mit φ, so sind die obigen zwei Seitenkräfte von R:

(I) $\begin{cases} \text{„Normalkraft“ („Längskraft“)} \quad N = R \cdot \cos\varphi, \\ \text{„Querkraft“ („Transversalkraft“)} \quad Q = R \cdot \sin\varphi. \end{cases}$

Für diese beiden Kräfte müssen wir jetzt die im Schnitte α—α auftretenden Spannungen bestimmen.

2. Die zu „N“ gehörigen Spannungen.

Die Kraft N wirkt auf den betrachteten Bogenteil genau so wie eine der Stabachse parallele exzentrische Druckkraft. [Vgl. die Kraft P in Band I, Fig. 166. Der Unterschied besteht nur darin, daß P den Teil I vom Teile II abzureißen sucht — Zugkraft —; während N den Bogenteil I gegen den Teil II gegenpreßt — Druckkraft.] In diesem Falle müssen wir bekanntlich bei der Berechnung unterscheiden, ob das betreffende Material sowohl Zug als auch Druck aushalten kann, oder ob es nur Druck aushalten kann.

a) *Das Material kann sowohl Zug als auch Druck aufnehmen* (Eisen).

In Band I, § 90, I und II sind hierfür zwei Berechnungsmethoden erläutert:

α) Wir bilden das Moment M der Kraft N in bezug auf den Schwerpunkt S des Querschnittes:

$$M = N \cdot n.$$

Dann ist die Spannung an irgendeiner Stelle des Querschnittes gleich der Spannung $\sigma = \frac{N}{F}$, die an der Stelle auftreten würde,

wenn die Kraft N als *zentrische* Normalkraft wirken würde, vermehrt (bzw. vermindert) um die Spannung, die das Biegungsmoment $M = N \cdot n$ an der betreffenden Stelle hervorbringen würde. (Vgl. Band I, § 90, I.) Somit ergeben sich für den in Fig. 158 angenommenen (unsymmetrischen) Querschnitt die Spannungen in den äußersten Fasern:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{N}{F} - \dfrac{M}{W_1} = -\left(\dfrac{N}{F} + \dfrac{N \cdot n}{W_1}\right), \\ \sigma_2 = -\dfrac{N}{F} + \dfrac{M}{W_2} = -\left(\dfrac{N}{F} - \dfrac{N \cdot n}{W_2}\right). \end{cases}$$

[F gleich Flächeninhalt des Querschnittes. W_1 und W_2 dessen Widerstandsmomente für die oberste und die unterste Faser; also:

$$W_1 = \frac{J}{e_1}, \qquad W_2 = \frac{J}{e_2}. \qquad (J = \text{Trägheitsmoment.})$$

Die Normalkraft erzeugt im Querschnitte Druck. Das Biegungsmoment erzeugt in den oberen Schichten Druck, in den unteren Schichten Zug. Dementsprechend die Vorzeichen.]

Hiermit ist der Querschnitt untersucht.

β) Eine andere Berechnungsweise ist die mit Hilfe der *Kernpunkte* (Band I, § 90, II): Aus W und F bilden wir zunächst die Hilfswerte („Kernradien"):

$$k_1 = \frac{W_1}{F}; \qquad k_2 = \frac{W_2}{F}.$$

Diese werden vom Schwerpunkte S aus entgegengesetzt den Fasern *1* und *2* abgetragen und hierdurch die „Kernpunkte" K_1 und K_2 bestimmt (Fig. 158b). Dann ergeben sich die Spannungen der äußersten Fasern, indem man von der Kraft N oder auch direkt von der Kraft R die Momente in bezug auf diese Kernpunkte bildet und durch die Widerstandsmomente dividiert:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{M_{(K_1)}}{W_1} \left(= -\dfrac{N \cdot f}{W_1}\right), \\ \sigma_2 = +\dfrac{M_{(K_2)}}{W_2} \left(= +\dfrac{N \cdot f'}{W_2}\right). \end{cases}$$

Betreffs der Vorzeichen von σ_1 und σ_2 sei erinnert: Geht die Kraft *zwischen* die Kernpunkte hindurch, so haben σ_1 und σ_2 das *gleiche* Vorzeichen. Liegt die Kraft aber außerhalb der Kernpunkte (wie in Fig. 158), so haben σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen. Und zwar hat dann die Faser, die der Kraft zunächst liegt, Zug oder Druck, je nachdem die angreifende Kraft Zug oder Druck ist.

Hiermit sind ebenfalls die größten Spannungen des Querschnittes ermittelt.

b) Das Material kann nur Druck aufnehmen (Mauerwerk, Beton).

Die obigen Formeln (II) bzw. (III) gelten bekanntlich nur dann, wenn das betreffende Material sowohl Zug als auch Druck aufnehmen kann (Eisen). Bei nur druckfestem Material (Mauerwerk, Beton) ist die Berechnung nach Band I, § 91 durchzuführen: Zunächst wird festgestellt, ob die Kraft innerhalb oder außerhalb der Kernpunkte durch den Querschnitt hindurchgeht. Im ersteren Falle ist sowohl σ_1 wie σ_2 Druck. Folglich tritt der ganze Querschnitt in Tätigkeit, und die Spannungen σ_1 und σ_2 werden wie vorhin berechnet. Im zweiten Falle würde eine der Spannungen Druck, die andere Zug sein. Da das Material aber keinen Zug aufnehmen kann, so darf die bisherige Berechnung überhaupt nicht beibehalten werden. Es muß vielmehr eine andere nach neuen Gesichtspunkten aufgestellt werden, die von vornherein berücksichtigt, daß nur ein Teil des Querschnittes als tragend wirkt (Band I, § 91).

Da es sich aber meistens um rechteckigen Querschnitt handelt, ist auch diese Berechnung sehr einfach: Die Kernpunkte schließen das mittlere Drittel des Querschnittes ein. Liegt nun die Kraft außerhalb des mittleren Drittels, im Abstande a vom Rande, und ist die Breite des Querschnittes gleich b, so ist die größte Spannung im Querschnitte (Fig. 158c):

$$\text{(IV)} \qquad \sigma = -\frac{2N}{3ab}.$$

Hierdurch ist auch bei nur druckfestem Material die Spannung bei Belastung außerhalb des Kerns bestimmt.

8. Die von „Q" herrührenden Spannungen.

Die Kraft Q gibt kein Moment in bezug auf den Querschnitt und erzeugt also auch keine Normalspannungen σ. [Um diese Vereinfachung zu erreichen, haben wir eben als Zerlegungspunkt der Kraft R den Punkt genommen, in dem der Schnitt α—α durch die Kraft R hindurchgeht.]

Wohl aber gehören zu Q in dem Querschnitte Schubspannungen τ, die sich in irgendeiner Weise über die Querschnittsfläche verteilen werden. Bei Eisenkonstruktionen werden jedoch diese Schubspannungen vernachlässigt.

Bei Eisenbetonkonstruktionen geschieht die Berechnung der Schubspannungen τ_0 und der Haftspannungen τ_1 genau so wie in jedem anderen Falle. In die betreffenden Formeln wird der

Wert Q eingesetzt und hiermit τ_0 und τ_1 bestimmt (Band I, § 102, III, IV).

Bei genieteten Trägern wird ferner die Querkraft Q zur Berechnung der Nietteilungen gebraucht (Band I, § 78, V).

Somit haben wir für den betrachteten Querschnitt α—α sowohl die von der Normalkraft N als auch die von der Querkraft Q herrührenden Spannungen erledigt.

II. Berechnung auf analytischem Wege.

Wir haben gesehen, daß, sobald N, M und Q berechnet sind, die Spannungen sich sofort ergeben. Statt nun diese Werte durch Aufzeichnen der Mittelkraftlinie zu bestimmen, können wir sie auch rein rechnerisch ermitteln. Im folgenden soll dies sowohl für beliebige schräge Belastung, wie für den Spezialfall: vertikale Belastung, durchgeführt werden.

1. Berechnung von N und Q.

In Fig. 159 sei der Querschnitt α—α zu untersuchen. Die Auflagerkräfte seien bereits berechnet, und zwar in der Form, daß V_A und H_A, und V_B und H_B angegeben sind. Ferner sind natürlich bekannt die Lasten. Die Last P_1 (die zu dem Teile vom Auflager bis zu dem Querschnitte gehört) habe gegen die Horizontale den Neigungswinkel γ (Fig. 159a).

Statt nun die Kräfte V_A, H_A und P_1 zunächst zu einer Resultierenden R zusammenzusetzen und diese dann in N und Q zu zerlegen, wollen wir jetzt jede der drei Kräfte einzeln in Richtung der Stabachse und rechtwinklig dazu zerlegen. Hierdurch erhalten wir insgesamt drei Seitenkräfte in Richtung der Stabachse und drei rechtwinklig dazu. Die Summe der ersteren ergibt dann augenscheinlich die gesamte Normalkraft N, die Summe der zweiten ergibt die Querkraft Q des Querschnittes.

In Fig. 159a ist diese Zerlegung durchgeführt: Zunächst ist die Stabachse s—s an der Schnittstelle α—α eingezeichnet. Der Winkel zwischen s—s und der Horizontalen sei β. Nun wird jede Kraft zerlegt in Richtung von s—s und rechtwinklig dazu. Dann tritt bei den Kräften V_A und H_A ebenfalls der Winkel β auf (Fig. 159a). Der Neigungswinkel von P_1 gegen die Richtung s—s ergibt sich zu $(\beta + \gamma)$ bzw. $180 - (\beta + \gamma)$. Für die folgende Zerlegung sei darauf aufmerksam gemacht, daß $\sin[180 - (\beta + \gamma)] = \sin(\beta + \gamma)$ und $\cos[180 - (\beta + \gamma)] = \cos(\beta + \gamma)$ ist (von den Vorzeichen abgesehen).

Auf Grund dieser eingezeichneten Winkel ergeben sich nun folgende Seitenkräfte:

von V_A: $V_A \cdot \sin\beta$ (parallel zu s—s); $V_A \cdot \cos\beta$ (rechtwinklig zu s—s),
„ H_A: $H_A \cdot \cos\beta$ („ „ „); $H_A \cdot \sin\beta$ („ „ „),
„ P_1: $P_1 \cdot \cos(\beta + \gamma)$ („ „ „); $P_1 \cdot \sin(\beta + \gamma)$ („ „ „),

Nun addieren wir die gleichgerichteten Komponenten und erhalten:

$$\begin{cases} N = V_A \cdot \sin\beta + H_A \cdot \cos\beta - P_1 \cdot \cos(\beta + \gamma)\,, & \text{(V)} \\ Q = V_A \cdot \cos\beta - H_A \cdot \sin\beta - P_1 \cdot \sin(\beta + \gamma)\,. & \text{(VI)} \end{cases}$$

Hierbei sind folgende Vorzeichenfestsetzungen gemacht: Bei N ist die Richtung gegen den Querschnitt zu als positiv angenommen, bei Q ist (am Teile links vom Schnitte) die Richtung von innen nach außerhalb des Bogens als positiv eingeführt (Fig. 159b).

Somit sind N und Q rechnerisch ermittelt.

2. Berechnung von M.

Außer der Größe der Normalkraft N brauchen wir noch deren Abstände vom Schwerpunkte oder den Kernpunkten bzw. das Moment M in bezug auf den Schwerpunkt oder in bezug auf die Kernpunkte. Wenn wir N und Q analytisch berechnet haben, werden wir auch M analytisch bestimmen, und zwar direkt aus den gegebenen Kräften V_A, H_A und P. Denn das Moment aus diesen Kräften ist gleich dem Moment aus ihrer Resultierenden R bzw. deren Seitenkräften N und Q.

Für Fig. 159a wird z. B. das Moment in bezug auf den Schwerpunkt S:

$$M = +V_A \cdot x - H_A \cdot y - P_1 \cdot p_1\,. \qquad \text{(VII)}$$

[p_1 = Lot von S auf die Kraft P_1.]

Entsprechend ist das Moment für einen Kernpunkt K_1, K_2 auszurechnen.

Vorzeichenfestsetzung: Ein Moment, das in den äußeren Fasern Druck erzeugt, bekommt das positive Vorzeichen.

Somit ist auch M rechnerisch bestimmt. [Aus M und N kann man auch die Lage der Normalkraft finden (Fig. 159b): $M = N \cdot e$, also $e = M : N$.]

3. Die Spannungen σ und τ.

Aus M und den vorhin berechneten Werten N und Q ergeben sich nun die größten Spannungen σ_1, σ_2 und die Schubspannungen τ, bzw. die Nietteilungen e:

α) Will man die Formeln (II) verwenden, so berechnen wir die Normalkraft N (Formel V) und das Moment M in bezug auf

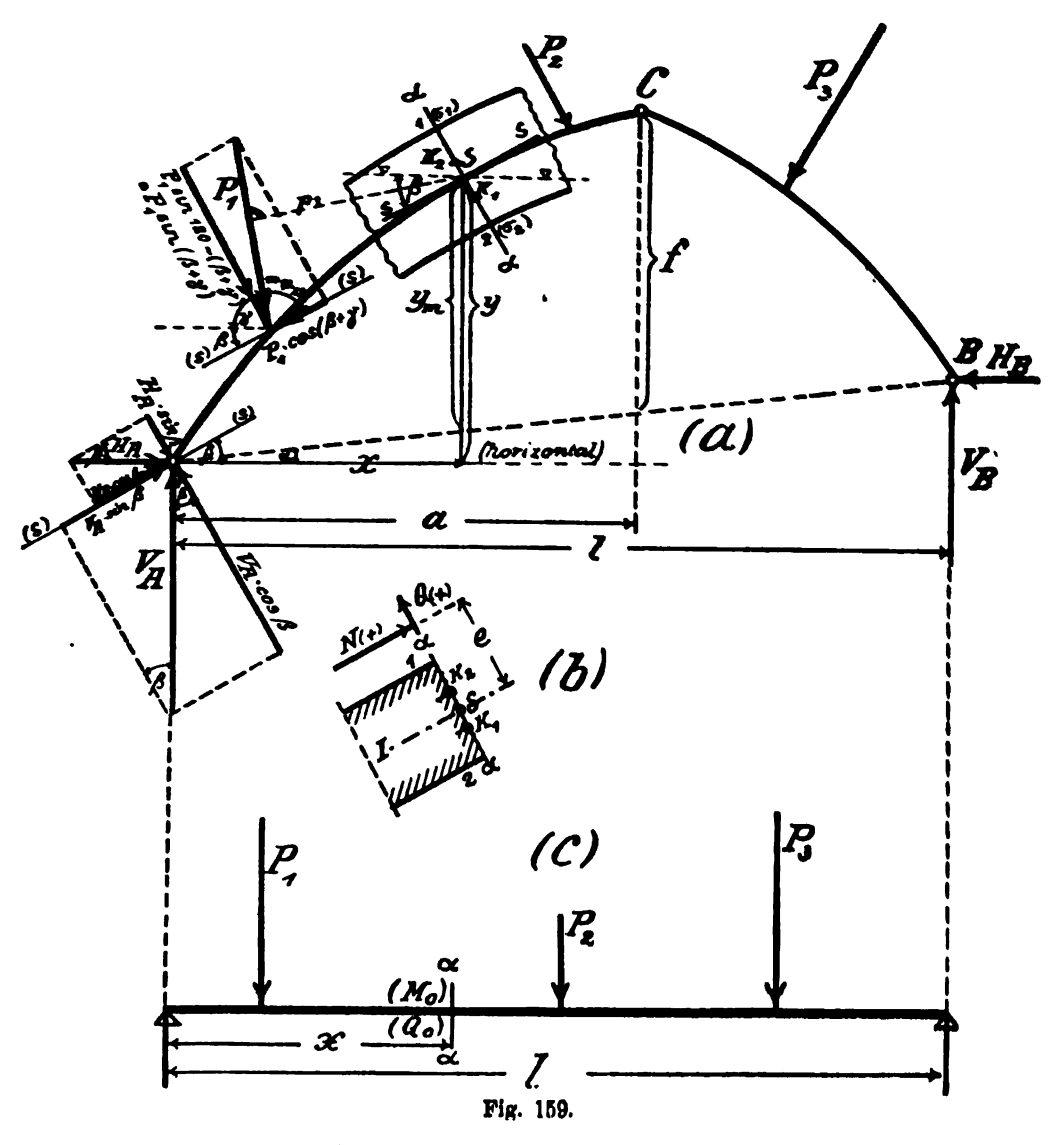


Fig. 159.

den Schwerpunkt (Formel VII) und erhalten die größten Spannungen in den äußersten Schichten *1* und *2*:

$$\text{(II a)} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{W_1}\right), \\ \sigma_2 = \pm\left(\frac{N}{F} - \frac{M}{W_2}\right). \end{cases}$$

[W_1 bzw. W_2 sind die zu Schicht *1* bzw. *2* gehörigen Widerstandsmomente.]

β) Will man die Formeln (III) verwenden, so stellt man (direkt von den Kräften V_A, H_A und P_1) die Momente in bezug auf die Kernpunkte K_1 und K_2 auf, dividiert diese Momente durch die zu den Schichten *1* und *2* gehörigen Widerstandsmomente und erhält die Spannungen:

$$\text{(III a)} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm \dfrac{M_{(K_1)}}{W_1}, \\ \sigma_2 = \pm \dfrac{M_{(K_2)}}{W_2}. \end{cases}$$

Bei dieser Berechnungsmethode mit Hilfe der Kernpunkte wird die Normalkraft N also überhaupt nicht gebraucht.

Spezialfall: Vertikale Belastung.

Für den Fall, daß die Lasten P vertikal abwärts wirken, läßt sich die Berechnung von M und Q bedeutend vereinfachen. In § 60 werden wir diesen Fall im Zusammenhange mit den Einflußlinien eingehend behandeln. Die daselbst gefundenen Resultate mögen aber bereits hier mitgeteilt werden, da sie natürlich auch bei Berechnung ständiger Belastung zu verwenden sind. Es gelten nämlich folgende Beziehungen (Fig. 159a und c):

1. Bei vertikaler Belastung P_1, P_2 usw. ist das Moment M an der Stelle α—α des Dreigelenkbogens genau so groß wie das Moment M_0 an der entsprechenden Stelle α—α eines einfachen horizontalen Balkens mit derselben Belastung P_1, P_2 usw., aber vermindert um das Produkt $H \cdot y_m$.

2. Bei vertikaler Belastung P_1, P_2 usw. ist die Querkraft Q an der Stelle α—α des Dreigelenkbogens genau so groß wie die Querkraft Q_0 an der entsprechenden Stelle α—α eines einfachen horizontalen Balkens mit derselben Belastung P_1, P_2 usw., aber noch multipliziert mit $\cos\beta$, und vermindert um das Produkt $H \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}$. [$\beta$ = Neigungswinkel der Stabachse an der Schnittstelle α—α gegen die Horizontale; α = Neigungswinkel der Kämpferverbindungslinie $\overline{AB}$ gegen die Horizontale.]

In Formeln:

$$\begin{cases} M = M_0 - H \cdot y, & (1) \\ Q = Q_0 \cdot \cos\beta - H \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}. & (2) \end{cases}$$

Der Beweis dieser Formeln wird in § 60, Absatz II und III erfolgen. Es sei hier jedoch bereits auf die Vorteile dieses

Rechnungsganges aufmerksam gemacht: Wir berechnen beim Dreigelenkbogen nur die Horizontalkräfte H_A, H_B der Auflager. [Bei vertikaler Belastung sind beide einander gleich.] Dann kümmern wir uns um den Dreigelenkbogen überhaupt nicht mehr, sondern versetzen die betreffende Belastung auf einen einfachen Balken (Fig. 159c), berechnen für diesen das Moment M_0 und die Querkraft Q_0 der Stelle $\alpha-\alpha$ und haben nach den obigen Formeln auch sofort das Moment M und die Querkraft Q des Dreigelenkbogens.

Beispiel: Es sei in Fig. 159a

$l = 11{,}0\,\text{m}$; $f = 2{,}5\,\text{m}$; $a = 6{,}0\,\text{m}$; $x = 3{,}0\,\text{m}$; $y_m = 2{,}8\,\text{m}$.

Die Belastung sei gleichmäßig über die ganze Spannweite verteilt im Betrage von $g = 0{,}6\,\text{t}$ pro lfd. m. Grundlinie.

Dann ergibt sich der Reihe nach:

$$H = \frac{Mc}{f} = \frac{\frac{1}{2}\,g\,a(l-a)}{f} = \frac{0{,}6\cdot 6{,}0\cdot 5{,}0}{2\cdot 2{,}5} = 3{,}6\,\text{t},$$

$$M_0 = \frac{g}{2}\,x(l-x) = \frac{0{,}6}{2}\,3{,}0\,(11{,}0-3{,}0) = 7{,}2\,\text{mt},$$

$$M = M_0 - H\cdot y = 7{,}2 - 3{,}6\cdot 2{,}8 = -2{,}8\,\text{mt}.$$

Hiermit ist das Moment für den betreffenden Punkt bestimmt.

Aufgabe: Man berechne Q ($\alpha = 10^0$, $\beta = 40^0$). Für Q_0 ist natürlich die für den einfachen Balken abgeleitete Formel $Q = g\cdot x''$ zu verwenden. [In der Verwendung dieser einfachen Formeln beruht eben der Vorteil der Zurückführung eines komplizierten Systems auf den einfachen Balken.]

§ 59.

Berechnung von Fachwerk-Dreigelenkbogen.

Auch beim Fachwerk-Dreigelenkbogen beginnt man natürlich mit der Ermittlung der Auflagerkräfte. Sobald erst diese bekannt sind, geschieht die weitere Untersuchung in derselben Weise wie bei jedem anderen Fachwerke. Die verschiedenen in Betracht kommenden Methoden für ständige Belastung mögen an dem in Fig. 160 gezeichneten Hallenbinder erläutert werden.

I. Bestimmung der Stabkräfte nach Ritter.

Der Hallenbinder in Fig. 160a hat 33,00 m Spannweite und 15,00 m Pfeilhöhe. Die Belastung bestehe aus den Knotenpunktslasten von

$$P = 1490\,\text{kg} \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{1}{2}\,1490 = 745\,\text{kg}$$

der oberen linksseitigen Gurtung. (Belastung durch Schnee auf der linken Dachseite.)

Für die Berechnung der Auflagerkräfte fassen wir diese Knotenpunktslasten zu einer Resultierenden $R = 7450$ kg zusammen. Dann ergeben sich die Kämpferdrücke (vgl. 1. Beispiel von § 56):

$$V_A = 5590\,\text{kg}, \quad H_A = 2050\,\text{kg};$$
$$V_B = 1860\,\text{kg}, \quad H_B = 2050\,\text{kg}.$$

Um nun zum Beispiel die Stabkraft O_7 zu bestimmen, legen wir den Schnitt α—α und betrachten das Gleichgewicht des links oder rechts vom Schnitte liegenden Teiles. Am Teile links greifen an: V_A, H_A, P_1, P_2 und P_3, ferner die Stabkräfte O_7, D_5 und U_5. Um O_7 zu bestimmen, nehmen wir den Schnittpunkt o von D_5 und U_5 als Bezugspunkt für die Momentengleichung und erhalten:

$$(1) \begin{cases} O_7 = \frac{1}{r}(-5590 \cdot 9{,}90 + 2050 \cdot 11{,}80 + 745 \cdot 9{,}90 + 1490 \cdot 6{,}60 + 1490 \cdot 3{,}30) \\ \quad = -4900\,\text{kg}. \end{cases}$$

Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Stäbe bestimmen. Etwas Neues gegenüber dem früheren *Ritter*schen Verfahren ist überhaupt nicht in Anwendung gekommen.

Einfacher ist es jedoch, wir bilden die statischen Momente nicht von den einzelnen Kräften V_A, H_A, P_1 usw., sondern wir vereinen zunächst alle seitlich vom Schnitte liegenden Kräfte zu ihrer Resultierenden. Zu deren Darstellung haben wir ja in § 57 die Mittelkraftlinie kennen gelernt. Diese ist in Fig. 160a mit Hilfe von Fig. 160b eingezeichnet. Nun finden wir die Summe der Momente aller seitlich vom Schnitte α—α liegenden Kräfte, indem wir einfach die Resultierende R_{A-3} mit ihrem Abstande ϱ vom Bezugspunkte multiplizieren. Es wird also

$$O = -\frac{M_o}{r},$$

$$(2) \qquad O = -\frac{R_{A-3} \cdot \varrho}{r}.$$

Die Größe von R_{A-3} entnehmen wir der Fig. 160b; die Abstände ϱ und r greifen wir aus Fig. 160a ab. Somit ist der Stab O durch eine Multiplikation bestimmt.

Hinsichtlich des Vorzeichens ergibt sich: Nach Fig. 160b hat die Resultierende von A, P_1, P_2 und P_3 die Pfeilrichtung nach rechts; folglich wirkt sie in Fig. 160a auf den betrachteten Teil rechtsherum drehend um Bezugspunkt o, folglich muß O linksherum um Punkt o wirken (Druck).

Man muß bei dieser Methode nur aufpassen, daß man zu jedem Schnitte die richtige Resultierende nimmt. So gehören z. B. zur Diagonalen D_6 mit dem Schnitte $\beta-\beta$ die Resultierende R_{A-4} und der Bezugspunkt C. Also wird

$$D_6 = +R_{A-4} \cdot \frac{\varrho'}{r'} .$$

Häufig liegen die Bezugspunkte für die Füllungsstäbe ungünstig. In solchem Falle empfiehlt es sich, diese Methode nur

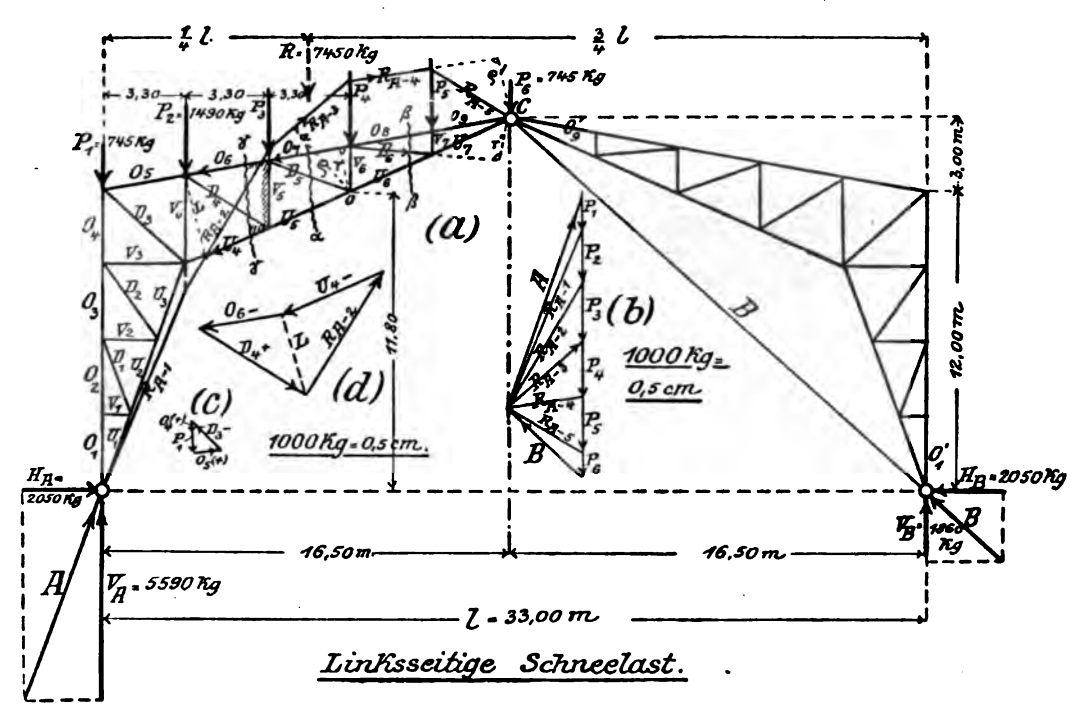


Fig. 160.

zur Berechnung der Gurtstäbe zu verwenden. Die Füllungsstäbe ermittelt man dann aus dem Gleichgewicht der Knotenpunkte, und zwar am einfachsten graphisch, indem man für die einzelnen Knotenpunkte kleine Kräftepolygone zeichnet. Auf diese Weise werden auch die Stäbe gefunden, für die sich kein Bezugspunkt angeben läßt. In Fig. 160a ist D_3 ein solcher Stab. Seine Ermittelung zeigt Fig. 160c.

Übungsaufgabe: Man führe nach dieser Methode die Berechnung vollständig durch!

II. Bestimmung der Stabkräfte nach Culmann.

Diese Methode ist in Fig. 160 zur Bestimmung der Stäbe U_4, D_4 und O_6 benutzt. Der hierzu gehörige Schnitt ist γ—γ. Die Resultierende der seitlich vom Schnitte vorhandenen äußeren Kräfte ist R_{A-2}. Nun bringen wir, wie immer bei der *Culmann*schen Methode, die eine von den drei Stabkräften mit der äußeren Kraft (R_{A-2}) und die beiden anderen miteinander zum Schnitt. Dann verbinden wir die beiden Schnittpunkte durch die Gerade L und zerlegen (Fig. 160d) zunächst R_{A-2} nach U_4 und L, und schließlich L nach O_6 und D_4. Hiermit sind die drei Stäbe U_4, D_4 und O_6 gefunden.

Dann geht man zu den nächsten drei Stäben, die zu einem Schnitte gehören, usw.

III. Bestimmung der Stabkräfte mittels Kräfteplan.

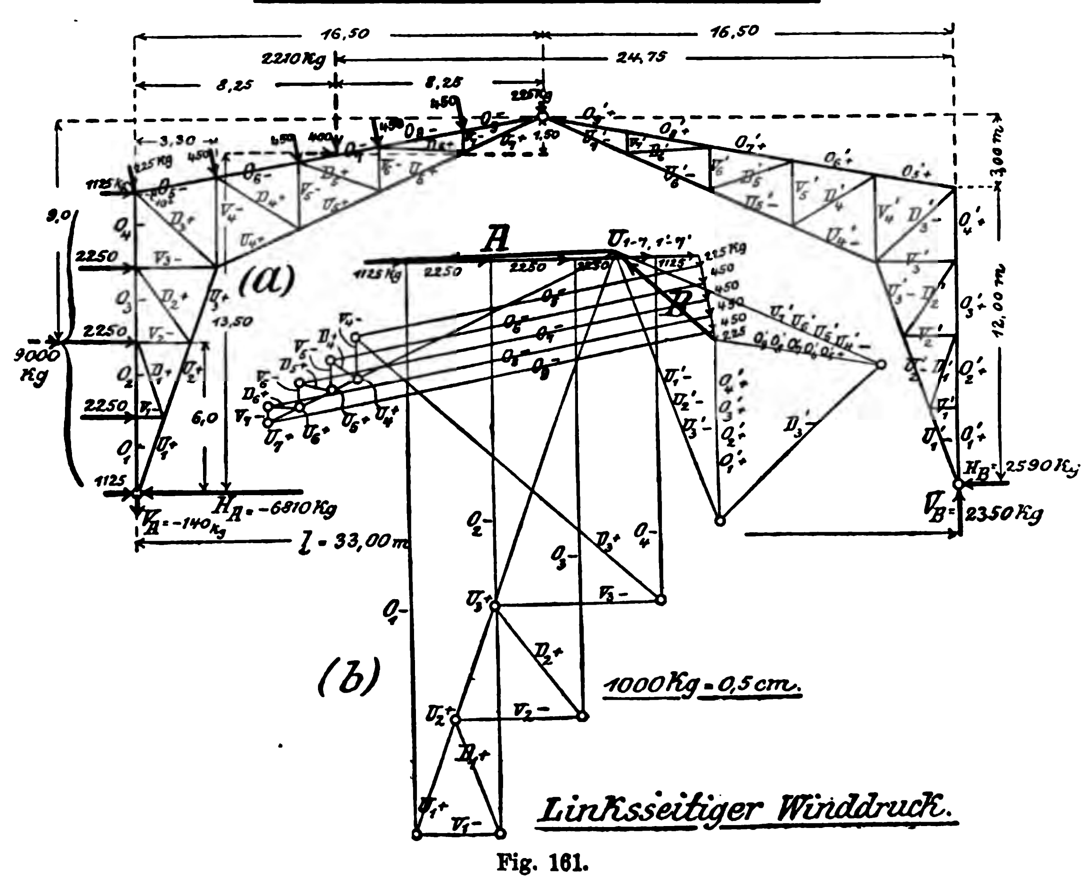


Fig. 161.

Etwas Neues gegenüber den sonstigen Kräfteplänen ist nicht zu sagen. Als Beispiel möge der vornin untersuchte Dreigelenkbogen, aber mit anderer Belastung, vorgeführt werden. Und zwar möge jetzt Belastung rechtwinklig zu der linken Außenhaut der Halle angenommen werden. (Linksseitiger Wind.)

Zur einfacheren Berechnung der Kämpferdrücke sind die Knotenpunktslasten zu vertikalen und horizontalen Resultierenden zusammengefaßt: 2210 kg, 400 kg und 9000 kg. Aus diesen ergeben sich folgende Auflagerkräfte (vgl. 3. Aufgabe in § 56):

$$V_A = 140 \text{ kg} \downarrow, \quad H_A = 6810 \text{ kg} \leftarrow;$$
$$V_B = 2350 \text{ kg} \uparrow, \quad H_B = 2590 \text{ kg} \leftarrow.$$

Zu diesen Auflagerkräften und Lasten ist dann in Fig. 161b der Kräfteplan gezeichnet. (Die Seitenkräfte V_A und H_A, V_B und H_B sind zu A und B zusammengesetzt.) Da die äußeren Kräfte rechtsherum aufgetragen sind, ist auch an jedem Knotenpunkte rechtsherum gegangen. Es zeigt sich, daß auf der rechten Seite alle Füllungsstäbe außer D_3' spannungslos werden.

Beim Aufzeichnen des Kräfteplanes empfiehlt es sich, ungefähr die eine Hälfte von A aus und die andere von B aus zu zeichnen. In der Mitte muß man dann richtig zusammenkommen.

8. Vortrag:

Der Dreigelenkbogen mit beweglicher Belastung.

Die Wirkung einer beweglichen Belastung untersuchen wir mittels Einflußlinien. Wie immer bei beweglichen Lasten, beschränken wir uns auf vertikal abwärts wirkende Kräfte.

§ 60.

Einflußlinien für Auflagerkräfte, Momente, Querkräfte, Normalkräfte.

I. Einflußlinien für die Auflagerkräfte.

1. Aufstellen der Kräfte und Vergleich mit einfachem Balken.

Bei dem Dreigelenkbogen Fig. 162a mögen die Kämpferdrücke wieder in die Seitenkräfte Y_A und Z_A, und Y_B und Z_B zerlegt sein. Und zwar sind von diesen bekanntlich:

Y_A und Y_B vertikal,

Z_A und Z_B in Richtung der Kämpferverbindungslinie.

Diese Zerlegung wird sich als zweckmäßig erweisen, da wir hierdurch den Dreigelenkbogen mit dem einfachen Balken vergleichen

können. Wie sich in § 55 ergeben hatte, bestehen nämlich für den vorliegenden Spezialfall: vertikale Belastung, folgende Ähnlichkeiten zwischen Dreigelenkbogen und einfachem Balken (vgl. § 56, „Wiederholung"):

1) Die Seitenkraft Y_A des Kämpferdruckes ist bei senkrechter Belastung für jede Laststellung ebenso groß, wie der Auflagerdruck A_0 eines einfachen Balkens mit derselben Belastung P (Fig. 162b).

2) Die Seitenkraft Z_A des Kämpferdruckes ist gleich dem Biegungsmoment für die Stelle C dieses gedachten Balkens, dividiert durch das Lot n von C auf die Kämpferverbindungslinie.

3) Die Horizontalprojektion H_A der Seitenkraft Z_A ist gleich dem Biegungsmoment M_C, aber dividiert durch den Stich f des Bogens,

[In einigen Fällen wird es bequemer sein, mit H_A statt direkt mit Z_A zu arbeiten. Deshalb ist H_A besonders aufgeführt. Ist die Kämpferverbindungslinie horizontal, so geht H_A in Z_A über.]

Wegen dieser Übereinstimmungen 1), 2) und 3) folgt sofort:

1) Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A_0 des Balkens Fig. 162b ist gleichzeitig Einflußlinie für die Seitenkraft Y_A des Dreigelenkbogens;

2) die Einflußlinie für das Moment M_C des Balkens, aber noch dividiert durch die Strecke n ist Einflußlinie für die Seitenkraft Z_A des Dreigelenkbogens;

3) die Einflußlinie für das Moment M_C des Balkens, dividiert durch den Stich f des Bogens, ist Einflußlinie für die Horizontalprojektion H_A der Kraft Z_A.

2. Aufzeichnen der Einflußlinien.

In Fig. 162c—e sind hiernach die Einflußlinien für Y_A, Z_A und H_A gezeichnet:

a) Die Einflußlinie für $A_0 = Y_A$ entsteht in bekannter Weise durch Auftragen von $A'C' = 1{,}0$ t (Fig. 162c).

b) Die Einflußlinie für das Moment an der Stelle C des Balkens Fig. 162b würde entstehen, indem man von einer Nullachse $A'B'$ aus den Abstand a des Punktes C als Ordinate $A'C'$ aufträgt (vgl. Band I, § 65, Fig. 110e). Da wir jetzt aber nicht das Moment M_C, sondern den Wert $M_C : n$ haben wollen, tragen wir $A'C'$ nicht gleich a, sondern gleich $a : n$ auf (Fig. 162e). Hierdurch ist die Einflußlinie für Z_A bestimmt.

c) Tragen wir schließlich $A'C' = a : f$ auf (Fig. 162d), so er-

scheint die Einflußlinie für das Moment M_C im $(1:f)$-fachen Maßstabe. Das heißt, wir erhalten hierdurch die Einflußlinie für die Horizontalkomponente H_A.

Da $H_A = Z_A \cdot \cos\alpha$ ist, so verhalten sich natürlich die Ordinaten von Fig. 162d zu denjenigen von Fig. 162e wie $\cos\alpha : 1$. Liegen die Kämpfer in gleicher Höhe, so sind Z_A und H_A dasselbe.

Schließlich sei daran erinnert, daß, da die Belastung vertikal ist, $H_A = H_B$ und folglich auch $Z_A = Z_B$ ist, wie aus der Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$ folgt.

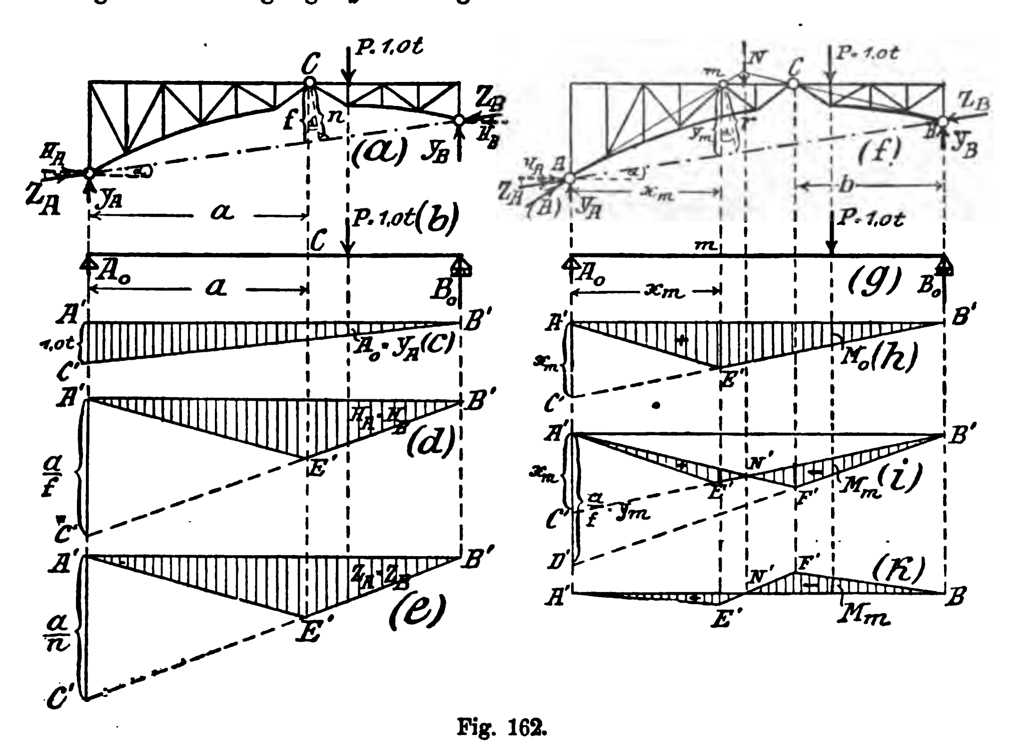


Fig. 162.

Im folgenden werden wir zur Berechnung der Momente die Vertikalkomponente Y_A und die Horizontalprojektion H_A der Komponente Z_A verwenden; dagegen zur Berechnung der Querkräfte und Stabkräfte die Vertikalkomponente Y_A und die schräge Komponente Z_A selber.

II. Einflußlinie für das Moment M.

1. Formel für M_m und Vergleich mit einfachem Balken.

Das Moment für einen Punkt m eines vollwandigen Bogens (Schwerpunkt bzw. Kernpunkt) oder eines Fachwerkbogens (Knoten-

punkt) ergibt sich auf folgende Weise: Für den Punkt m in Fig. 162f lautet der analytische Ausdruck für das Moment:

$$\text{(I)} \qquad M_m = +Y_A \cdot x_m - Z_A \cdot r.$$

[r = Lot von Punkt m auf die Kraft Z_A, d. h, auf die Verbindungslinie $\overline{AB}$.]

Nun ist nach Fig. 162f:

$$r = y_m \cdot \cos\alpha.$$

[α = Steigungswinkel der Linie $\overline{AB}$; y_m absolut vertikal gezogen.] Setzen wir diesen Wert in Formel (I) ein, so wird:

$$M_m = +Y_A \cdot x_m - Z_A \cdot y_m \cdot \cos\alpha$$

$$= +Y_A \cdot x_m - (Z_A \cos\alpha)\, y_m,$$

$$\text{(II)} \qquad M_m = +Y_A \cdot x_m - H_A \cdot y_m.$$

Hiermit haben wir M_m durch Y_A und durch die Horizontalkomponente H_A von Z_A ausgedrückt. Der Vorteil von Formel (II) ist der, daß der Abstand y_m einfacher zu messen ist als r.

Um nun dieses Moment mit dem eines einfachen Balkens für dieselbe Stelle m und für dieselbe Belastung zu vergleichen (Fig. 162g), beachten wir, daß Y_A gleich dem Auflagerdruck A_0 dieses einfachen Balkens ist. Wir können den Ausdruck M_m also auch schreiben:

$$\text{(IIa)} \qquad M_m = A_0 \cdot x_m - H_A \cdot y_m.$$

Das Produkt $A_0 \cdot x_m$ ist aber nichts anderes als das Biegungsmoment an der Stelle m dieses (zum Vergleiche herangezogenen) einfachen Balkens. Es werde M_0 genannt, so daß sich für M_m die Form ergibt:

$$M_m = M_0 - H_A \cdot y_m.$$

In Worten: *Das Moment an der Stelle m des Dreigelenkbogens ist ebenso groß wie das Moment M_0 an der Stelle m eines entsprechend belasteten einfachen Bogens vermindert um das Produkt $H_A \cdot y_m$* (Fig. 162f und g).

Diese Aussage gilt für jede Laststellung, auch dann, wenn die Last links vom Punkte m rückt. Denn es treten am Dreigelenkbogen immer dieselben Kräfte $Y_A (= A_0)$ und P wie beim einfachen Balken auf; nur daß außerdem noch die Bogenkraft Z_A bzw. deren Komponente H_A hinzukommt.

2. Zeichnerische Darstellung.

Um also für alle Laststellungen das Moment M_m graphisch darzustellen, werden wir so vorgehen: Wir zeichnen zunächst die

Einflußlinie für das Moment M_m des einfachen Balkens (Linie $A'E'B'$ in Fig. 162h). Hiervon subtrahieren wir dann die im y_m fachen Maßstabe gezeichnete H_A-Linie (Linie $A'E'B'$ in Fig. 162d). Auf diese Weise entsteht die in Fig. 192i schraffierte Fläche. **Sie ist die Einflußfläche für das Moment M_m des Dreigelenkbogens.**

Für das Aufzeichnen beachte man, daß die Einflußlinie für das Moment M_m eines einfachen Balkens ihre Spitze unter m hat (Fig. 162h). Die Einflußlinie für die Kraft H_A (und also auch diejenige für das Produkt $H_A \cdot y_m$) hat ihre Spitze unter dem Gelenkpunkt C (Fig. 162d). Die Einflußlinie für das Moment M_m des Dreigelenkbogens erscheint also als die Differenz zweier Dreiecke mit gegeneinander verschobenen Spitzen und verschiedenen Höhen.

Man kann die Ordinaten der durch Fig. 162i gefundenen Flächen noch von einer besonderen Nullachse auftragen und erhält dann ein anschaulicheres Bild (Fig. 162k).

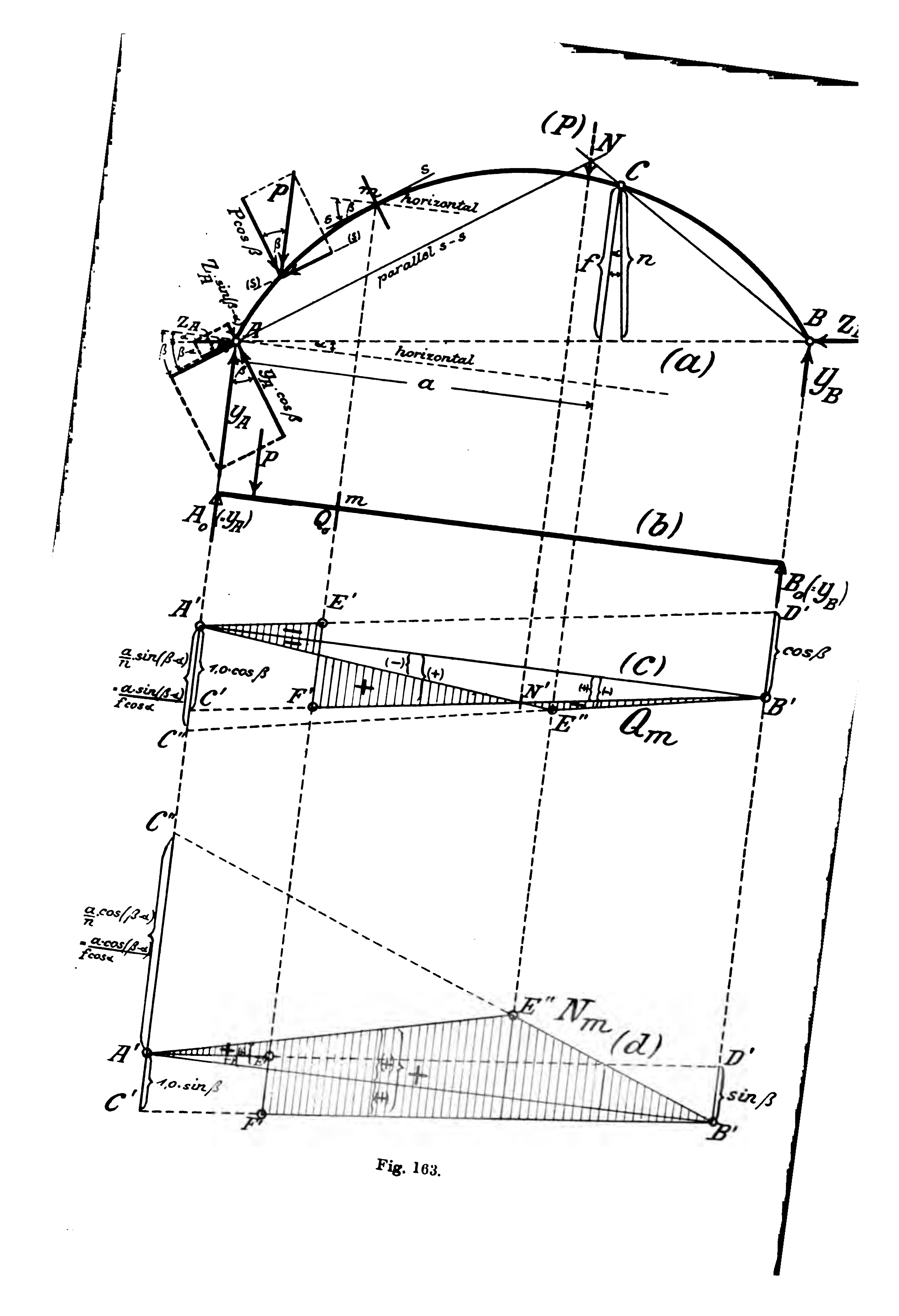
Vereinfachung: Ziehen wir in Fig. 162f eine Linie durch das Auflager A und den Punkt m, dessen Moment berechnet werden soll, und eine zweite Linie durch die Punkte B und C, so hat der Schnittpunkt N dieser beiden Linien $\overline{Am}$ und $\overline{BC}$ folgende Eigenschaft: Eine in N stehende Last erzeugt für den Punkt m des Dreigelenkbogens das Moment $M_m = o$.

Beweis: Konstruiert man zu dieser Laststellung den Kämpferdruck A, so hat dieser die Richtung $\overline{AN}$ (vgl. Fig. 147a). Er geht also durch den Punkt m hindurch, so daß dessen Moment $M = A \cdot o = o$ ist.

Der Punkt N in Fig. 162f bedeutet also die Lastscheide für das Moment M_m. Eine Last links von N erzeugt ein positives Moment M_m; eine Last rechts von N erzeugt ein negatives M_m.

Mit Hilfe der Lastscheide N läßt sich das Aufzeichnen der Einflußlinie für M_m vereinfachen: Wir zeichnen das Dreieck $A'E'B'$ (Fig. 162i), loten N hinunter, bestimmen hierdurch den Punkt N' und zeichnen $A'N'F'B'$. Hierdurch ist die ganze Einflußlinie bestimmt.

Zusatz: Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, wie sehr durch den Horizontalschub H das Biegungsmoment verringert wird. Wenn Fig. 162f als ein einfacher Balken mit einem festen und einem beweglichen Lager ausgebildet wäre, so wäre $A'E'B'$ in Fig. 162h die Einflußlinie für das Moment an der Stelle m. Jetzt, beim Dreigelenkbogen, kommt aber das Produkt $H \cdot y_m$ in Abzug. Man sieht aus dem Vergleiche von Fig. 162h mit 162i, wie günstig der Horizontalschub einwirkt. Daher kommt es, daß der Dreigelenkbogen hinsichtlich des Materialaufwandes ein sehr gutes System ist.



(P)
N
C
P
horizontal
s
m
Pcos β
β
parallel s-s
f
n
B
Z
A
horizontal
a
(a)
y_B
y_A
y_A cos β
P
m
A_o (=y_A)
Q_o
(b)
B_o (=y_B)
A'
E'
D'
cos β
1,0·cos β
(c)
C'
F'
N'
B'
E''
Q_m
C''
C''
E'' N_m
(d)
A'
D'
1,0·sin β
sin β
C'
F'
B'

Fig. 163.

III. Einflußlinie für die Querkraft Q.

1. Formel für Q_m und Vergleich mit einfachem Balken.

Die Auflagerkraft bei A sei wieder zerlegt in die beiden Kräfte Y_A und Z_A. Mit Hilfe dieser Kräfte werde die Einflußlinie für die Querkraft an der Stelle m bestimmt (Fig. 163).

Der Neigungswinkel der Stabachse s—s an dem zu untersuchenden Querschnitte m sei β. Ziehen wir nun durch den Kämpferpunkt A die Parallele zu s—s, so erscheint bei Y_A ebenfalls der Winkel β und bei Z_A erscheinen die Winkel α (Steigungswinkel der Kämpferverbindungslinie), β und β—α. Zerlegen wir nun die Kräfte Y_A, Z_A und die Last P, die für den Schnitt m zu berücksichtigen sind, rechtwinklig zur Stabachse s—s und in Richtung derselben, so ergibt sich die Querkraft Q_m:

(III) $$Q_m = Y_A \cdot \cos\beta - Z_A \sin(\beta - \alpha) - P \cdot \cos\beta\,.$$

[Vgl. die Aufstellung von Q_m in § 58, II. Damals — bei schräger Belastung — wurden aber V_A und H_A verwendet.]

Für das Folgende formen wir die Formel (III) um in:

(III a) $$Q_m = (Y_A - P) \cdot \cos\beta - Z_A \cdot \sin(\beta - \alpha)\,.$$

Hiermit wollen wir wieder einen einfachen Balken vergleichen (Fig. 163b), der in derselben Weise belastet ist wie der Dreigelenkbogen. Zunächst stimmt der Auflagerdruck A_o dieses Balkens überein mit der Vertikalprojektion Y_A des Kämpferdruckes vom Dreigelenkbogen. Bilden wir ferner die Querkraft für die Stelle m dieses einfachen Balkens, so erhalten wir:

$$Q_o = A_o - P\;(= Y_A - P)\,.$$

Der Vergleich mit der Formel (III a) liefert den Satz:

Die Querkraft Q_m an der Stelle m des Dreigelenkbogens ist gleich der Querkraft Q_o an der Stelle m eines entsprechend belasteten einfachen Balkens, multipliziert mit dem Cosinus des Neigungswinkels des Bogens an der Stelle m und vermindert um das Produkt $Z_A \cdot \sin(\beta - \alpha)$.

Statt mit Z_A zu arbeiten, kann man auch dessen Horizontalprojektion H_A einführen:

$$H_A = Z_A \cdot \cos\alpha\,; \qquad Z_A = \frac{H_A}{\cos\alpha}\,,$$

so daß die obige Formel (III a) geschrieben werden kann:

(III b) $$\begin{cases} Q_m = Q_o \cdot \cos\beta - Z_A \cdot \sin(\beta - \alpha)\,, \\ Q_m = Q_o \cdot \cos\beta - H_A \cdot \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\,. \end{cases}$$

2. Zeichnerische Darstellung.

Aus der obigen Gegenüberstellung folgt sofort die graphische Festlegung des Ausdruckes für Q_m: Wir zeichnen zunächst die Einflußlinie für die Querkraft Q_o der Stelle m eines einfachen Balkens $\overline{A_o B_o}$, und zwar im $(\cos\beta)$fachen Maßstabe. Hiervon subtrahieren wir dann die mit $\sin(\beta - \alpha)$ multiplizierte Z-Fläche.

Dieses ist in Fig. 163c geschehen: Die Einflußlinie für die Querkraft an der Stelle m des einfachen Balkens Fig. 163b wäre dargestellt durch eine Fläche $A'E'F'B'$, die gewonnen wird durch Auftragen der Werte $A'C' = B'D' = 1{,}0$ t (vgl. Band I, § 65, Fig. 109). Jetzt werden wir nicht 1,0 t, sondern $1{,}0 \cdot \cos\beta = \cos\beta$ auftragen und erhalten die Q_o-Fläche im $(\cos\beta)$fachen Maßstabe. Der rechte Teil derselben ist positiv, der linke negativ.

Hiervon subtrahieren wir nun das Dreieck $A'E'B'$ aus Fig. 162e, aber multipliziert mit $\sin(\beta - \alpha)$. Das heißt, wir ziehen in Fig. 163c ein Dreieck $A'E''B'$ ab, das gewonnen wird durch Auftragen von $\frac{a}{n}\sin(\beta - \alpha)$. [Da das Lot n aus der Systemfigur unbequem abzugreifen ist, kann man es auch ersetzen durch $f \cdot \cos\alpha$.] Dann entsteht die gesamte Einflußfläche für die Querkraft Q_m an der Stelle m des Dreigelenkbogens.

Die Vorzeichen sind: Bei der Q_o-Fläche rechts positiv, links negativ; bei Z_A überall positiv, also bei $-Z_A$ überall negativ. Daraus resultieren die in Fig. 163c eingeschriebenen endgültigen Vorzeichen.

Vereinfachung: Ziehen wir in Fig. 163a durch das Auflager A die Parallele zur Stabachse s—s und ferner die Verbindungslinie $\overline{BC}$, so hat der Schnittpunkt N dieser beiden Linien $\overline{(s)-(s)}$ und $\overline{BC}$ folgende Eigenschaft: Eine in N stehende Last erzeugt für den betrachteten Querschnitt m die Querkraft $Q_m = 0$.

Beweis: Konstruiert man zu dieser Laststellung den Kämpferdruck A, so geht dieser in Richtung der Linie $\overline{AN}$, also parallel der Stabachse s—s an der betrachteten Stelle m (vgl. Fig. 147a). Daraus folgt, daß bei dieser Laststellung für den Querschnitt m wohl eine Normalkraft N entsteht ($N = A$), aber keine Querkraft Q. (Die Komponente rechtwinklig zu s—s wird zu Null.)

Dem Punkte N in Fig. 163a muß also eine Ordinate „Null" in der Einflußlinie entsprechen. Das heißt: Lotet man den Punkt N hinunter, so ist hierdurch der Nullpunkt N' der Einflußlinie bestimmt. Punkt N nennen wir eine „Lastscheide", weil an dieser Stelle die Einflußlinie ihr Vorzeichen wechselt.

Mit Hilfe dieses Punktes N' kann dann die Aufzeichnung der Einflußlinie in folgender Weise geschehen: Wir zeichnen die Linie $A'E'F'B'$, bestimmen Punkt N', ziehen die Linie $A'N'$ bis zum Punkte E'' unter dem Mittelgelenk und verbinden E'' mit B'. Auf diese Weise entsteht die Einflußlinie ohne die Werte $(a:n)\cdot\sin(\beta-\alpha)$.

IV. Einflußlinie für die Normalkraft N.

Für die Normalkraft N des Schnittes m ergibt sich der Ausdruck (aus Fig. 163a abzuleiten):

(IV) $$N = Y_A\cdot\sin\beta + Z_A\cdot\cos(\beta-\alpha) - P\cdot\sin\beta\,,$$

(IVa) $$N = (Y_A - P)\cdot\sin\beta + Z_A\cdot\cos(\beta-\alpha)\,.$$

Mit Rücksicht darauf, daß $Y_A = A_0$ eines einfachen Balkens ist, schreiben wir den obigen Ausdruck:

(IVb) $$N = \underbrace{(A_0 - P)}_{Q_0}\cdot\sin\beta + Z_A\cdot\cos(\beta-\alpha)$$

und erkennen, daß er sich ebenfalls durch die Querkraft Q_0 ausdrücken läßt. (Dies ist natürlich nur eine rein mathematische Übereinstimmung.) Nach Formel (IVb) folgt dann ohne weiteres die in Fig. 163d gegebene Darstellung der Einflußlinie für N.

V. Aufzeichnen der Einflußlinien für M und Q mittels stellvertretender Balken.

Bei der Entwicklung der Einflußlinien haben wir stets einen einfachen Balken $\overline{AB}$ zum Vergleiche herangezogen. Auf diese Weise ergaben sich dann die in Fig. 162i und Fig. 163c gezeichneten Flächen mit ihren positiven und negativen Teilen.

Noch weitere Vereinfachungen ergeben sich, wenn man den Dreigelenkbogen ACB nicht mit einem einfachen Balken $\overline{AB}$ vergleicht, sondern mit kürzeren Balken, die sich nur über einzelne Teile der Einflußlinie ausdehnen. Es sind dies die (von Professor *Müller-Breslau* eingeführten) sog. „stellvertretenden Balken“. Und zwar lassen sich auf diese Weise hauptsächlich die Einflußlinien für M und Q vereinfachen.

1. Stellvertretender Balken für M.

Zur Wiederholung ist in Fig. 164b und c die Einflußlinie für das Moment M_m eines einfachen Balkens AN (Fig. 164a) gezeichnet. Die Nullachse wurde wegen des Folgenden mit $A'N'$ bezeichnet. Im übrigen bietet Fig. 164b überhaupt nichts Neues.

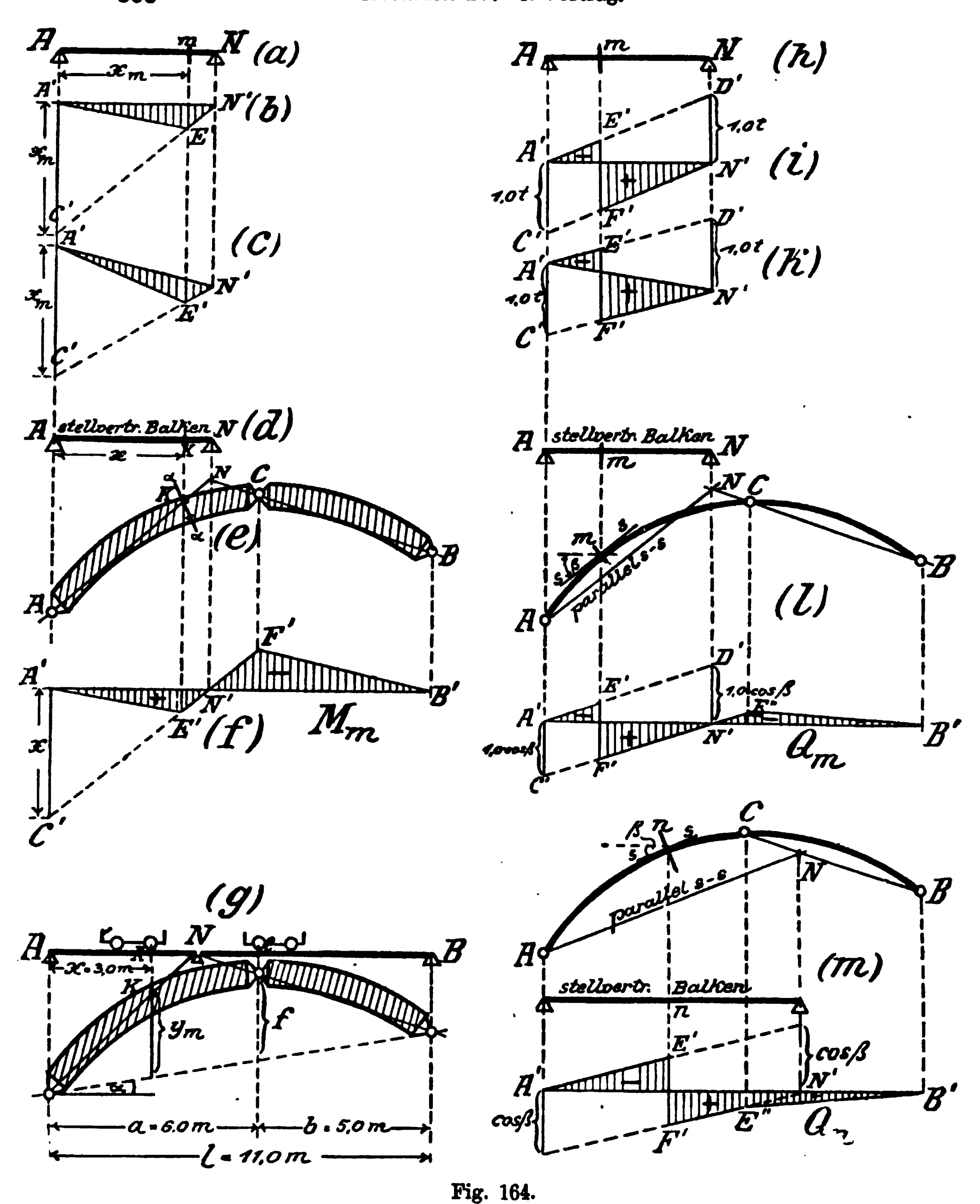


Fig. 164.

Durch Fig. 164c sollte aber hervorgehoben werden, daß man die Nullachse $A'N'$ auch **schräg** annehmen kann und dann durch Auftragen von $A'C' = x_m$, usw. ebenfalls die Einflußlinie für das

Moment M_m des Balkens $\overline{AN}$ erhält. Denn die Ordinaten einer Einflußlinie werden stets vertikal gemessen, so daß sie sich in Fig. 164c ebenso lang ergeben wie in Fig. 164b.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir die Einflußlinie für das Moment M_m eines Dreigelenkbogens, Fig. 162i. Hier zeigt sich: Der Teil $A'E'N'$ stellt ein Dreieck dar mit einer schrägen Nullachse $A'N'$, mit der Ordinate $A'C' = x_m$ unter dem Auflager A, und mit der Spitze E' unter dem zu untersuchenden Punkte m. Vergleichen wir nun dieses Dreieck $A'E'N'$ in Fig. 162i mit dem Dreiecke $A'E'N'$ in Fig. 164c, so ergibt sich folgende Übereinstimmung:

Der positive Teil der Einflußfläche für das Moment an der Stelle m eines Dreigelenkbogens stimmt vollständig überein mit der Einflußfläche für das Moment an der entsprechenden Stelle m eines einfachen Balkens, der sich vom Auflager A bis zu der Lastscheide N des Dreigelenkbogens erstrecken würde. (Satz I.)

Dieser (gedachte) Balken heißt deshalb der „stellvertretende Balken".

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun die Einflußlinie für das Moment eines Dreigelenkbogens sehr einfach aufzeichnen.

Ist beispielsweise für den vollwandigen Bogen Fig. 164e das Moment für den Kernpunkt K zu ermitteln, so bestimmen wir zunächst die zu dem Punkte K gehörige Lastscheide N (Fig. 164e; vgl. auch Fig. 162f). Dann denken wir uns einen horizontalen Balken von der Länge $\overline{AN}$ (Fig. 164d) und zeichnen für dessen Punkt K in der gewöhnlichen Weise die Einflußlinie $A'E'N'$ für das Moment M_K (Fig. 164f). Hierdurch ist der positive Teil der Einflußlinie bereits bestimmt. Um auch noch den negativen Teil zu finden, verlängern wir $E'N'$ bis zum Punkte F' unter dem Mittelgelenk und zeichnen $\overline{F'B'}$. Dann haben wir die ganze Einflußlinie und zwar bereits abgetragen von einer horizontalen Nullachse $A'B'$.

Zusatz: Diese Vereinfachung durch den stellvertretenden Balken kommt nicht nur den Einflußlinien zugute, sondern ermöglicht auch in vielen Fällen eine rein analytische Behandlung des Dreigelenkbogens. Zu diesem Zwecke wollen wir auch noch den negativen Teil der Einflußfläche eines Dreigelenkbogens durch die Einflußfläche eines einfachen Balkens ausdrücken.

Denken wir uns in Fig. 162i die Linie $N'F'$ nach rechts verlängert, so würde sie auf der Vertikalen durch B' augenscheinlich den Abstand $\frac{b}{f} \cdot y_m$ abschneiden, worin b die horizontale Entfernung

des Mittelgelenkes C vom Lager B ist. Denkt man sich nun in Fig. 162f einen horizontalen Balken von der Länge $\overline{BN}$, so wäre dessen Einflußfläche für das Moment an der Stelle C gleich dem Dreieck $B'F'N'$ von Fig. 162i, nur daß unter B' nicht die Strecke $\frac{b}{f} \cdot y_m$, sondern die Strecke b aufzutragen wäre. Aus dieser Übereinstimmung folgt:

Der negative Teil der Einflußfläche für das Moment an der Stelle m eines Dreigelenkbogens ist gleich dem Momente an der Stelle C eines stellvertretenden Balkens $\overline{BN}$, letzteres Moment aber noch multipliziert mit dem Faktor $\frac{y_m}{f}$. (Satz II.)

Somit haben wir sowohl für den positiven als auch für den negativen Teil der Einflußfläche eines Dreigelenkbogens stellvertretende Balken eingeführt. Die Vorteile für die analytische Behandlung werden aus folgendem Beispiele ersichtlich sein.

Beispiel: Es sei für den Dreigelenkbogen Fig. 164g:
$l = 11{,}0$ m; $b = 5{,}0$ m; $f = 2{,}5$ m; $x = 3{,}0$ m; $y_m = 2{,}8$ m; $\alpha = 10^0$.
Die Belastung sei eine bewegliche, gleichmäßig verteilte Last von $p = 0{,}6$ t/m. Für den Punkt K soll das größte positive und negative Moment berechnet werden.

Wir zeichnen den Bogen nach diesen Angaben auf, bestimmen die Lage der Lastscheide N und greifen deren Abstände ab:

$$\overline{AN} = 3{,}9 \text{ m}, \qquad \overline{BN} = 7{,}1 \text{ m}.$$

Dann ergeben sich sofort die gesuchten größten Momente der Stelle K des Dreigelenkbogens, indem man für den Punkt K des stellvertretenden Balkens AN und für den Punkt C des stellvertretenden Balkens BN die größten Momente bestimmt. (Bei $\overline{BN}$ noch multipliziert mit $y_m : f$.) Die letzteren Momente treten, da es sich um einfache Balken handelt, bekanntlich bei Vollbelastung des Balkens auf, so daß sich ergibt:

$$\underset{+}{M} = \frac{1}{2} 0{,}6 \cdot 3{,}0 (3{,}9 - 3{,}0) = +0{,}8 \text{ mt},$$

$$\underset{-}{M} = \left[\frac{1}{2} 0{,}6 \cdot 5{,}0 (7{,}1 - 5{,}0)\right] \frac{2{,}8}{2{,}5} = -3{,}5 \text{ mt}.$$

Die Summe dieser beiden Momente gibt natürlich das Moment für Vollbelastung (vgl. dessen Berechnung in § 58, Schluß). Hierdurch hat man eine erwünschte Kontrolle.

Übungsaufgabe: Berechne die größten Momente für den Punkt K in Fig. 164g infolge eines aus zwei Einzellasten bestehenden Lasten-

schemas. [Die maßgebenden Laststellungen sind bereits eingezeichnet.]

Auch bei Eisenbahnbrücken wird man auf diese Weise den Dreigelenkbogen durch stellvertretende Balken ersetzen, und für diese Balken die Berechnung der größten Momente auf Grund der für Eisenbahnbelastung aufgestellten Tabellen durchführen.

2. Stellvertretender Balken für Q.

Für die Querkraft Q eines Dreigelenkbogens ist dieselbe Entwicklung: Zunächst machen wir uns in Fig. 164k klar, daß man die Einflußlinie für die Querkraft Q_m eines einfachen Balkens $\overline{AN}$ (Fig. 164h) auch von einer schrägen Nullachse aus auftragen kann (Fig. 164k). Der Vergleich einer solchen Einflußlinie mit dem Teile $A'E'F'N'$ der Einflußlinie Fig. 163o für einen Dreigelenkbogen zeigt die Übereinstimmung:

Der Teil $A'E'F'N'$ der Einflußfläche für die Querkraft an der Stelle m eines Dreigelenkbogens ist gleich der Einflußfläche für die Querkraft an der entsprechenden Stelle m eines stellvertretenden Balkens, der sich von A bis zur Lastscheide N erstreckt, letztere Einflußfläche aber im $(\cos\beta)$fachen Maßstabe aufgetragen.

Hierdurch ergibt sich folgende Konstruktion für die Einflußfläche der Querkraft Q_m: Um für die Stelle m von Fig. 164l die Einflußlinie für Q_m zu erhalten, ziehen wir durch den Auflagerpunkt A die Parallele zu der Richtung, die die Stabachse s—s an der zu untersuchenden Stelle m hat, und ferner die Verbindungslinie $\overline{BC}$. Diese beiden Linien bestimmen die Lastscheide N für die Querkraft Q_m. Nun denken wir uns einen Balken $\overline{AN}$ (Fig. 164l) und zeichnen dessen Einflußlinie für die Querkraft des Schnittes m, aber noch multipliziert mit $\cos\beta$. [Wir tragen also $A'C' = N'D'$ nicht $= 1{,}0$ t, sondern $= 1{,}0 \cdot \cos\beta$ (t) auf.] Hierdurch ist der Teil $A'E'F'N'$ der Einflußlinie bereits bestimmt. Nun verlängern wir $F'N'$ bis zum Punkte E'' unter dem Mittelgelenk, verbinden E'' mit B' und haben die ganze Einflußlinie, abgetragen von einer horizontalen Nullachse. (Vgl. Fig. 164l und Fig. 163c.)

In Fig. 164m ist noch für einen anderen Punkt n die Querkraft bestimmt. Jetzt kommt der Punkt N rechts von C zu liegen. Im Prinzip wird die Zeichnung aber nicht geändert. Nur braucht die Linie $F'N'$ nicht verlängert zu werden, sondern der Punkt E'' liegt bereits vor dem Nullpunkte N'. Hierdurch ändern sich die Vorzeichen, indem der ganze rechte Teil im positiven Bereiche bleibt.

Zum Schlusse der Hinweis: Greift die Belastung **indirekt** an, so müssen die Belastungspunkte hinuntergelotet werden und die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden werden. Auf diese Weise entstehen dann die bekannten Abschrägungen.

§ 61.

Einflußlinien für die Stabkräfte.

Die Einflußlinien für die Stabkräfte eines Dreigelenkbogens wollen wir ebenfalls auf die entsprechenden Einflußlinien eines einfachen (Fachwerk-)Balkens zurückführen.

1. Aufstellung der Formel nach *Ritter*.

Zunächst schreiben wir den analytischen Ausdruck für die Stabspannung an. Für den Stab S in Fig. 165a ergibt sich, wenn man für den Bezugspunkt s die Momentengleichung anschreibt und das Gleichgewicht des links vom Schnitte liegenden Teiles betrachtet:

$$\text{I)} \qquad S = \frac{1}{r_s}(+Y_A \cdot y_s - Z \cdot z_s - P_1 \cdot p_1),$$

$$\text{(Ia)} \qquad S = \frac{1}{r_s}(Y_A \cdot y_s - P_1 \cdot p_1) + Z \cdot \left(-\frac{z_s}{r_s}\right).$$

Wenn nun andererseits Fig. 165a kein Dreigelenkbogen, sondern ein einfacher Fachwerkträger auf zwei Stützen wäre, wie Fig. 165b zeigt, so wäre die Spannkraft S:

$$\text{(II)} \qquad S_0 = \frac{1}{r_s}(A_0 \cdot y_s - P_1 \cdot p_1).$$

[Der Index „0" soll stets andeuten, daß es sich um den nur zum Vergleiche herangezogenen Balken handelt.]

Da nun ferner A_0 aus Fig. 165b gleich Y_A aus Fig. 165a ist, so ergibt sich:

Die Spannkraft S des Dreigelenkbogens ist gleich der Spannkraft S_0 des entsprechenden Stabes vom einfachen Fachwerkträger, vermehrt um den Einfluß der schrägen Seitenkraft Z. Und zwar ist dieser Einfluß nach Formel (Ia) gleich

$$Z \cdot \left(-\frac{z_s}{r_s}\right).$$

Der Bruch $-\frac{z_s}{r_s}$ ist ein für den betreffenden Stab feststehender Wert, der sich aus der Systemfigur ergibt. Somit haben wir die

Spannkraft S des Dreigelenkbogens dargestellt durch die Spannkraft S_0 des entsprechenden einfachen Balkens und durch den mit einem bestimmten Faktor multiplizierten Wert Z.

2. Allgemeine Darstellung.

Zu einer etwas allgemeineren Darstellung, die die vorige einschließt, gelangen wir durch Betrachtung des neben Z stehenden Faktors $z_s : r_s$. Dieser bedeutet nämlich nichts anderes als die Spannkraft im Stabe S des einfachen Balkens, die dann entsteht, falls auf den links vom Schnitte befindlichen Fachwerkteil nur

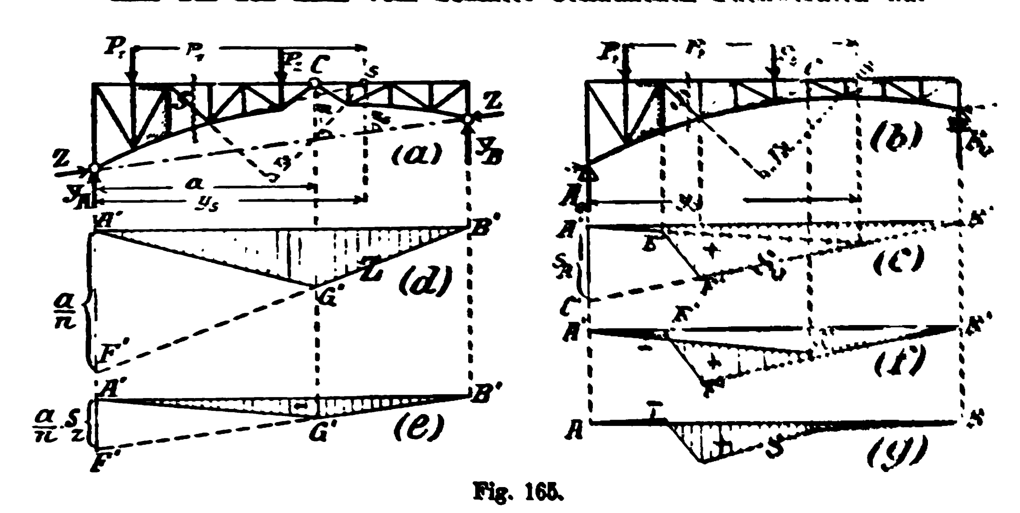


Fig. 165.

eine Kraft $Z = 1{,}0$ t wirkt. Denn, wenn wir diese Spannkraft S_z nennen, so bekommen wir in der Tat (Fig. 165b):

$$S_z = -1{,}0 \cdot \frac{z_s}{r_s} = -\frac{z_s}{r_s}\,.$$

Die gesamte Spannkraft des Stabes S läßt sich also in der Form schreiben:

$$\text{(III)} \qquad S = S_0 + Z \cdot S_z\,,$$

worin S_0 die Spannkraft des entsprechenden Stabes des einfachen Fachwerkbalkens (Fig. 165b), Z die bei der betreffenden Laststellung entstehende Auflagerseitenkraft Z, und S_z die infolge eines Wertes $Z = 1{,}0$ t im Stabe S entstehende Spannkraft bedeuten.

Um nun den Ausdruck $S = S_0 + Z \cdot S_z$ für alle Laststellungen darzustellen, verfahren wir folgendermaßen: Wir zeichnen zunächst die Einflußlinie für den Beitrag S_0 (Fig. 165c). Hierauf nehmen

wir in Richtung der Kämpferverbindungslinie links und rechts eine Kraft von 1,0 t an und bestimmen nach irgendeiner Methode (z. B. Kräfteplan) die im Stabe S von Fig. 165b entstehende Spannkraft S_z. Mit deren Hilfe zeichnen wir dann die Einflußlinie Z im $S_z$fachen Maßstabe. [Dieses geschieht, indem wir nicht wie in Fig. 165d, die Ordinate $\frac{a}{n}$, sondern $\frac{a}{n} \cdot S_z$ auftragen (Fig. 165e).] Die Zusammensetzung dieser beiden Einflußlinien (S_0 und $Z \cdot S_z$) ergibt dann die Einflußlinie für den Stab S des Dreigelenkbogens (Fig. 165f).

Bei dem Bogen Fig. 165 würde sich der Hilfswert S_z negativ ergeben (vgl. die obige analytische Berechnung von S_z). Bei der Zusammensetzung der S_0-Fläche und der $Z \cdot S_z$-Fläche in Fig. 165f sind deshalb beide von der Nullachse $A'N'$ aus nach derselben Seite hin abgetragen. Dann ergibt, da Fig. 165c positive und Fig. 165e negative Ordinaten hat, der Unterschied der beiden in Fig. 165f zusammengelegten Flächen den Ausdruck $S_0 + Z \cdot S_z$. Die in Fig. 165f schraffierte Fläche ist also die Einflußfläche für S.

Man kann sie natürlich auch von einer Nullachse aus abtragen; entweder indem man Fig. 165f noch einmal umzeichnet, oder aber indem man das Dreieck $A'G'B'$ (Fig. 165e) in Fig. 165f nicht von der Achse $A'B'$, sondern von der Linie $A'E'F'B'$ aus abträgt. Dann ist nämlich die gesuchte Differenz der beiden Ordinaten von der Nullachse aus zu messen.

Zur Vereinfachung der Rechnung dient noch folgendes: Um die Einflußlinie für den Beitrag $Z \cdot S_z$ für irgendeinen Stab zu finden, mußten wir die Ordinate $\frac{a}{n}$ der Z-Linie (Fig. 165d) mit dem für den betreffenden Stab gültigen Werte S_z multiplizieren. Zweckmäßiger wird es also sein, wir zeichnen den erwähnten Kräfteplan nicht für $Z = 1{,}0$ t, sondern gleich für $Z = 1{,}0 \cdot \frac{a}{n}$ (t). Die Spannkraft, die sich dann aus ihm für den Stab S ergibt, ist gleich $S_z \cdot \frac{a}{n}$. [S_z war Spannkraft infolge Z gleich *einer* t.] Dieser Kräfteplan gibt uns also direkt den Wert, den wir zum Auftragen von Fig. 165e brauchen, und wir sparen die Umrechnung.

Es lassen sich auch bei den Stabkräften durch Einführung „stellvertretender Balken" noch weitere Vereinfachungen erzielen. Dies folgt direkt daraus, daß ein Gurtstab stets durch das Moment

des gegenüberliegenden Knotenpunktes bestimmt ist. Man kann die Gurtstäbe also auch so finden, daß man mittels stellvertretender Balken die Einflußlinien für die Knotenpunktsmomente zeichnet und dann diese durch die betreffenden Lote r (vom Knotenpunkt auf den Stab) dividiert. Hierdurch sind die Gurtstäbe vielleicht noch bequemer zu finden als durch Fig. 165.

Da aber Fachwerk-Dreigelenkbogen als Brückenträger kaum noch ausgeführt werden, erübrigt es sich wohl, diese Abänderungen der Methode noch besonders darzustellen.

§ 62.

Allgemeine Wiederholung von Abschnitt IV.

Die Untersuchung des Dreigelenkbogens begannen wir mit der Ermittlung der Auflagerkräfte. Dies kann zeichnerisch geschehen nach Fig. 147—149, oder rechnerisch nach den in § 56, I zusammengestellten Formeln.

Die Berechnung eines vollwandigen Dreigelenkbogens erfolgt dann mit Hilfe der Kernpunktsmomente M_{K_1} und M_{K_2}, bzw. der Normalkraft N und des Schwerpunktsmomentes M, und mit Hilfe der Querkraft Q. Diese Werte werden graphisch gefunden durch die Mittelkraftlinie, analytisch durch die Formeln § 58, II. Namentlich bei vertikaler Belastung ist die analytische Behandlung auf jeden Fall vorzuziehen (§ 58, Schluß).

Die Berechnung eines Fachwerk-Dreigelenkbogens bietet nach Ermittlung der Auflagerkräfte keinerlei Schwierigkeiten (§ 59).

Auflagerkräfte, Momente, Querkräfte und Normalkräfte bei beweglicher Belastung sind in § 60 behandelt. Hierbei ist besonders wichtig, daß das größte positive und das größte negative Moment sich darstellen lassen durch die Momente zweier stellvertretender Balken $\overline{AN}$ und $\overline{BN}$. (Beim Balken AN ist das Moment an der Stelle m, beim Balken $\overline{BN}$ an der Stelle O zu nehmen.) Hierdurch wird nicht nur das Aufzeichnen der Einflußlinien sehr erleichtert, sondern in vielen Fällen auch eine direkte analytische Berechnung der Momente ermöglicht.

In § 61 sind die Einflußlinien für die Stabkräfte eines Fachwerk-Dreigelenkbogens abgeleitet. Die betreffende Methode folgt direkt aus dem auch bei den früheren Untersuchungen eingeschlagenen Gedankengange.

Abschnitt V.
Kinematische Methoden.

9. Vortrag:
Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

§ 63.
Schwerfälligkeit unserer bisherigen „einfachen“ Gleichgewichtsbedingungen.

I. Rückblick.

Alle Berechnungsmethoden der Statik und Festigkeitslehre beruhen auf der Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen. Der immer wiederkehrende Gedankengang war der: „Wir sehen, daß der betreffende Punkt (Körper) im Ruhezustand ist. Folglich dürfen wir auf ihn die Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Wir tun dies und erhalten hierdurch mathematische Beziehungen (Gleichungen), aus denen sich die gesuchten Kräfte ergeben“. Wenn man sich diesen Gedankengang wirklich zu eigen gemacht hat, kann man an jede Aufgabe, sofern sie überhaupt statisch bestimmbar ist, mit dem Gefühl herangehen, daß sie auf jeden Fall lösbar sein muß.

Zur Wiederholung mögen die verschiedenen Formen, in denen wir die Gleichgewichtsbedingungen verwendet haben, noch einmal zusammengestellt werden. Wir haben betrachtet:

a) das Gleichgewicht eines Punktes,

b) das Gleichgewicht eines Körpers (Scheibe).

a) Kennzeichen für das Gleichgewicht eines Punktes. *Grundprinzip:* Die Kräfte müssen eine Resultierende „Null“ ergeben. *Praktische Anwendung* dieses Grundprinzipes:

α) Beim Aneinanderreihen der Kräfte muß der Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft in den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft zurückfallen; oder

β) Die Summen R_x und R_y der Projektionen der Kräfte auf zwei beliebig zu wählende Achsen müssen beide die Größe „Null" haben.

b) Kennzeichen für das Gleichgewicht eines (scheibenförmigen) **Körpers.** *Grundprinzip:* Die Kräfte dürfen weder eine Resultierende noch ein Kräftepaar ergeben. *Praktische Kennzeichen* dafür, daß diese Bedingung erfüllt ist:

α) Beim Zusammensetzen der Kräfte mittels Kraftzug muß sich ergeben, daß die Ersatzkraft der ersten $(n-1)$ Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet ist und in derselben Geraden liegt wie die letzte Kraft; oder

β) Beim Zusammensetzen mittels Kräftepolygon und Seilpolygon muß sich ergeben, daß beide Polygone sich schließen; oder

γ) Es muß eine der folgenden Gruppen von Gleichungen erfüllt sein:

$$(1) \qquad R_x = 0\,; \qquad R_y = 0\,; \qquad \Sigma M = 0\,.$$
$$(2) \qquad R_x = 0\,; \qquad \Sigma M_E = 0\,; \qquad \Sigma M_F = 0\,.$$
$$(3) \qquad \Sigma M_E = 0\,; \qquad \Sigma M_F = 0\,; \qquad \Sigma M_G = 0\,.$$

Dies sind also die verschiedenen Methoden, nach denen wir, falls ein Körper im Ruhezustande ist, diese Tatsache ausgedrückt haben durch die Sprache der Mathematik.

Wie schließlich in Abschnitt IV (§ 55) gezeigt wurde, sind die Gleichgewichtsbedingungen nicht nur bei einem einzelnen starren Körper, sondern auch bei gelenkigen Verbindungen von Körpern erfüllt. Z. B. bei zwei Körpern, die durch ein Gelenk verbunden und derart mit Kräften belastet sind, daß keinerlei Bewegung entsteht. Bedingung ist nur, daß ein solches System in allen seinen Teilen tatsächlich im Ruhezustand ist, also gewissermaßen als ein starrer Körper auftritt. [Allerdings sind bei solchen Körperverbindungen die bisherigen Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend, um den Ruhezustand zu verbürgen; sie sind in diesem Falle nur notwendige, aber noch nicht ausreichende Bedingungen des Gleichgewichtes.] Soweit zur Wiederholung des Bisherigen.

Bemerkung: Diese bisher zusammengestellten Gleichgewichtsbedingungen wollen wir jetzt als die „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen bezeichnen.

II. Licht- und Schattenseiten dieser „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen.

Daß die obigen mathematischen Ausdrucksweisen für das Gleichgewicht von Punkt oder Körper im hohen Grade zur Be-

rechnung von Tragwerken geeignet sind, dürfte wohl durch alle bisherigen Betrachtungen erwiesen sein. Trotzdem wollen wir uns aber noch nach einer neuen Form umsehen, um das Gleichgewicht eines Körpers mathematisch darzustellen. Und zwar aus folgendem Grunde:

Die obigen „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen haben den Nachteil, daß *sämtliche* Kräfte, die auf den betreffenden Körper (Punkt) wirken, mit aufgeführt werden müssen. Insbesondere dürfen die Lagerkräfte, die an den Auflagerstellen wirken, nicht unterschlagen werden. Ferner müssen, falls der betreffende Körper durch Gelenke, Führungen oder Stäbe mit anderen Körpern verbunden ist, die in den Verbindungsstellen auftretenden Kräfte (Gelenkdrücke usw.) mit berücksichtigt werden. Hierdurch wird die Berechnung mitunter recht schwerfällig. Eine Kraft will man vielleicht nur haben, und eine ganze Anzahl von Kräften erscheint in den betreffenden Gleichungen! Allerdings kann man sich in vielen Fällen dadurch helfen, daß man die Gleichungen so geschickt anschreibt, daß nachher eine Anzahl von Kräften aus den Gleichungen wieder herausfällt. Immerhin ist dieser Umstand — das Auftreten aller Lager- und Gelenkkräfte — eine unangenehme Begleiterscheinung der „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiele für diese Umständlichkeit der „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen.

An zwei Beispielen möge diese Schattenseite unserer sonst so nützlichen Gleichgewichtsbedingungen noch näher erläutert werden.

Als erstes Beispiel werde die bekannte Aufgabe erörtert: *In welchem Verhältnis müssen bei einer schiefen Ebene das Gewicht P_1 eines Körpers K und die ziehende Kraft P_2 stehen, damit Gleichgewicht herrscht* (Fig. 166a)? Um diese Aufgabe mittels der einfachen Gleichgewichtsbedingungen zu lösen, betrachten wir das Gleichgewicht des Körpers K (Fig. 166a und b). An ihm greifen die drei Kräfte an: 1. Vertikal abwärts sein Gewicht P_1, 2. in Richtung des Seiles der Zug P_2, und 3. der Druck N, den die schiefe Ebene auf den Körper ausübt. (Letztere Kraft ist bei glatter Berührungsfläche rechtwinklig zur Fläche gerichtet.)

Um nun eine Beziehung zwischen P_1 und P_2 zu erhalten, legen wir ein Achsenkreuz x, y und schreiben die Gleichgewichtsbedingung: Summe der Projektionen auf die x-Achse gleich Null, an. Dann erhalten wir (Fig. 166b):

$$P_1 \cdot \cos(90 - \alpha) + N \cdot 0 - P_2 = 0,$$
$$P_1 \cdot \sin\alpha - P_2 = 0,$$
$$P_2 = P_1 \cdot \sin\alpha.$$

In Worten: Die ziehende Kraft P_2 muß gleich dem Produkte aus dem Gewichte P_1 des Körpers K und dem Sinus des Neigungswinkels α der schiefen Ebene sein, falls Gleichgewicht herrschen soll.

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Worauf es jetzt ankam zu zeigen, war folgendes: Wir wollten nur wissen, in welcher Beziehung die beiden Kräfte P_1 und P_2 zueinander stehen müssen, um Gleichgewicht zu erzielen. Trotzdem erscheinen aber bei der Betrachtung nicht nur diese beiden Kräfte, sondern auch noch der Auflagerdruck N, der zwischen Körper und schiefer

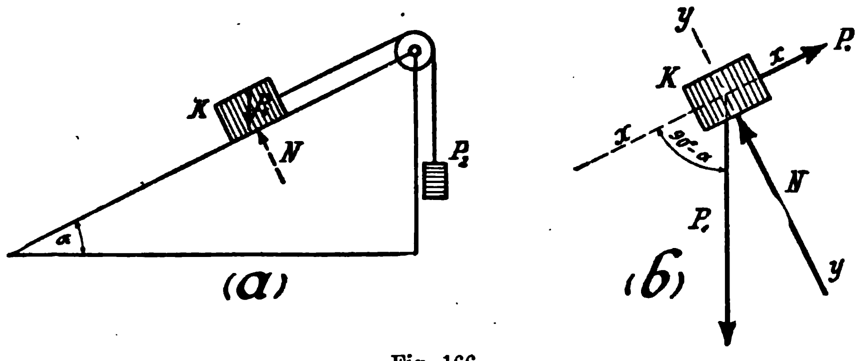


Fig. 166.

Ebene vorhanden ist. Diese Kraft N interessierte uns bei der vorliegenden Fragestellung überhaupt nicht. Sie mußte aber mit aufgeführt werden, da sie ja eine tatsächlich auf den Körper wirkende Kraft ist, und vermehrt unnötig die Arbeit.

Nur durch die geschickte Wahl der x-Achse gelang es, die unbekannte N so schnell wieder aus der Gleichung herauszuschaffen.

Dieses Hineinbekommen solcher unerwünschter Kräfte ist die Schattenseite der einfachen Gleichgewichtsbedingungen, von der vorhin die Rede war.

Ein zweites Beispiel wird die soeben besprochene Unbequemlichkeit noch besser zeigen: Die Stabverbindung Fig. 167a, nach Art der sog. *Roberval*schen Wage, besteht aus der starren Scheibe AB, die in der Mitte in einer Achse C drehbar gelagert ist. In A und B sind in Gelenken aufgestützt die Stäbe AD und BE mit den seitlichen Armen GH und JK, auf denen an beliebiger Stelle Gewichte P_1 und P_2 ruhen. Die oberen Endpunkte D und

E der Stäbe *AD* und *BE* sind je durch einen Stab *DF* und *EF* gelenkig mit dem Bolzen *F* des Vertikalständers verbunden. (Diese Stäbe *DF* und *EF* dienen also zur Führung der Stäbe *AD* und *BE*.) Die Frage lautet: *In welchem Verhältnis müssen die*

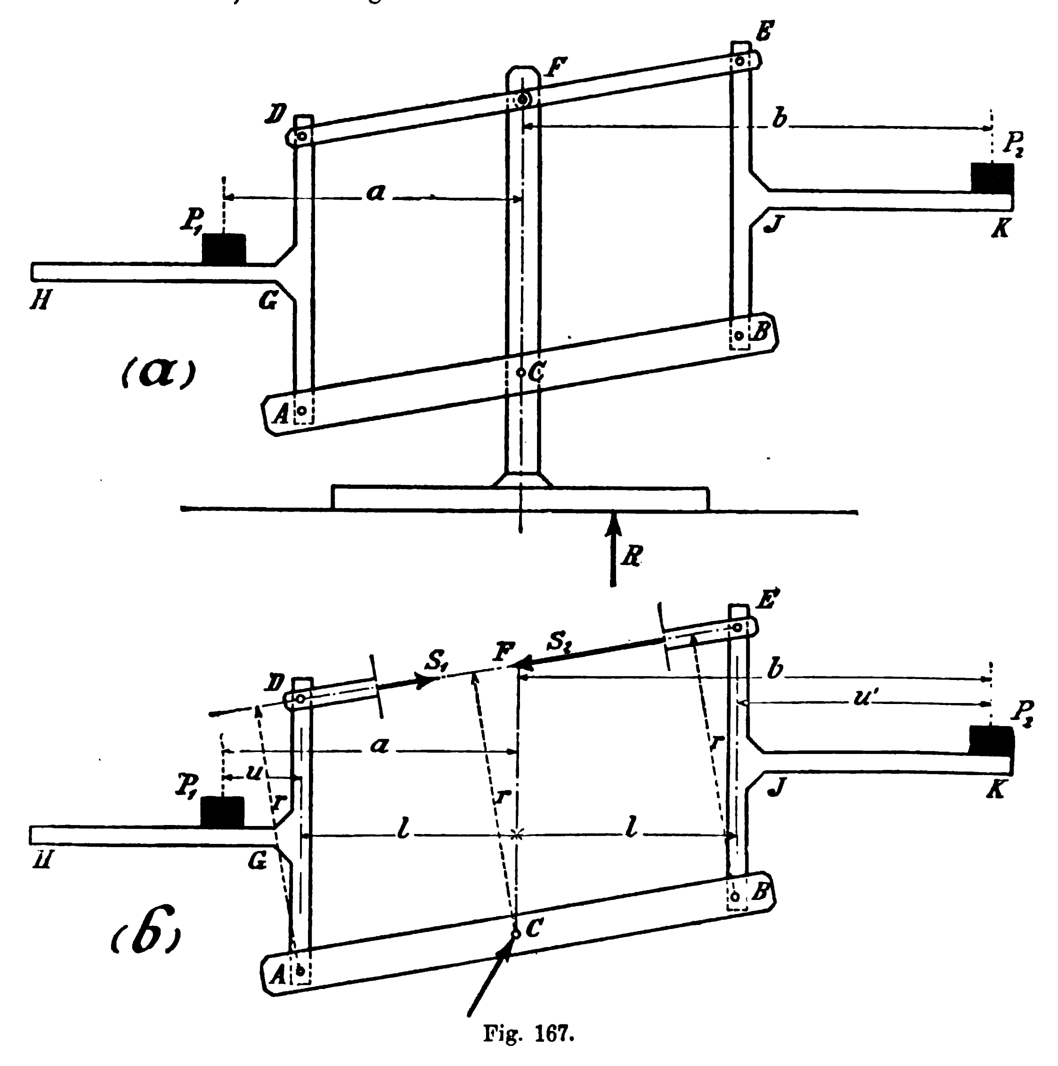


Fig. 167.

beiden Gewichte P_1 und P_2 zueinander stehen, damit diese Stabverbindung im Gleichgewicht ist? (Vom Eigengewicht der Stäbe, Bolzen usw. wird abgesehen.)

Die Antwort auf diese Frage wird — leider — von den meisten Lesern wohl etwa so lauten: „Es muß sein:

$$P_1 \cdot a = P_2 \cdot b,$$

dann ist das System im Gleichgewicht." Und als Begründung wird man hören: „Die Summe der Momente der Kräfte in bezug auf irgendeinen Punkt, z. B. den Punkt C, muß Null sein; d. h. $P_1 \cdot a - P_2 \cdot b = 0$, und daraus ergibt sich die obige Beziehung.

Diese Antwort ist aber vollständig falsch. Es ist nämlich nicht berücksichtigt, daß außer den Lasten P_1 und P_2 auch noch die Auflagerkräfte, die zwischen Fußplatte und Tischplatte wirken, zu berücksichtigen sind. Diese Drücke werden sich wegen der ungleichen Anordnung der Lasten P_1, P_2 durchaus nicht gleichmäßig über die Fußplatte verteilen, sondern sie werden eine Resultierende R ergeben, die seitlich auf das System wirkt (Fig. 167a). Auf jeden Fall liefert diese Auflagerkraft R ebenfalls ein Moment in bezug auf den Punkt C, so daß die vorhin aufgestellte Gleichung falsch ist.

Die richtige Antwort muß vielmehr lauten: Bei dem System kommt es auf die Abstände a und b der Lasten überhaupt nicht an, sondern es ist einfach dann im Gleichgewicht, wenn

$$P_1 = P_2$$

ist. Dies ergibt sich, wenn man die bei der Konstruktion auftretenden Kräfte genauer ansieht und dann die Gleichgewichtsbedingungen richtig anwendet.

Zunächst wollen wir den Stab AD mit dem Arm GH für sich betrachten (Fig. 167a und b). Dieser stellt einen Körper dar, an dem insgesamt drei Kräfte angreifen: Die Last P_1; die Kraft, die auf den Stab AD im unteren Fußpunkte A als Stützkraft wirkt; drittens die Kraft, die der Führungsstab FD im Punkte D auf den Stab AD ausübt (Gelenkdruck in D). Diese letztere Kraft werde S_1 genannt. Ihre Richtung können wir sofort einzeichnen, da ja der Führungsstab FD an beiden Enden Gelenke hat. Und ihre Größe ergibt sich, wenn wir auf den Körper AD die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ in bezug auf den Punkt A aufstellen:

$$S_1 \cdot r - P_1 \cdot u = 0,$$

$$\text{(I)} \qquad S_1 = \frac{P_1 \cdot u}{r}.$$

Entsprechend ergibt sich die Kraft, die von dem Führungsstabe FE im Punkte E auf den Körper BE ausgeübt wird (Fig. 167b):

$$\text{(II)} \qquad S_2 = \frac{P_2 \cdot u'}{r}.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die gesamte Konstruktion, die von dem unteren Wagebalken AB und den beiden Stäben AD und BE gebildet wird (Fig. 167b). An ihr greifen an: 1. Die beiden Kräfte P_1 und P_2; 2. die soeben bestimmten Kräfte S_1 und S_2 (Gelenkdrücke in D und E); 3. Der Gelenkdruck im Punkte C. Die gemeinsame Wirkung dieser fünf Kräfte besteht darin, daß das System im Ruhezustand ist. Wir können also die Gleichgewichtsbedingungen anschreiben, und zwar wollen wir die Gleichung $\Sigma M = 0$ in bezug auf den Punkt C benutzen (damit die noch unbekannte Kraft C herausfällt). Dann erhalten wir (links herum positiv genommen):

$$\text{(III)} \qquad P_1 \cdot a - S_1 \cdot r - P_2 \cdot b + S_2 \cdot r + C \cdot 0 = 0 .$$

Um aus dieser Gleichung eine Beziehung zwischen P_1 und P_2 zu erhalten, müssen wir noch für S_1 und S_2 ihre Werte einsetzen (Formel I und II): Dann folgt

$$P_1 \cdot a - P_1 \frac{u}{r} \cdot r - P_2 \cdot b + P_2 \frac{u'}{r} \cdot r = 0 ,$$

$$P_1 (a - u) - P_2 (b - u') = 0 ,$$

$$P_1 (a - u) = P_2 (b - u') .$$

Nun ist aber nach Fig. 167b:

$$(a - u) = (b - u') = l ,$$

so daß die obige Gleichung übergeht in:

$$P_1 \cdot l = P_2 \cdot l ,$$

und daraus folgt:

$$\text{(IV)} \qquad P_1 = P_2 .$$

In Worten: Die Stabverbindung Fig. 167a wird dann im Gleichgewicht sein, wenn die beiden Lasten einander gleich sind, ganz unabhängig davon, in welchen Abständen a und b sie aufgestellt sind.

Diese Eigenschaft, daß die Hebelarme a und b ohne Einfluß sind, klingt zunächst so paradox, daß man das System früher das „Robervalsche Paradoxon" nannte. Sie kommt natürlich daher, weil dem größeren Moment von P_2 auch das größere Moment von S_2 entgegenwirkt. Übrigens sind nach diesem Prinzip alle die kleinen in Geschäften gebräuchlichen Wagen — die sog. Tafelwagen — gebaut. Da es nicht auf die Abstände a und b ankommt, können Ware und Gewichte an beliebiger Stelle auf die Schalen gelegt werden. Diese Freiheit hinsichtlich der Lagerung ist eben der Vorteil der Wagen.

III. Zusammenfassung.

Die beiden Beispiele — die schiefe Ebene und die Robervalsche Wage — haben den bereits angedeuteten Nachteil der ein-

fachen Gleichgewichtsbedingungen deutlich gezeigt. Zwei Kräfte, P_1 und P_2, wollen wir miteinander vergleichen, und eine ganze Reihe von Kräften trat in den betreffenden Gleichungen auf. Dies rührt eben daher, weil nicht nur die eigentlichen äußeren Kräfte (P_1 und P_2 in den angeführten Beispielen), sondern auch noch die Lagerkräfte (Kraft N in Fig. 166), bzw. sogar die Gelenkdrücke (Kräfte S_1 und S_2 in Fig. 167) als angreifende Kräfte erscheinen und natürlich bei den Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden müssen. Es erfordert dann besondere Geschicklichkeit, um die Gleichgewichtsbedingungen so umzuformen, daß schließlich nur die gerade gesuchten Kräfte übrigbleiben. Mitunter muß man sogar vorher erst einige Hilfskräfte ausrechnen (Kräfte S_1 und S_2 in Fig. 167), um überhaupt auf eine brauchbare Beziehung zwischen den gesuchten Kräften zu kommen.

Im folgenden Paragraphen wird nun eine neue Form der Gleichgewichtsbedingungen gezeigt werden, die so geschickt eingerichtet ist, daß die nicht gewünschten Kräfte nicht erst künstlich eliminiert werden müssen, sondern von vornherein gar nicht auftreten. Die beiden soeben durchgenommenen Beispiele werden wir auch nach dieser neuen Methode durcharbeiten, und es wird sich dann herausstellen, daß tatsächlich nur die beiden Kräfte P_1 und P_2, die wir ja auch haben wollen, in Erscheinung treten, während wir uns um Auflagerdrücke, Gelenkkräfte oder dgl. gar nicht zu kümmern brauchen. Augenscheinlich ist dies ein weiterer Fortschritt der Theorie.

§ 64.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Methode der Kraft × Weg-Produkte).

Die erste der obigen Bezeichnungen ist die offizielle Bezeichnung, die die jetzt abzuleitende neue Form der Gleichgewichtsbedingungen in der Physik und Technik führt. Wir aber wollen sie anspruchsloser (aber vielleicht verständlicher) die „Methode der Kraft × Weg-Produkte“ nennen; abgekürzt „KWP-Methode“. Zunächst mögen einige bei dieser Methode vorkommende Ausdrücke erklärt werden.

I. Begriffserklärungen.

1. Kinematische Kette (Zwangläufiger Mechanismus).

Wir wollen zweierlei miteinander vergleichen: einerseits einen Balken, der statisch bestimmt oder auch statisch unbestimmt gelagert sei; andererseits die in Fig. 167 gezeichnete Konstruktion

(*Roberval*sche Wage). Der Balken kann sich überhaupt nicht bewegen; er ist auf jeden Fall im Ruhezustande. Die Wage kann sich bewegen; sie kann aber auch im Ruhezustande sein. Stoße ich den Balken an, so bleibt er trotzdem im Ruhezustande, abgesehen von den kleinen elastischen Bewegungen, die wir jetzt als verschwindend klein nicht weiter beachten. Stoße ich die Wage an, so bleibt sie nicht im Ruhezustand, sondern setzt sich in Bewegung. Den Balken nennen wir ein „festes System", die Wage nennen wir einen „*Mechanismus*" oder eine „kinematische Kette". (Kinematik — griechisch — bedeutet Bewegungslehre, bzw. geometrische Untersuchung von Bewegungen.)

Dieser als Beispiel genommene Mechanismus Fig. 167 hat aber eine besondere Eigenschaft: Die einzelnen „Glieder" dieses Mechanismus können sich nämlich nicht beliebig, sondern nur in ganz bestimmten Bahnen bewegen. Der Hebel AB z. B. kann eine Bewegung nur in Form einer Drehung um den Punkt C ausführen. Und weiter, was damit zusammenhängt: Wenn ich einen Teil in Bewegung setze, so ist jeder andere Teil gezwungen, ganz bestimmte Bewegungen auszuführen. Drehe ich beispielsweise den unteren Hebel AB um einen beliebigen Winkel um seinen Mittelpunkt C, so werden sich die Stangen AD und BE in ganz bestimmter Weise verschieben und die oberen Führungsstäbe werden sich in ganz bestimmter Weise um ihren Endpunkt F drehen. Solch ein Mechanismus, dem seine Bewegungen vorgeschrieben — „erzwungen" — sind, wollen wir einen „zwangläufigen Mechanismus" oder eine „zwangläufige kinematische Kette" oder ein „System mit *einem* Freiheitsgrade" nennen.

Beispiele: *Die schiefe Ebene.* (Das Gewicht P_2 hat eine bestimmte Bewegungsmöglichkeit, nämlich in der Vertikallinie. Sobald ich aber diese Bewegung ausführe, ist die Bewegung des Gewichtes P_1 zwangläufig mitbestimmt; denn es kann sich dann nur in einer ganz entsprechenden Weise längs der schrägen Ebene verschieben. Die eine Bewegung verursacht — „erzwingt" — die andere Bewegung.) *Der Hebel. Eine Dampfmaschine* (denn die Bewegung des Kolbens erzwingt eine ganz bestimmte Bewegung des gesamten Gestänges) usw.

Bemerkung: Natürlich sind durchaus nicht alle Mechanismen zwangläufig. Habe ich z. B. auf zwei Achsen sitzend zwei Zahnräder, die ineinandergreifen, so ist dieser Mechanismus zwangläufig. Sitzen aber auf den Achsen zwei Räder, die sich nicht berühren, so ist der Mechanismus nicht zwangläufig. Denn ich

kann das eine Rad beliebig bewegen, ohne daß das andere dadurch zu einer bestimmten Bewegung gezwungen würde. Hier besteht also kein Zwang zwischen den einzelnen Teilen, sondern jedes Rad kann für sich eine besondere Bewegung machen (System mit *zwei* Freiheitsgraden). Bei unseren weiteren Untersuchungen werden wir es aber häuptsächlich mit zwangläufigen Mechanismen zu tun haben.

2. Die „*Verrückungen*" eines Mechanismus, der „*Weg*" einer Kraft und das „*Kraft* × *Weg-Produkt*" (Mechanische Arbeit).

Nun kehren wir zu unserer als Beispiel für einen zwangläufigen Mechanismus genommenen *Roberval*schen Wage zurück.

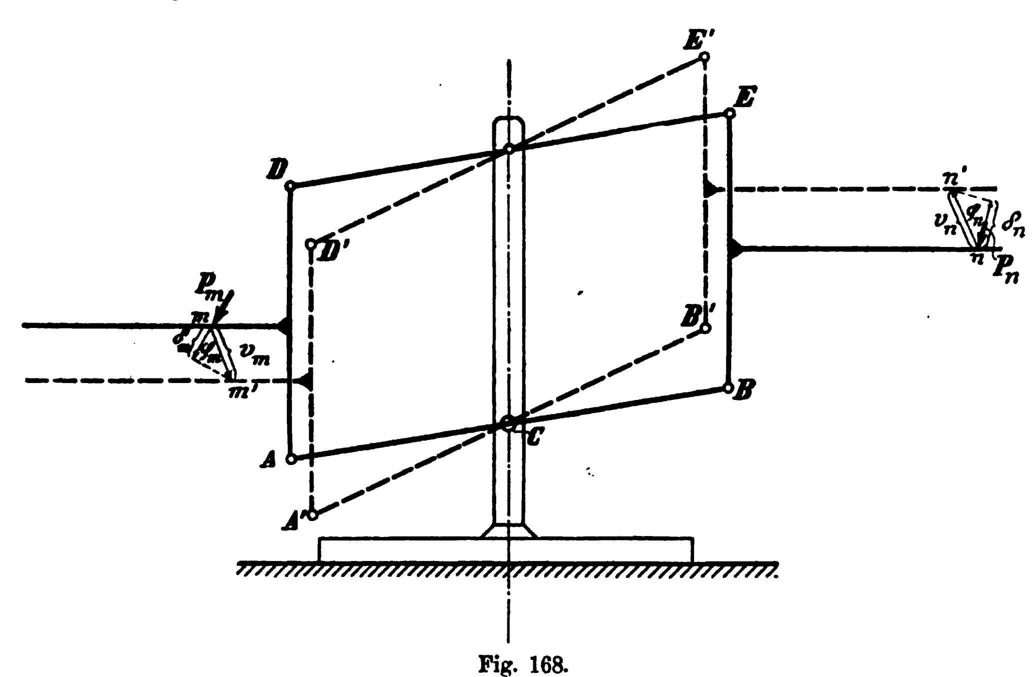


Fig. 168.

Die Belastung geschehe durch zwei beliebig gerichtete Kräfte P_m und P_n (Fig. 168). Deren Angriffspunkte mögen m und n heißen. Wenn ich jetzt das System bewege — „eine Bewegung einleite" —, so wird der Punkt m eine Strecke zurücklegen und ebenso der Punkt n. Die von einem Punkte zurückgelegte Strecke wollen wir „die *Verrückung* v" des betreffenden Punktes nennen.

[In dem Beispiele Fig. 168 ist augenscheinlich die „Verrückung" v_m des Punktes m stets ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die „Verrückung" v_n des Punktes n.]

Nun projiziere ich die „Verrückung v_m“ des Punktes m auf die Richtung der Kraft P_m. Diese Hilfsgröße heiße der *„Weg δ_m“* der Kraft P_m. Man beachte wohl, daß der „Weg“ δ einer Kraft im allgemeinen also nicht mit der „Verrückung“ v des Angriffspunktes dieser Kraft zusammenfällt. Der Weg δ ist vielmehr nur ein Hilfsbegriff, der eben dadurch entsteht, daß die Verrückung v des Angriffspunktes einer Kraft projiziert wird auf die Kraft selber. Dieser Hilfsbegriff wird sich später als sehr brauchbar erweisen.

Zum Schlusse wollen wir uns das Produkt gebildet denken aus der Kraft P_m und ihrem „Wege“ δ_m. Dieses Produkt nennen wir das *„Kraft × Weg-Produkt* der betreffenden Kraft“ (abgekürzt: KWP) oder die „mechanische Arbeit“.

In Formel:

$$\text{KWP} = P \cdot \delta .$$

Ist der Weg δ ebenso gerichtet wie die zugehörige Kraft P (Fig. 168 linke Steite), so soll δ das positive Vorzeichen bekommen und folglich auch das ganze Produkt $P \cdot \delta$ das positive Vorzeichen. Ist aber δ entgegengesetzt gerichtet der betreffenden Kraft (Fig. 168 rechte Seite), so geben wir δ und somit auch dem ganzen Produkt $P \cdot \delta$ das negative Vorzeichen.

Zwischen der Verrückung v eines Punktes m, dem Wege δ einer Kraft P_m und dem Kraft × Weg-Produkte dieser Kraft P_m besteht also folgender Zusammenhang: Die „Verrückung v_m“ ist das, was der Punkt m tatsächlich ausführt; der „Weg δ_m“ ist nur ein Hilfsbegriff, der dadurch entsteht, daß man die Strecke v auf die Richtung der Kraft P_m projiziert; und das KWP entsteht schließlich, indem man diesen Hilfsbegriff δ_m multipliziert mit der Kraft P_m. [Man beachte wohl, daß beim KWP nicht die eigentliche Bewegung v des Angriffspunktes der betreffenden Kraft, sondern nur der Hilfsbegriff δ eine Rolle spielt.]

Bezeichnen wir den Winkel zwischen Verrückung v_m und Kraft P_m mit φ_m, so ist also (Fig. 168)

$$(1) \qquad \delta_m = v_m \cdot \cos\varphi_m \qquad \text{[Definition des Ausdruckes „Weg“ einer Kraft].}$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \text{KWP} &= P_m \cdot \delta_m \\ &= P_m \cdot v_m \cos\varphi_m \end{aligned} \right\} \qquad \begin{gathered}\text{[Definition des Ausdruckes} \\ \text{„Kraft × Weg-Produkt“].}\end{gathered}$$

Die Einführung dieses KWP, das für den Leser an dieser Stelle natürlich noch nichts weiter ist als ein mathematischer Begriff, wird sich für die späteren Untersuchungen von zwangläufigen Mechanismen als außerordentlich nützlich erweisen.

3. „Freie Kräfte“ und „Zwangskräfte“ („Führungskräfte“).

Diese Bezeichnungen erklären sich von selber: „Freie Kräfte“ sind solche, die von außen her in Tätigkeit gesetzt werden. Beispielsweise durch Auflegen von Gewichten, Drücken mit der Hand, Anspannen durch eine Feder usw. „Zwangskräfte“ („Führungskräfte“) sind dagegen diejenigen, die durch die freien Kräfte an den Auflagerstellen oder Berührungsstellen der einzelnen Glieder des Mechanismus hervorgerufen werden. Nämlich: Auflagerkräfte, Gelenkdrücke, Spannkräfte in den Verbindungs- oder Führungsstangen des Mechanismus. Zuerst müssen die freien Kräfte sein; durch sie entstehen dann die Zwangskräfte.

Die freien Kräfte sind also gerade diejenigen, die der Anfänger gern schlechthin als „Kräfte“ bezeichnet. Außerdem sind aber bei einem Mechanismus stets noch Zwangskräfte vorhanden. Denn letztere schaffen ja erst den Mechanismus, indem sie seine einzelnen Glieder so miteinander und mit dem Widerlager in Berührung (Zwang) bringen, daß eine zusammenhängende Konstruktion entsteht.

Bisher, bei Anwendung der „einfachen“ Gleichgewichtsbedingungen, haben wir zwischen freien und Zwangskräften keinen Unterschied gemacht. Im Gegenteil, es wurde immer wieder betont, daß beide Gruppen vollständig gleichwertig miteinander sind, daß also die Zwangskräfte genau so in die Berechnung einzuführen sind wie die freien Kräfte. Von jetzt ab werden wir einen solchen Unterschied machen. Die jetzt zu entwickelnde neue Form der Gleichgewichtsbedingungen ist nämlich so eingerichtet, daß die Zwangskräfte von vornherein übergangen werden können. Man könnte sie natürlich stets mit einführen — denn sie sind ja durchaus gleichberechtigt den anderen —, man braucht es aber nicht zu tun. Der hierdurch erzielte Vorteil für die Vereinfachung der Rechnung ist einleuchtend.

4. Wiederholung zu Absatz I.

In diesem vorbereitenden Absatze haben wir einige Wort- und Sacherklärungen durchgenommen: Unter einem „Mechanismus“ wollen wir eine solche Körperverbindung verstehen, die eine gewisse Freiheit hinsichtlich ihrer Bewegungen besitzt. Ist diese Freiheit auf das geringste Maß zusammengeschrumpft, nämlich so, daß jedes „Glied“ des Mechanismus nur eine bestimmte Bahn beschreiben kann und durch die Bewegung eines Gliedes die Bewegungen aller anderen Glieder bereits eindeutig bestimmt sind,

so nennen wir den Mechanismus „zwangläufig" oder „mit einem Freiheitsgrade".

Die Strecke, die ein Punkt eines solchen Mechanismus zurücklegt, heißt seine „Verrückung v". Dagegen ist der „Weg δ" einer Kraft P ein Hilfsbegriff, der dadurch entsteht, daß wir die eigentliche Bahn v des Angriffspunktes der Kraft projizieren auf die Richtung der Kraft. Schließt die Verrückung v des Angriffspunktes mit der Richtung der Kraft einen Winkel φ ein, so ist also der Weg δ erklärt durch die Beziehung:

$$(1) \qquad \delta = v \cdot \cos\varphi .$$

[Man nennt δ wohl auch „die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft P in der Kraftrichtung". Doch darf man nicht vergessen, daß die wirklich stattfindende Bewegung die Strecke v ist, während δ nur ein Hilfsbegriff ist.]

Schließlich bilden wir das Produkt aus der Kraft P und ihrem Wege δ und nennen dieses das „Kraft $\times$ Weg-Produkt":

$$\text{KWP} = P \cdot \delta = P \cdot v \cos\varphi .$$

Mit diesem Begriff KWP haben wir denn im folgenden stets zu tun.

Von sämtlichen Kräften, die auf einen derartigen Mechanismus wirken, werden uns weiterhin hauptsächlich die „freien Kräfte" beschäftigen. Dieses sind — ganz einfach gesprochen — diejenigen Kräfte, die auf einen vorhandenen Mechanismus von außen her aufgebracht werden. Die „Zwangs- oder Führungskräfte" dagegen sind diejenigen, die den Mechanismus in sich und mit dem Widerlager zusammenhalten.

II. Erklärung der neuen Rechenmethode.

1. Anführung der Methode (zunächst ohne Beweis).

Es handle sich um irgendeinen Mechanismus, auf den freie Kräfte P_1, P_2 usw. wirken mögen. Diese Kräfte mögen derart sein, daß der Mechanismus gerade im Gleichgewicht gehalten wird; weiter sei jedoch von diesen Kräften nichts bekannt. (Als Beispiel nehme man die Mechanismen Fig. 166—168.) Trotz dieses Gleichgewichtszustandes denke ich mir nun den Mechanismus etwas bewegt, so daß zu jeder Kraft P eine Verrückung v und aus dieser ein Weg δ entsteht, und bilde zu jeder freien Kraft das betreffende Kraft $\times$ Weg-Produkt $P \cdot \delta$. Dann läßt sich beweisen, daß die Summe dieser sämtlichen KWP gleich Null ist. In Formel: Es ist

$$(\text{I}) \qquad P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \cdots = 0 .$$

Diese Aussage ist das so gelehrt klingende und in Wirklichkeit so einfache „Prinzip der virtuellen Verrückungen“ („KWP-Methode“). Es liefert uns also eine Gleichung zwischen den Kräften P_1, P_2 usw., die dann zur Berechnung dieser Kräfte verwendet werden kann. (Das ist natürlich der Zweck der ganzen Arbeit.)

2. Weitere Erläuterungen dazu.

Bei der Anwendung dieser Methode der KWP ist auf folgendes aufmerksam zu machen:

Erstens: Das zu untersuchende System darf kein starrer, unbeweglicher Körper sein, sondern es muß ein „Mechanismus“ sein. Es muß also wenigstens die Möglichkeit haben, sich zu bewegen.

Deshalb eignet sich die KWP-Methode hauptsächlich zur Beantwortung von Fragen wie: „Wann ist bei der schiefen Ebene Gleichgewicht, wann bei der *Roberval*schen Wage? usw. Die Anwendung auf Tragwerke wird sich ergeben, indem wir ein Tragwerk in einen Mechanismus verwandeln. Davon später.

Zweitens: Vorerst hat er allerdings keine Veranlassung, sich zu bewegen. Die angreifenden Kräfte müssen vielmehr gerade derart sein, daß sie ein Gleichgewichtssystem bilden.

Drittens: Die Bewegung, die wir dem Mechanismus erteilen, ist also auch nicht etwa durch die freien Kräfte P_1, P_2 usw. verursacht. Die zu erteilende Bewegung ist vielmehr nur eine gedachte, gewissermaßen eine von außen hineingetragene Bewegung (etwa durch Anstoßen des Mechanismus und Bewegung desselben). Der Zweck dieser künstlichen Inbewegungsetzung ist der, zu jeder Kraft P_1, P_2 usw. einen „Weg“ δ_1, δ_2 usw. zu erhalten, um dann die Produkte $P_1 \cdot \delta_1$, $P_2 \cdot \delta_2$ usw. bilden zu können.

Diese gedachte Bewegung darf nicht vollständig beliebig sein, sondern muß so angenommen werden, daß der Mechanismus sie auch wirklich ausführen könnte. In Fig. 168 z. B. könnte man als gedachte Bewegung eine Drehung des Hebels AB um den Punkt C einführen. (Die Bewegungen der anderen Glieder des Mechanismus ergeben sich dann zwangläufig von selber.) Nicht aber etwa eine Verschiebung des Hebels AB nach irgendeiner Richtung; denn eine solche Bewegung ist bei dem vorliegenden Mechanismus einfach undurchführbar, unmöglich. Um hervorzuheben, daß man als gedachte Bewegungen nur solche einführen darf, die der Mechanismus auch wirklich auszuführen fähig ist, bezeichnen wir sie als „virtuelle“ Bewegungen. (Virtus im Sinne von „Fähigkeit“.) Man kann sich einfach merken: Bei einem zwangläufigen Mechanismus,

der augenblicklich durch die angreifenden Kräfte im Ruhezustand gehalten wird, ist eine „virtuelle Bewegung" eine solche, die der Mechanismus augenblicklich zwar nicht ausführt; die er aber ausführen **würde**, wenn das Gleichgewicht gestört werden würde.

Viertens: Bei der Aufstellung der Kraft $\times$ Weg-Produkte brauchen **nur die freien Kräfte** berücksichtigt zu werden. Die Zwangskräfte (Auflagerkräfte, Gelenkdrücke usw.) können einfach beiseite gelassen werden. Man kann sie natürlich auch mit hineinbeziehen. Doch darin besteht ja eben der Fortschritt der Methode, daß man sie nicht zu berücksichtigen **braucht**. (Der Einfluß der Zwangskräfte ist nämlich, wie sich beim Beweise ergeben wird, auf die **Summe** der KWP gleich Null.)

Natürlich ist bei den Wegen δ darauf zu achten, daß ein Weg positiv oder negativ gezählt wird, je nachdem er mit der Pfeilrichtung der betreffenden Kraft gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist.

Diese vier Gesichtspunkte sind also bei Anschreibung der KWP zu beachten. Der Kernpunkt der Methode besteht eben darin, daß die auf diese Weise gewonnenen KWP aller freien Kräfte die besondere Eigenschaft haben, daß ihre Summe gleich Null ist.

Man mache sich also klar, daß die KWP zu demselben Zwecke aufgestellt werden, wie unsere früheren „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen: Um aus der Tatsache des Gleichgewichtszustandes eines Körpers eine mathematische Beziehung zwischen den Kräften, die diesen Gleichgewichtszustand schaffen, herzuleiten. Während der Laie einfach sagt: „Der Körper wird durch die angreifenden Kräfte im Gleichgewicht gehalten", können wir diese Aussage **mathematisch** nutzbar machen, indem wir sagen: „Die Kräfte erfüllen eine ganz bestimmte Bedingung, nämlich die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \cdots = 0 .$$

Unsere weitere Aufgabe wird es jetzt sein, zu beweisen, daß diese Gleichung (I) auch tatsächlich zu Recht besteht, daß also bei einer virtuellen Verrückung eines Mechanismus die Summe der KWP aller freien Kräfte tatsächlich gleich Null ist. Bevor wir aber den Beweis führen, wird es gut sein, zur Einübung noch einige Beispiele nach diesem Verfahren der KWP durchzurechnen. Der Leser nehme also vorläufig die Methode als bereits bewiesen an und arbeite daraufhin die Beispiele durch.

8. Beispiele für die neue Methode.

Erstes Beispiel. Mittels der Methode der KWP soll die Aufgabe gelöst werden: In welchem Verhältnis müssen bei einer schiefen Ebene die Lasten P_1 und P_2 zueinander stehen, damit Gleichgewicht herrscht? (Fig. 169.)

Der Mechanismus, um den es sich hier handelt, wird von den beiden Körpern K_1 und K_2 und dem sie verbindenden Seil gebildet. Die angreifenden freien Kräfte sind die (vertikal abwärts wirkenden) Gewichte P_1 und P_2 dieser Körper. Außerdem haben wir noch Zwangskräfte (die durch die freien Kräfte hervorgerufen werden). Nämlich den Auflagerdruck des Körpers K_1 gegen die schiefe Ebene und den Druck der Rolle gegen das Seil.

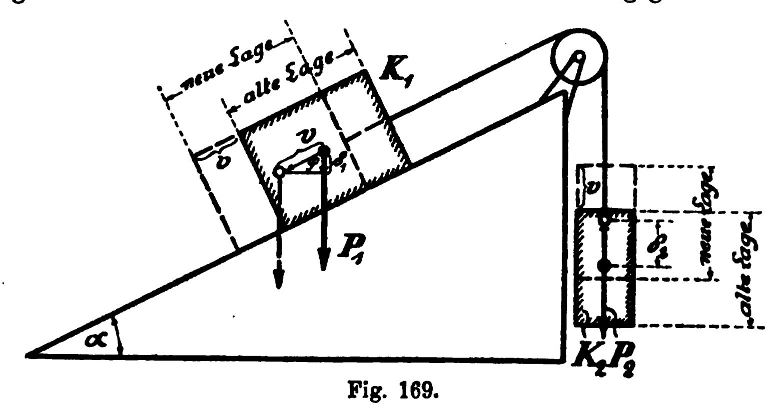


Fig. 169.

Diese Zwangskräfte kümmern uns aber gar nicht, da bei der Methode der KWP nur die freien Kräfte berücksichtigt zu werden brauchen.

Um nun das zum Gleichgewicht erforderliche Verhältnis von P_1 und P_2 zu finden, verfahren wir nach der aufgestellten Regel: Wir leiten eine virtuelle Bewegung des Mechanismus ein; d. h. eine solche, die der Mechanismus dann ausführen würde, wenn die eine Seite Übergewicht bekommen würde. Wir denken uns also z. B. die Last K_1 eine Strecke v die schiefe Ebene hinab geschoben. Durch diese virtuelle Verrückung von K_1 ist dann die Bewegung des anderen Gliedes, K_2, des Mechanismus bereits mitbestimmt. Es muß sich nämlich um dieselbe Strecke v aufwärts bewegen. Aus den Verrückungen v folgen dann die „Wege" der Kräfte P_1 und P_2, indem wir die Strecken v auf die Kraftrichtungen projizieren. Hierbei ergibt sich nach der Figur:

Weg der Kraft P_1: $\delta_1 = +v \cdot \cos\varphi = +v \cdot \sin\alpha$ (es ist $\sphericalangle\, \varphi = 90 - \alpha$),

" " " P_2: $\delta_2 = -v$.

[Der erste Weg ist positiv, da er dieselbe Pfeilrichtung hat wie die Kraft. Der zweite Weg dagegen ist entgegengesetzt gerichtet der Pfeilrichtung der betreffenden Kraft.] Aus den Wegen δ berechnen sich die Kraft $\times$ Weg-Produkte:

$$\text{KWP der Kraft } P_1: \quad P_1 \cdot \delta_1 = +P_1 \cdot v \sin\alpha\,,$$
$$\text{,, ,, ,, } P_2: \quad P_2 \cdot \delta_2 = -P_2 \cdot v\,.$$

Zum Schlusse bilden wir dann die Summe der KWP und setzen diese Summe gleich Null:

$$P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 = 0\,,$$
$$+P_1 \cdot v \sin\alpha - P_2 \cdot v = 0\,,$$
$$P_1 \cdot \sin\alpha - P_2 = 0\,,$$
$$P_2 = P_1 \cdot \sin\alpha\,.$$

Hiermit hat uns die Methode der KWP die mathematische Beziehung geliefert, in der die beiden Kräfte P_1 und P_2 zueinander stehen müssen, falls sie sich an der schiefen Ebene das Gleichgewicht halten sollen. Es ist natürlich dieselbe Beziehung, die sich im vorigen Paragraphen durch Anwendung der „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen ergeben hatte. Der Unterschied gegen früher ist nur der, daß wir uns um die Zwangskräfte gar nicht zu kümmern brauchten, überhaupt nicht auf die einzelnen Glieder (z. B. Seilkraft) so genau einzugehen brauchten, sondern den Mechanismus mehr als ein Ganzes vornehmen konnten.

Zweites Beispiel. In welchem Verhältnis müssen bei der *Roberval*schen Wage die Kräfte P_1 und P_2 zueinander stehen, damit das System im Gleichgewicht ist? (Zu untersuchen mittels der Methode der KWP; Fig. 170.)

Der Mechanismus ist die Hebelverbindung AB usw. Die freien Kräfte sind die Gewichte P_1 und P_2. Wir leiten eine Bewegung ein, indem wir z. B. den Hebel AB etwas links herumdrehen (Fig. 170). Wie die Figur zeigt, verschiebt sich dann der linke Arm GJ um eine Strecke nach unten und der rechte Arm um dieselbe Strecke nach oben. Die Verrückungen der Angriffspunkte mögen v_1 und v_2 heißen. Die Wege der Kräfte P_1 und P_2 sind also:

$$\text{Weg von } P_1: \quad \delta_1 = +v_1 \cdot \cos\varphi_1\,,$$
$$\text{,, ,, } P_2: \quad \delta_2 = -v_2 \cdot \cos\varphi_2\,.$$

Ferner die KWP:

$$\text{KWP von } P_1: \quad P_1 \cdot \delta_1 = +P_1 \cdot v_1 \cos\varphi_1\,,$$
$$\text{,, ,, } P_2: \quad P_2 \cdot \delta_2 = -P_2 \cdot v_2 \cos\varphi_2\,,$$

und die Methode der KWP liefert also die Gleichung:

$$P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 = 0\,,$$

$$+P_1 \cdot v_1 \cos\varphi_1 - P_2 \cdot v_2 \cos\varphi_2 = 0\,,$$

Nun ist aber bei diesem Mechanismus:

$$v_1 = v_2\,; \quad \varphi_1 = \varphi_2\,.$$

Hiermit geht die obige Formel über in:

$$+P_1 - P_2 = 0\,,$$

$$P_1 = P_2\,.$$

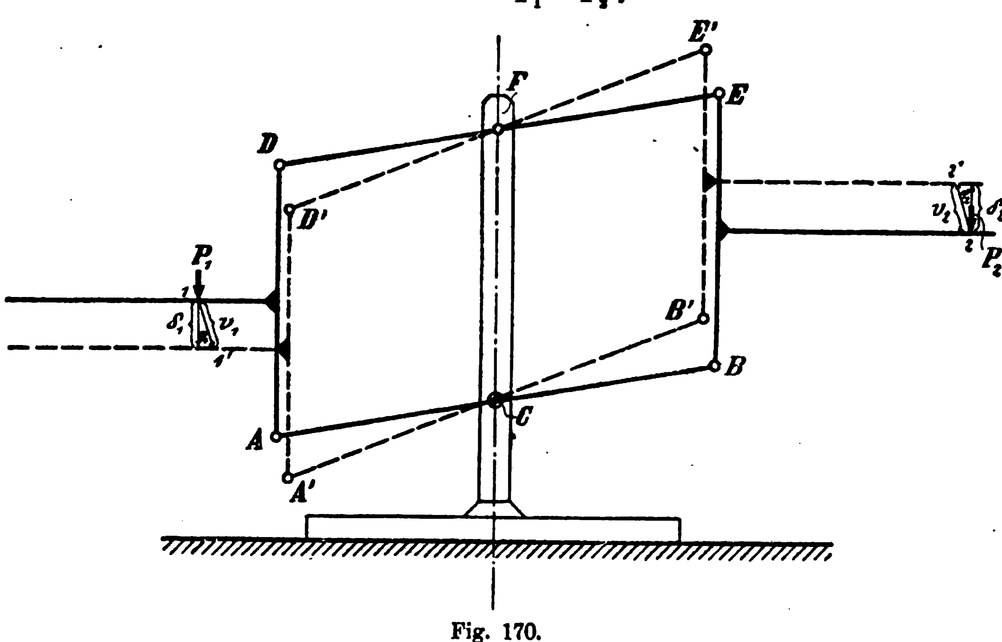


Fig. 170.

Der Vergleich mit der in § 63 gegebenen Lösung zeigt deutlich die Überlegenheit der KWP-Methode.

III. Beweis der KWP-Methode.

Den Angelpunkt der Methode der KWP bildet also die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0\,.}$$

In Worten: *Hält sich an einem Mechanismus eine Gruppe von Kräften das Gleichgewicht, und denkt man sich nun mit dem Mechanismus eine mögliche (virtuelle) Bewegung ausgeführt, so ist die Summe der hierbei entstehenden Kraft × Weg-Produkte aller freien Kräfte gleich Null.* Nun wollen wir beweisen, daß dieses tatsächlich

der Fall ist. Und zwar wird der Beweis so geführt werden, daß die KWP-Methode als eine Folgerung aus den „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen erscheint.

1. Beweis für den freien Punkt.

An einem frei beweglichen Punkte m mögen Kräfte P_1, P_2 usw. angreifen, die zusammen ein Gleichgewichtssystem bilden. Wie groß ist bei einer möglichen Verrückung des Punktes die Summe der KWP dieser Kräfte? (Fig. 171.)

Da der Punkt vollständig frei beweglich angenommen ist (ohne Lagerung), so ist jede Bewegung eine mögliche. In Wirklichkeit führt der Punkt zwar keine Bewegung aus, da ja die Kräfte $P_1 \dots P_4$ ein Gleichgewichtssystem bilden sollten. Ich denke mir aber willkürlich eine Bewegung eingeleitet, nur um zu sehen, wie groß in diesem Falle die KWP sein würden.

Diese eingeleitete Verrückung sei v (Fig. 171). Sie schließe mit den Kräften die Winkel $\alpha_1 \dots \alpha_4$ ein. Daraus folgen dann nach unserer Erklärung die „Wege" der einzelnen Kräfte:

$$\delta_1 = +v \cdot \cos\alpha_1\,; \quad \delta_2 = -v \cdot \cos\alpha_2\,; \quad \delta_3 = -v \cdot \cos\alpha_3\,; \quad \delta_4 = +v \cdot \cos\alpha_4\,.$$

[Die Verrückung v hat denselben Sinn wie die Kräfte P_1 und P_4, und entgegengesetzten Sinn wie die Kräfte P_2 und P_3; daher ergeben sich die verschiedenen Vorzeichen der Wege $\delta_1 \dots \delta_4$.] Durch Multiplikation der Kräfte mit den Wegen erhalten wir schließlich die Summe der KWP:

$$\begin{aligned}(P_1 \cdot \delta_1 + \dots + P_4 \cdot \delta_4) &= P_1 \cdot v \cdot \cos\alpha_1 - P_2 \cdot v \cdot \cos\alpha_2 - P_3 \cdot v \cdot \cos\alpha_3 + P_4 \cdot v \cdot \cos\alpha_4 \\ &= v(P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2 - P_3 \cos\alpha_3 + P_4 \cos\alpha_4)\,.\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck bekommen wir also zunächst für die Summe der KWP. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite ist aber ein alter Bekannter. Denn, denke ich mir die Linie $\overline{m m'}$ (Bewegungslinie) als x-Achse genommen und bilde nun von jeder Kraft P die Projektion $P \cdot \cos\alpha$ auf diese Achse, so ist die Summe dieser Projektionen nichts anderes als der Klammerausdruck auf der rechten Seite der obigen Gleichung. Diese Summe der Projektionen auf die x-Achse werde, wie gewöhnlich, R_x genannt. Mit dieser Bezeichnung nimmt der obige Ausdruck die Form an:

$$(P_1 \cdot \delta_1 + \dots + P_4 \cdot \delta_4) = v \cdot R_x\,.$$

Nun wissen wir aber aus den „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen, daß in diesem Falle die Summe R_x der Projektionen gleich Null ist. Denn die angreifende Kräftegruppe sollte ja ein Gleichgewichts-

system bilden. Wir müssen also in dem obigen Ausdruck für R_x den Wert:

$$R_x = 0$$

einsetzen und erhalten dann die endgültige Formel:

$$(P_1 \cdot \delta_1 + \ldots + P_4 \cdot \delta_4) = v \cdot R_x = v \cdot 0 = 0\,,$$

$$\text{(I)} \qquad \boxed{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0\,.}$$

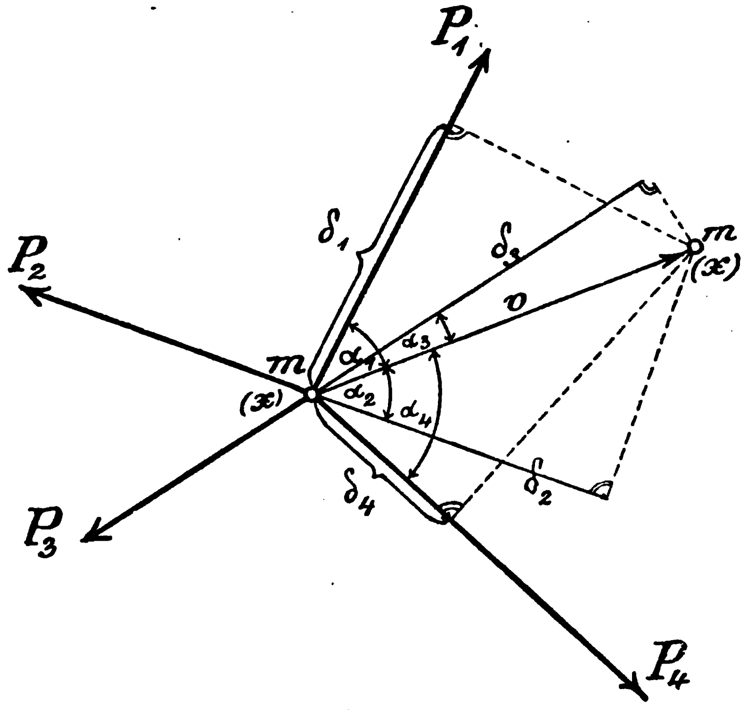


Fig. 171.

Hiermit ist bewiesen: *Hält sich an einem frei beweglichen Punkte eine Gruppe von Kräften das Gleichgewicht, so ist bei jeder angenommenen Verrückung dieses Punktes die Summe der KWP der Kräfte gleich Null.* [Man beachte hierbei, daß nicht etwa jedes einzelne KWP gleich Null ist, sondern ein Teil der KWP ist positiv, ein Teil negativ. Die Summe ist gleich Null.]

Übungsaufgabe: Der Leser zeichne einen Punkt mit irgendeinem Gleichgewichtssystem von Kräften auf, leite eine Verrückung v ein, konstruiere die Wege δ und rechne die KWP einzeln aus. Dann wird er sehen, daß tatsächlich für die Summe aller KWP der Wert Null herauskommt.

Bemerkung: Bei einem frei beweglichen Punkte wird allerdings die KWP-Methode gegenüber den „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen keine Vorteile bieten. Denn, da hier alle Kräfte freie Kräfte sind, müssen sie sämtlich in der Gleichung $P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0$ aufgeführt werden. Man spart also nichts an Kräften und hat nur die Unannehmlichkeit, daß man sich noch um die Wege δ kümmern muß. Auch mathematisch zeigt sich dieser enge Zusammenhang zwischen den beiden Methoden. Denn, wenn $R_x = 0$ ist, so ist es selbstverständlich, daß das Produkt $v \cdot R_x$ ebenfalls gleich Null ist. Insofern, als zwischen diesen beiden Behauptungen, die ja denselben Inhalt haben, ein neuer Gedanke nicht eingeschoben ist, kann auch die KWP-Methode in diesen Fällen gegenüber der früheren Methode nichts Neues bringen.

Wohl aber wird ein neuer Gedanke auftreten, wenn wir Fälle betrachten, in denen außer den freien Kräften auch Zwangskräfte vorhanden sind. Derart ist der folgende Fall.

2. Beweis für den geführten Punkt.

a) *Die Bahn sei geradlinig.*

Der Punkt m in Fig. 172 sei nicht absolut frei, sondern er habe nur die Bewegungsmöglichkeit längs einer (geraden) Führung F. Auf ihn wirke eine Gruppe von Kräften ein, und zwar derart, daß er gerade im Ruhezustand gehalten wird. Wie groß ist bei einer virtuellen Bewegung des Punktes die Summe der KWP dieser angreifenden Kräfte $P_1 \ldots$?

Jetzt haben wir es bereits mit einem „Mechanismus" zu tun. Denn der betreffende Körper (Punkt) kann sich zwar noch bewegen, aber nicht mehr vollständig frei, sondern nur in ganz bestimmter Bahn. Infolgedessen tritt auch bereits eine Zwangskraft auf, nämlich der Gegendruck N der Bahn. Diese Kraft ist also nicht von vornherein vorhanden, sondern wird erst durch die eigentlich angreifenden, freien Kräfte $P_1 \ldots$ erzeugt.

Zunächst zeichnen wir den Punkt mit sämtlichen Kräften auf (Fig. 172b). Dann haben wir denselben Fall wie vorhin in Fig. 171: Punkt mit vier Kräften, die zusammen ein Gleichgewichtssystem bilden. Denke ich mir also in Fig. 172b eine Verrückung v ausgeführt, so ist die Summe der KWP der vier Kräfte $P_1 \ldots N$ gleich Null.

$$\text{(II)} \qquad P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm \cdots \pm N \cdot \delta_N = 0\,.$$

Soweit wäre also alles wie vorhin. Die obige Gleichung ist zweifellos richtig; sie bietet aber keinen Vorteil, da ja die Zwangskraft N ebenfalls noch vorkommt.

Nun berücksichtige ich aber, daß der Punkt m von Fig. 172a nicht frei beweglich ist, sondern geführt wird. Man kann also nicht mehr jede beliebige Bewegung als „Verrückung v" einführen, sondern nur eine bestimmte Bewegung, nämlich die Ver-

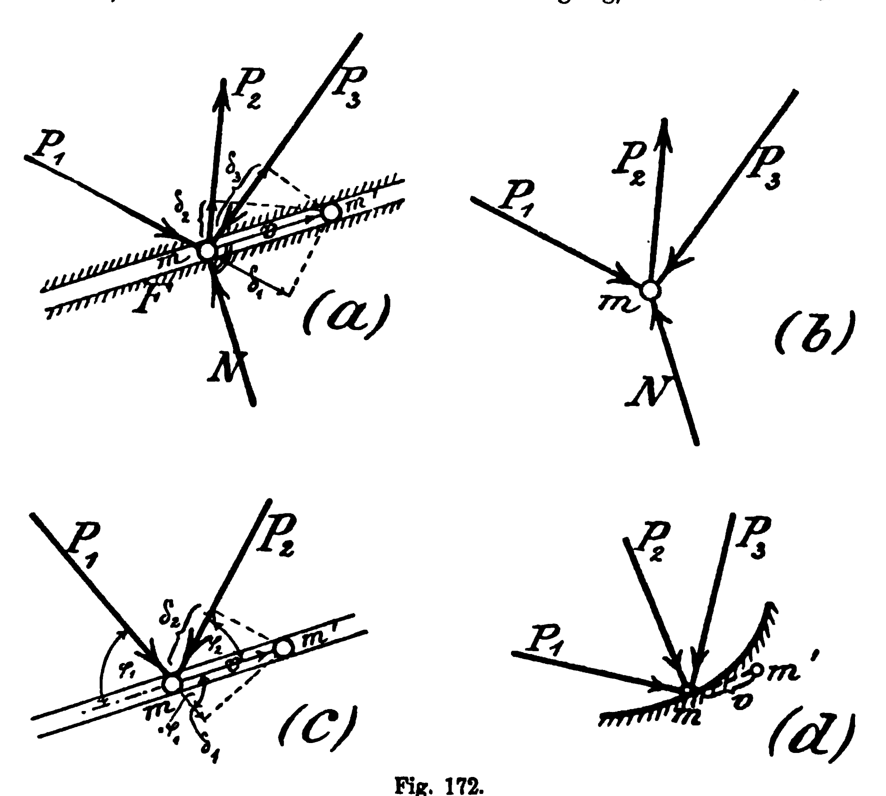


Fig. 172.

schiebung längs der Führung. Diese Bewegung ist also als virtuelle (mögliche) Verrückung anzunehmen, und gerade hierdurch, daß wir die Verrückung v den gegebenen Bedingungen anpassen, wird sich eine wichtige Vereinfachung der Gleichung (II) ergeben, Nämlich: Einerseits ist die virtuelle Verrückung v des Punktes m nur in Richtung der Führung F möglich. Andererseits ist die Auflagerkraft N stets rechtwinklig zur Führung (von der Reibung abgesehen). Wenn wir also die Projektion von v auf die Kraftrichtung bilden, so schrumpft diese Projektion stets in einen Punkt zusammen. Das heißt: *Bei einer virtuellen Verrückung*

eines zwangläufig geführten Punktes ist der „Weg" der Zwangskraft gleich Null.

Aus $\delta_N = 0$ folgt aber weiter, daß auch das KWP der Zwangskraft

$$\text{(III)} \qquad N \cdot \delta_N = 0$$

ist. In Worten: *Bei der virtuellen Verrückung des Punktes m ist das KWP der Zwangskraft gleich Null.* Dies ist der neue Gedanke, der in der Untersuchung hinzukommt.

Wenn nämlich das KWP der Zwangskraft schon für sich gleich Null ist, so brauchen wir es bei der Summe sämtlicher KWP gar nicht weiter aufzuführen. Es fällt also aus der Gleichung (III) **ein für allemal** heraus, so daß diese Gleichung einfach geschrieben werden kann:

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm P_3 \cdot \delta_3 = 0\,.}$$

In Worten: *Bei einem geführten Punkte, der unter der Einwirkung einer Gruppe von freien Kräften* P_1.. (und der dazugehörigen Zwangskraft N) *im Ruhezustande ist, ist nicht nur die Summe der KWP* ***sämtlicher*** *Kräfte, sondern bereits die Summe der KWP der freien Kräfte gleich Null.*

Die Gleichung (IV) ist bereits ein wertvoller Fortschritt. Wir haben hierdurch eine Beziehung, in der nur die freien Kräfte (um deren Berechnung es sich ja meistens handelt) auftreten. Bedingung für die Anwendung von Gleichung (IV) ist nur, daß die angenommene Verrückung v eine „virtuelle" ist, d. h. eine solche, die bei der betreffenden Führung möglich ist.

Übungsaufgabe: Der Leser zeichne einen geführten Punkt mit mehreren freien Kräften auf, die jedoch von der Art sind, daß sie den Punkt an einer Stelle festhalten. (Ihre Resultierende muß also rechtwinklig zur Führung stehen.) Dann nehme er eine Verrückung v an und kontrolliere durch direkte Ausrechnung, ob die Summe $P_1 \cdot \delta_1 + \ldots$ wirklich gleich Null herauskommt. Ferner überzeuge er sich, daß diese Summe n i c h t gleich Null wird, falls man eine n i c h t-virtuelle Verrückung zugrunde legt.

Beispiel. In welchem Verhältnis müssen in Fig. 172c die Kräfte P_1 und P_2 zueinander stehen, damit der Punkt m nicht verschoben werde?

Wir führen eine virtuelle Verrückung v längs der Führung ein und erhalten die Wege:

$$\delta_1 = +v \cdot \cos\varphi_1\,; \qquad \delta_2 = -v \cdot \cos\varphi_2\,.$$

Die Gleichung (IV) lautet somit:

$$+P_1 \cdot v \cos\varphi_1 - P_2 \cdot v \cos\varphi_2 = 0\,,$$
$$+P_1 \cdot \cos\varphi_1 - P_2 \cdot \cos\varphi_2 = 0\,,$$
$$P_1 \cdot \cos\varphi_1 = P_2 \cdot \cos\varphi_2\,.$$

Diese Beziehung muß also im Gleichgewichtsfalle zwischen den Kräften P_1 und P_2 bestehen.

b) Die Bahn sei krummlinig.

Ist der Punkt auf einer krummen Bahn geführt, so beachte man, daß eine gekrümmte Linie stets als eine Aufeinanderfolge von unendlich kleinen geraden Linien aufgefaßt werden kann. Jedes dieser unendlich kleinen Stücke hat die Richtung der Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkte; d. h. es steht rechtwinklig zu dem Radius der Kurve an der betreffenden Stelle. In Fig. 172d wird man also die Kurve an der Stelle m ersetzen durch eine in der Tangente liegende unendlich kleine gerade Strecke. Die Verrückung v wird demnach unendlich klein genommen. Dies ändert aber nichts an der ganzen Sache: Aus v werden zunächst wieder die δ abgeleitet:

$$\delta_1 = v \cdot \cos\varphi_1\,; \qquad \delta_2 = v \cdot \cos\varphi_2\,; \qquad \text{usw.}$$

und hierauf die Gleichung aufgestellt:

$$P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm \ldots = 0\,.$$

Diese Gleichung liefert dann die gesuchte Beziehung zwischen den Kräften.

3. Beweis für den freien scheibenförmigen Körper.

Eine Scheibe möge sich innerhalb ihrer Ebene frei bewegen können. An ihr greife eine Gruppe von Kräften an von der Größe und Anordnung, daß die Scheibe gerade im Ruhezustande gehalten wird. Wenn wir nun trotzdem eine Bewegung einleiten würden, wie groß wäre die Summe der KWP dieser Kraftgruppe?

Die Bewegung, die die Scheibe ausführen kann, ist entweder eine bloße Verschiebung oder eine Drehung oder eine Verbindung von beiden. Wir werden nun beweisen, daß sowohl bei der Verschiebung als auch bei der Drehung die Summe der KWP gleich Null ist. Damit ist dann auch bewiesen, daß bei einer Verbindung von Schiebung und Drehung die Summe Null herauskommen muß.

α) Bei einer Verschiebung. Jeder Punkt der Scheibe und also auch die Angriffspunkte der Kräfte mögen sich um eine Strecke v

verschieben (Fig. 173a). Dann entstehen zu den einzelnen Kräften die zugehörigen Wege:

$$\delta_1 = v \cdot \cos\alpha_1 \;; \qquad \delta_2 = v \cdot \cos\alpha_2 \;; \qquad \ldots$$

Hiermit erhalten wir die Summe der KWP der Kräfte:

$$(P_1 \cdot \delta_1 + \ldots) = P_1 \cdot v \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot v \cdot \cos\alpha_2 + \ldots$$
$$= v(P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots)\,.$$

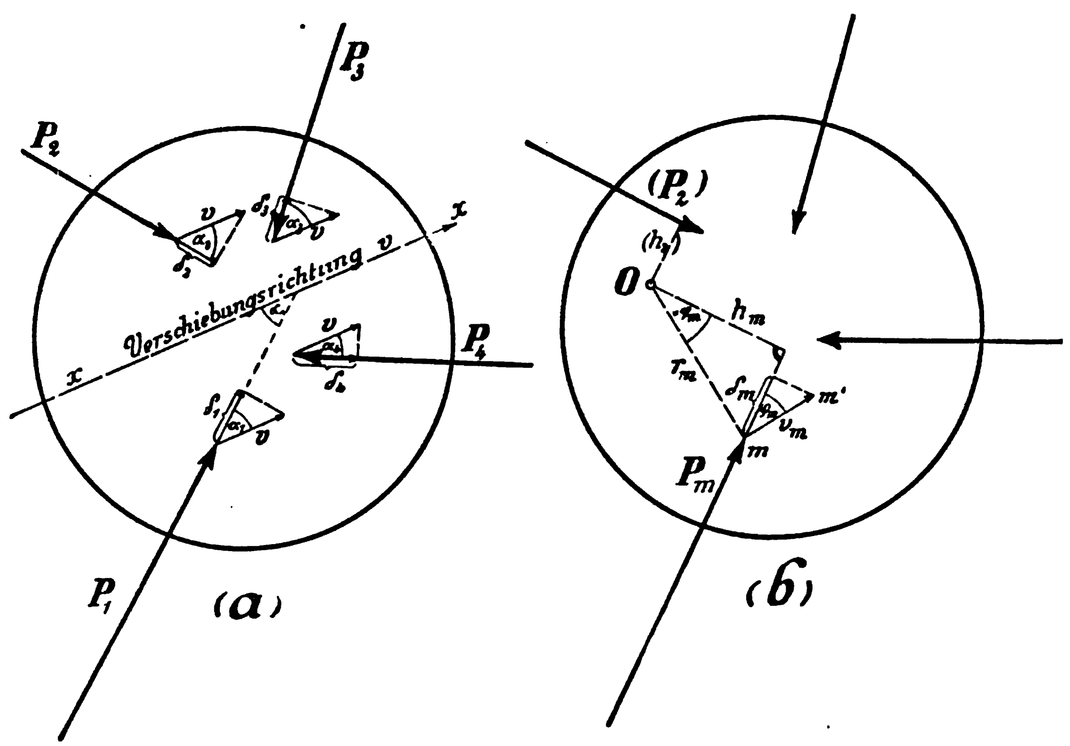


Fig. 173.

Nehmen wir nun auf dem Körper eine x-Achse an und zwar in der Verschiebungsrichtung, so wäre die Summe der Projektionen der Kräfte auf diese x-Achse nichts anderes als der Ausdruck in der obigen Klammer. Da außerdem im vorliegenden Falle die Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden sollen, hat diese Summe R_x die besondere Eigenschaft, daß sie gleich Null ist. Wir erhalten somit auch für den Ausdruck der KWP den Wert:

$$(P_1 \cdot \delta_1 + \ldots) = v \cdot R_x = v \cdot 0 = 0\,.$$

In Worten: Bei einer Verschiebung einer starren Scheibe, an der eine Gleichgewichtsgruppe von Kräften angreift, ist die Summe der KWP gleich Null.

β) **Bei einer Drehung.** Die Scheibe Fig. 173b drehe sich um irgendeinen Punkt O. Der Drehungswinkel sei ω (d. i. derjenige Winkel, den jeder durch O gezogene Strahl Om bei dieser Drehung durchläuft). Die Verrückung, die ein Punkt m mit dem Abstande r_m von O bei dieser Bewegung erfährt, wird also ein Kreisbogen von der Länge:

$$\text{Verrückung } v_m = \text{Abstand } r_m \times \text{Drehungswinkel } \omega$$

sein.

Wir wollen die Drehung nur unendlich klein nehmen. Dann geht nämlich der Kreisbogen v_m in eine unendlich kleine gerade Linie über, die rechtwinklig zum Radius r_m anzunehmen ist. (Der Kreisbogen schrumpft in eine Tangente zusammen.) Und wir erhalten aus der Verrückung v_m des Angriffspunktes den „Weg" der Kraft P_m:

$$\delta_m = v_m \cdot \cos\varphi_m = r_m \cdot \omega \cdot \cos\varphi_m \,.$$

Fällen wir nun in Fig. 173b vom Drehpunkte O das Lot h_m auf die Kraft P_m, so ist der Winkel zwischen r_m und h_m gleich dem Winkel φ_m zwischen P_m und v_m. (Denn r_m steht rechtwinklig zur Verrückung v_m, und h_m ist rechtwinklig zu P_m gezeichnet. Die Schenkel der Winkel stehen also paarweis rechtwinklig zueinander.) Es besteht also die Beziehung:

$$r_m \cdot \cos\varphi_m = h_m \,.$$

Hiermit geht der Ausdruck für δ über in:

$$\delta_m = \omega \cdot h_m \,(= \text{Drehungswinkel} \times \text{Lot von } O \text{ auf } P_m)\,.$$

Und schließlich finden wir das KWP der Kraft P_m:

$$P_m \cdot \delta_m = P_m \cdot h_m \cdot \omega \,.$$

Denken wir uns nun in der gleichen Weise auch für die anderen Kräfte P_2 usw. die KWP angeschrieben und schließlich sämtliche KWP summiert, so entsteht die Summe der KWP:

$$(P_1 \cdot \delta_1 + \ldots) = P_1 \cdot h_1 \cdot \omega + P_2 \cdot h_2 \cdot \omega + \ldots$$

Der Faktor ω ist hierbei konstant, da er ja der Drehungswinkel ist, den die ganze Scheibe ausführt. Wir können ihn also vor die Klammer ziehen:

$$\begin{aligned}(P_1 \cdot \delta_1 + \ldots) &= \omega(P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2 + \ldots)\\ &= \omega \cdot \Sigma M_O \,.\end{aligned}$$

Wir sehen, in der Klammer steht nichts anderes als die Summe der statischen Momente aller Kräfte in bezug auf den Punkt O. Diese Summe ist aber im vorliegenden Fall gleich Null, da ja die

Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden sollen. Wir setzen also den Wert

$$\Sigma M_O = 0$$

ein und erhalten die schließliche Formel:

$$(P \cdot \delta_1 + \ldots) = \omega \cdot 0 = 0 ,$$

in Worten: Greift an einer starren Scheibe eine im Gleichgewichtszustande befindliche Kräftegruppe an und denkt man sich nun mit dieser Scheibe um irgendeinen Punkt eine unendlich kleine Drehung ausgeführt, so ist die Summe der bei dieser Drehung entstehenden KWP gleich Null.

γ) **Bei einer Schiebung und Drehung.** Aus der Verbindung des unter α) und β) Gesagten folgt sofort der Satz:

Greifen an einer Scheibe Kräfte an in der Größe und Anordnung, daß die Scheibe gerade im Ruhezustande gehalten wird, und denkt man sich trotzdem eine Bewegung eingeleitet, die irgendwie aus Schiebung und (unendlich kleiner) Drehung zusammengesetzt ist, so ist die Summe der entstehenden KWP gleich Null. In Formel:

$$\boxed{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0 .}$$

Bemerkung. Ähnlich wie beim frei beweglichen Punkte ist auch bei der frei beweglichen Scheibe der obige Satz nichts anderes als eine andere, aber durchaus selbstverständliche Form der alten Gleichgewichtsbedingungen (nämlich der Gleichgewichtsbedingung $R_x = 0$ bzw. $\Sigma M = 0$). Ein neuer Gedanke ist nicht hinzugekommen, denn es ist ja selbstverständlich, daß, wenn $\Sigma M = 0$ ist, auch das Produkt $\omega \cdot \Sigma M$ zu Null werden muß. Bei einer Scheibe mit Zwangskräften, wie wir sie im folgenden behandeln werden, ist die Sache anders. Hier bildet die Methode der KWP tatsächlich eine Weiterführung der Theorie.

Nebenbei sei noch auf einen zweiten Punkt hingewiesen. Wir werden später (§ 67) sehen, daß, wenn eine Scheibe sich aus einer Lage in eine unendlich benachbarte Lage bewegt, diese Bewegung stets identisch ist mit einer Drehbewegung (eventuell mit unendlich weiter Drehachse). Es hätte also genügt, den obigen Beweis nur für Drehbewegungen durchzuführen. Doch ist die Durchführung sowohl für Schiebung als auch für Drehung natürlich ebenfalls korrekt.

4. Beweis für den Mechanismus.

Jetzt handle es sich um eine Scheibe, die irgendwie geführt sei, oder auch um eine gelenkige Verbindung von mehreren Scheiben mit zugehörigen Führungen („Mechanismus" z. B. Fig. 167). Auf den Mechanismus wirke eine Kräftegruppe derart, daß er

gerade im Ruhezustande gehalten wird. Nun denke ich mir mit dem Mechanismus eine virtuelle Bewegung ausgeführt (d. h. eine solche, die mit der Natur seiner Verbindungen und Führungen verträglich ist), so daß zu jeder Kraft ein KWP entsteht. Wie groß ist die Summe der KWP sämtlicher angreifenden **freien** Kräfte?

Als Beispiel werde der Mechanismus Fig. 174 genommen. Zunächst betrachte ich die einzelnen Scheiben mit **sämtlichen** Kräften, die an ihnen angreifen:

Scheibe I { freie Kräfte P_1 und P_2, Zwangskräfte A und $G_{I,a}$ (Gelenkdruck).

Scheibe II { freie Kraft P_3, Zwangskräfte $G_{II,a}$, $G_{II,b}$ und $G_{II,c}$

usw.

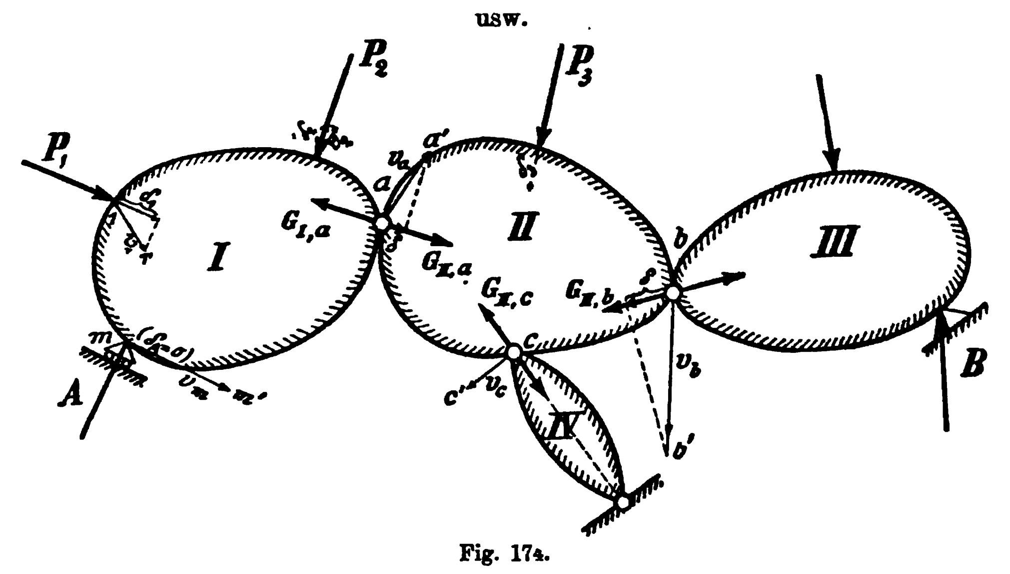


Fig. 174.

[Es bedeutet $G_{I,a}$ den Gelenkdruck, der im Gelenk a auf die Scheibe I wirkt; entsprechend $G_{II,a}$ usw.]

Wenn wir nun bei dem Mechanismus eine Bewegung einleiten, so daß zu jeder Kraft ein KWP entsteht, so ergeben sich zunächst aus der Betrachtung der einzelnen Scheiben folgende Gleichungen (ohne Berücksichtigung der Vorzeichen):

Von Scheibe I:

$$P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + A \cdot \delta_A + G_{I,a} \cdot \delta_{I,a} = 0;$$

von Scheibe II:

$$P_3 \cdot \delta_3 + G_{II,a} \cdot \delta_{II,a} + G_{II,b} \cdot \delta_{II,b} + G_{II,c} \cdot \delta_{II,c} = 0$$

usw.

[Die Bezeichnungen bedeuten natürlich folgendes: δ_1 ist der Weg von P_1; δ_A der Weg des Auflagerdruckes A; $\delta_{I,a}$ ist der Weg des Gelenkdruckes $G_{I,a}$ und wird gefunden durch Projektion der Verrückung v_a des Punktes a auf die Kraft $G_{I,a}$.]

Durch Addition aller dieser Gleichungen entsteht

$$\text{(V)}\quad \underbrace{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots}_{\text{freie Kräfte}} + \underbrace{\underbrace{A \cdot \delta_A + B \cdot \delta_B + \ldots}_{\text{Auflagerkräfte}} + \underbrace{G_{I,a} \cdot \delta_{I,a} + G_{II,a} \cdot \delta_{II,a} + \ldots}_{\text{Gelenkkräfte}}}_{\text{Zwangskräfte}} = 0$$

Nun beschränken wir aber unsere Untersuchungen auf „virtuelle" Bewegungen; also solche, die der Mechanismus tatsächlich ausführen würde, wenn er von außen her bewegt würde. Hierdurch wird die obige Gleichung ganz bedeutend vereinfacht: 1) Der Weg δ_A wird zu Null, denn die Verrückung des Angriffspunktes der Kraft A steht rechtwinklig zur Kraftrichtung, so daß die Projektion zu Null wird. Somit wird auch das Produkt $A \cdot \delta_A$ zu Null. Ebenso ergibt sich, daß der Weg δ_B auf jeden Fall gleich Null ist (da B ja als festes Auflager genommen ist). Also ist auch das Produkt $B \cdot \delta_B$ gleich Null. Entsprechend ergibt sich bei jeder anderen Auflagerkraft das KWP zu Null. *Bei den Auflagerkräften wird jedes einzelne KWP zu Null.*

2) Die Kräfte $G_{I,a}$ und $G_{II,a}$ sind der Größe nach gleich, da sie ja ein und denselben Gelenkdruck bedeuten, dargestellt in seiner Wirkung auf die beiden Scheiben. Auch die Wege $\delta_{I,a}$ und $\delta_{II,a}$ sind gleich lang, da sie ja die Projektion ein und derselben Verschiebung v_a des Gelenkes a sind. Die Produkte $G_{I,a} \cdot \delta_{I,a}$ und $G_{II,a} \cdot \delta_{II,a}$ sind also ebenfalls gleich groß. Sie haben aber entgegengesetzte Vorzeichen; denn, wie der Augenschein lehrt, ist der eine Weg δ stets in Richtung der betreffenden Kraft und der andere Weg δ entgegengesetzt der zugehörigen Kraft. Es ist also:

$$G_{I,a} \cdot \delta_{I,a} = -G_{II,a} \cdot \delta_{II,a},$$

und daraus folgt:

$$G_{I,a} \cdot \delta_{I,a} + G_{II,a} \cdot \delta_{II,a} = 0 .$$

Entsprechend gilt für die beiden Kräfte $G_{II,b}$ und $G_{III,b}$, die an dem Gelenk b auf die anstoßenden Scheiben wirken: Die Kräfte sind gleich groß; auch die Wege sind gleich lang, aber entgegengesetzt im Vorzeichen. Deshalb sind auch die Produkte $G_{III,b} \cdot \delta_{III,b}$ und $G_{II,b} \cdot \delta_{II,b}$ gleich groß, aber entgegengesetzt im Vorzeichen. Ihre Summe ergibt also Null. Allgemein gilt somit der Satz: *Die KWP, die zu den an einem Gelenkpunkte wirkenden Gelenkdrücken gehören, heben sich gegenseitig fort.* Dieser Satz gilt übrigens, wie

man leicht einsieht, auch für Gelenke, an denen mehr als zwei Scheiben zusammenstoßen.

Kehren wir jetzt zu unserer Gleichung (V) zurück, so ergibt sich folgendes: Von den KWP der Auflagerkräfte hat sich gezeigt, daß sie einzeln gleich Null sind. Von den KWP der Gelenkkräfte hat sich gezeigt, daß sie sich an jedem Gelenke aufheben. Es sind also nur übrig geblieben die KWP der freien Kräfte:

$$\text{(VI)} \qquad \boxed{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0\,.}$$

In Worten: *Hält sich an irgendeinem beliebig gestützten und beliebig aus Scheiben zusammengesetzten Mechanismus eine Gruppe von* (freien) *Kräften das Gleichgewicht, so ist die bei einer virtuellen Verrückung entstehende Summe der KWP gleich Null.* Und zwar gilt diese Aussage nicht nur, wenn man alle Kräfte einführt (was nämlich kein Gewinn für uns wäre), sondern auch dann, wenn man nur die freien Kräfte einführt (was eine erhebliche Rechenvereinfachung bedeutet). Bedingung ist nur, daß die angenommene Bewegung auch wirklich eine „virtuelle" ist.

Die gedachte Bewegung muß also genau den vorgeschriebenen Bahnen entsprechen. Für ein bewegliches Lager darf nur eine Bewegung längs der Führung herauskommen; an einer Gelenkstelle darf der Zusammenhang der Scheiben nicht gestört werden usw. Auf diesen Punkt muß hingewiesen werden, weil man ja gedanklich jeder Scheibe jede beliebige Bewegung zudiktieren könnte, gewissermaßen unter Zerreißung der Zusammenhänge. Eine solche Bewegung wäre dann aber keine virtuelle.

Hiermit ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch für einen beliebig zusammengesetzten Mechanismus bewiesen.

IV. Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen haben wir das Gleichgewicht von Mechanismen betrachtet. Es handelt sich um die Frage: „Wenn ein Mechanismus durch eine Gruppe von Kräften im Gleichgewicht gehalten wird, welche Beziehungen lassen sich zwischen diesen Kräften aufstellen?" Die Lösung ist folgende:

1. Wir denken uns bei dem Mechanismus eine Bewegung eingeleitet, so daß die Angriffspunkte der Kräfte **„Verrückungen v"** ausführen. Bedingung für diese künstlich eingeleitete Bewegung ist nur, daß sie eine „virtuelle" ist; d. h. daß sie den Auflager- und Gelenkverbindungen, denen der betreffende Mechanismus unterworfen ist, entspricht. (Bei einem zwangläufigen Mechanismus, der nur eine bestimmte Bewegungsmöglichkeit hat,

ist diese virtuelle Verrückung also gerade die, die der Mechanismus ausführen würde, sobald das Gleichgewicht gestört werden würde.)

2. Die Verrückungen selbst sind allerdings für die weitere Untersuchung nicht direkt verwendbar. Wohl aber deren Projektionen auf die Kräfte, die „Wege δ". Bildet man nämlich für jede Kraft das Produkt aus ihrer Größe P und ihrem Wege δ, so läßt sich die Aussage beweisen: Die Summe sämtlicher KWP ist gleich Null. In Formel:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \ldots = 0 .}$$

[Natürlich kann die Nullwerdung der obigen Summe nur dadurch zustande kommen, daß ein Teil der Produkte positiv, ein Teil negativ ist. Positiv sind die Produkte, bei denen δ dieselbe Pfeilrichtung hat wie P; negativ, wenn δ entgegengesetzt ist P.]

Das Wertvolle bei der obigen Gleichung ist, daß nur die KWP der **freien Kräfte**, nicht aber der Zwangskräfte, angeschrieben zu werden brauchen. Eigentlich müßte man die letzteren natürlich auch berücksichtigen. Die Untersuchung hat aber gezeigt, daß, sofern wir uns auf virtuelle Verrückungen beschränken, die KWP der Zwangskräfte entweder direkt einzeln gleich Null werden (bei den Auflagern) oder aber in Gruppen sich fortheben (bei den Gelenken). Auf diese Weise ist eine Gleichung entstanden, die von den Zwangskräften frei ist und sich infolgedessen vorzüglich zur Berechnung der freien Kräfte eignet.

V. Geschichtliches.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist zum erstenmal in seiner allgemeinen Gültigkeit und dem Hinweis auf die allgemeine Bedeutung ausgesprochen von *Johann Bernoulli*, im Jahre 1717 in einem Briefe an *Varignon*. Doch lassen sich die Ansätze von diesem Satze weit früher nachweisen. Bereits *Galilei*, der Begründer der wissenschaftlichen Mechanik (1564—1642), ferner *Descartes* (1596—1650) u. a. hatten erkannt, daß das Ausschlaggebende beim Gleichgewicht von Mechanismen das Produkt aus Kraft $\times$ Weg ist. Dieser Gedanke, das Produkt aus Kraft und Weg zu bilden ist, ist aber zweifellos der Kernpunkt des ganzen Satzes, so daß man wohl behaupten kann, daß namentlich schon *Galilei* das Prinzip der virtuellen Verrückungen zwar nicht in seiner Allgemeinheit erkannt, immerhin aber gewissermaßen empfunden und bei hierzu geeigneten Aufgaben auch verwendet hat. (Schiefe Ebene, Flaschenzug.)

Das Interessante hierbei ist, daß *Galilei* nachweislich den Satz vom Kräfteparallelogramm nicht gekannt hat. Wenn man aber die Entwicklung der Mechanik überlegt, erscheint es gar nicht wunderbar, daß die Ver-

wendung der KWP zur Untersuchung von Gleichgewichtsaufgaben früher war als die Verwendung des Satzes vom Kräfteparallelogramm: Denn am meisten beschäftigten sich damals die Physiker mit der Untersuchung der sog. einfachen Maschinen (Hebel, Flaschenzug, schiefe Ebene usw.); also mit unseren „Mechanismen". Die damals gestellten Fragen waren: Wie müssen sich bei der schiefen Ebene Last und Kraft verhalten, um Gleichgewicht zu erzielen? usw. Gerade aber bei diesen Aufgaben wird der Physiker geradezu gedrängt, neben der Kraft ihren Weg zu verfolgen und beide Größen miteinander in Beziehung zu setzen. So war die Methode der KWP vorbereitet.

Noch ein zweiter Umstand muß hierbei erwähnt werden. Zu Zeiten *Galileis* war man sich über das Wesen der **Zwangskräfte** noch nicht im klaren. Man betrachtete vielmehr die freien Kräfte — was ja der Anfänger auch jetzt noch gerne tut — als die einzigen Kräfte, um die man sich zu kümmern braucht. Auch hier ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen dem Forscher entgegengekommen; denn gerade dieses Übersehen der Zwangskräfte, was bei anderen Methoden ein Fehler ist, ist erlaubt bei der KWP-Methode.

Wir sehen somit, wie das Prinzip der virtuellen Verrückungen sich aus der Betrachtung der einfachen Mechanismen entwickelt hat: Zuerst die aus einzelnen Beispielen geschöpfte Beobachtuug, daß die Kraft und ihr Weg diejenigen Punkte sind, auf die der Forscher bei Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse zu achten hat. Später dann die allgemeine Erkenntnis und mathematische Formulierung des Satzes.

Lagrange stellte 1788 das Prinzip der virtuellen Verrückungen an die Spitze der Mechanik. Er faßte es als wirkliches „Prinzip", als Grundfundament der gesamten Mechanik auf und erzielte hierdurch eine bisher noch nicht übertroffene Einheitlichkeit und Eleganz der Darstellung aller mechanischen Vorgänge.

Auch bei der heutigen Mechanik steht das Prinzip d. v. V. natürlich an hervorragender Stelle. In der technischen Statik hat es allerdings erst ziemlich spät Eingang gefunden. Wie es hier verwendet wird und wer die betreffenden Methoden ausgearbeitet hat, wird später an geeigneter Stelle gesagt werden.

§ 65.

Anwendung der KWP-Methode zur Berechnung von Tragwerken.

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen zur Berechnung von Tragwerken ergibt sich aus folgenden Überlegungen.

1. Verwandlung des Tragwerkes in einen von freien Kräften im Gleichgewicht gehaltenen Mechanismus.

Ohne weiteres kann die KWP-Methode nicht zur Berechnung von Tragwerken verwendet werden. Denn ein Tragwerk ist kein Mechanismus, sondern muß im Gegenteil ein **unbewegliches** System sein. Um also das Prinzip der virtuellen Verrückungen zur Berechnung einer Tragkonstruktion benutzen zu können,

müssen wir letztere zunächst in einen Mechanismus verwandeln. Dies und die weitere Anwendung der KWP-Methode möge an Hand von Fig. 175 erläutert werden.

Der Stab S in Fig. 175 soll berechnet werden. Das Fachwerk ist absichtlich so kompliziert gewählt; denn je komplizierter die Konstruktion, desto besser für die Anwendung der KWP-Methode.

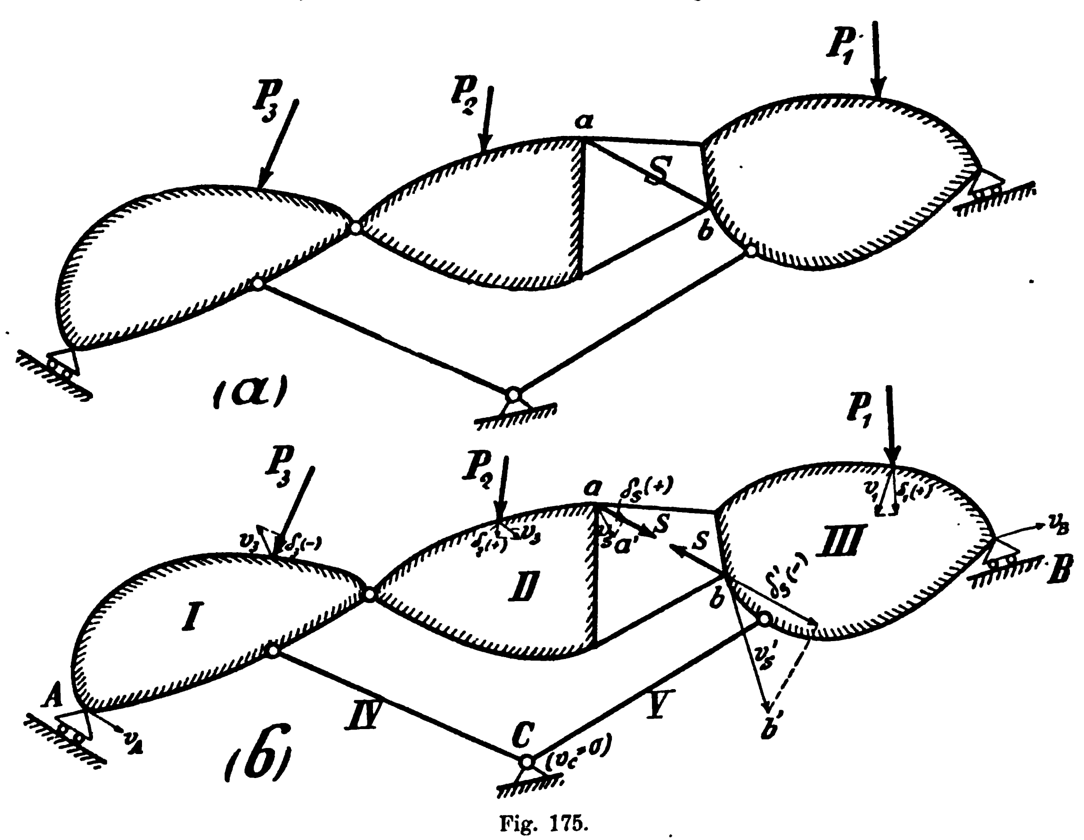


Fig. 175.

Wir denken uns den Stab S herausgenommen. Hierdurch ist das Fachwerk beweglich geworden. Denn es würde, da ja jetzt ein Stab zu wenig ist, unter der Einwirkung der Lasten $P_1 \ldots$ einfach zusammenbrechen. Wir haben also unser erstes Ziel erreicht: Aus einem unbeweglichen Tragwerk ist ein Mechanismus geworden.

Und zwar handelt es sich um einen zwangläufigen Mechanismus. Denn durch die Fortnahme des Stabes S ist die Konstruktion in eine Anzahl von Scheiben zerlegt (I, II usw.), die mit dem Widerlager und unter sich durch Gelenke in Verbindung

stehen. Wenn sich nun der Mechanismus bewegen würde, so würde jeder Teil desselben ganz bestimmte Verrückungen ausführen. [Daß jeder Teil tatsächlich nur eine ganz bestimmte Bewegung ausführen kann, werden wir später noch genauer beweisen, wenn wir die einzelnen Bewegungen untersuchen werden; § 66 usw.] Das Tragwerk ist also durch die Fortnahme des Stabes S in eine Konstruktion verwandelt, die genau der schiefen Ebene, der *Roberval*schen Wage usw. entspricht, nämlich in einen **zwangläufigen Mechanismus.**

Nun denke ich mir aber an den beiden Knotenpunkten, wo früher der Stab S angriff, dessen Spannkräfte angebracht. Und zwar in genau derselben Größe, in der der Stab S in der ursprünglichen Figur wirkt. [Die Größe S ist natürlich unbekannt; wir können sie aber eingezeichnet denken.] Dann wird sich der Mechanismus nicht bewegen; denn die beiden Kräfte S wirken ja genau so wie der Stab S selber in dem ursprünglichen Tragwerk. Durch die Fortnahme des Stabes S und seine Ersetzung durch die beiden, an seinen Endpunkten angebrachten Spannkräfte haben wir also folgendes erreicht: Aus unserem Tragwerk ist ein zwangläufiger Mechanismus geworden, der durch die freien (angreifenden) Kräfte P_1, P_2, P_3, S, S im augenblicklichen Ruhezustand gehalten wird. Durch diese Umwandlung haben wir das Tragwerk zur Anwendung der KWP-Methode bereit gemacht.

2. Anwendung der Methode.

Die weitere Anwendung der KWP-Methode ist jetzt eigentlich selbstverständlich: Wir denken uns mit dem Mechanismus eine virtuelle Verrückung vorgenommen; d. h. eine solche, bei welcher alle Auflager- und Gelenkbedingungen respektiert werden. In Fig. 175b könnte man damit anfangen, daß man den Auflagerpunkt A längs der vorgeschriebenen Bahn etwas verrückt (und das feste Auflager natürlich in Ruhe läßt). Dann wird jeder andere Punkt eine ganz bestimmte Bahn ausführen. Diese Bahnen sind nach unseren früheren Bezeichnungen die „Verrückungen v“.

Im nächsten Vortrage werden wir sehen, daß sich diese Verrückungen v eines solchen Mechanismus in ganz überraschend einfacher Weise geometrisch konstruieren lassen. Wir wollen jetzt bei unserem Beispiel Fig. 175b annehmen, sie seien bereits gefunden. [Es bedeute also v_1 die Verrückung des Angriffspunktes der Kraft P_1; v_S die Verrückung der linken Kraft S; usw.] Dann werden wir, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, zunächst jede

Verrückung v auf die zugehörige Kraft projizieren. Hierdurch entstehen die „Wege δ“ der einzelnen Kräfte. Und schließlich bilden wir die Produkte aus Kraft und Weg und setzen deren Summe gleich Null. Hiermit entsteht die Gleichung:

$$P_1 \cdot \delta_1 + S \cdot \delta_S - S \cdot \delta_S' + P_2 \cdot \delta_2 - P_3 \cdot \delta_3 = 0 .$$

Diese Gleichung enthält als Unbekannte nur den Wert S. Alle anderen Größen sind bekannt (denn die Wege δ ergeben sich ja aus der Figur, sobald die Verrückungen v konstruiert sind). Wir lösen also die Gleichung nach S auf und erhalten:

$$S = \frac{P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 - P_3 \cdot \delta_3}{\delta_S' - \delta_S} .$$

Hiermit ist unser Ziel erreicht.

Wiederholung.

Um den Stab S zu berechnen, nehmen wir ihn aus der Konstruktion heraus und bringen statt seiner an den Endpunkten innerhalb der früheren Stabachse die (unbekannten) Spannkräfte S an. Hiermit ist das Tragwerk in einen (zwangläufigen) Mechanismus verwandelt. Um nun denjenigen Wert von S zu finden, bei dem der Mechanismus im Ruhezustande bleibt, wenden wir die Methode der KWP an: Wir erteilen dem Mechanismus eine virtuelle Verrückung, bestimmen hierdurch zu jeder Kraft den zugehörigen Weg δ und das zugehörige KWP und setzen deren Summe gleich Null. Hierdurch entsteht eine Gleichung, in der außer den bekannten Kräften auch die Unbekannte S vorkommt. Letztere kann dann aus der Gleichung berechnet werden.

Der große Vorteil dieser Methode ist der, daß nicht erst die Auflagerkräfte (Gelenkdrücke) ermittelt zu werden, sondern daß S **direkt als Funktion der Lasten P** angeschrieben werden kann. (Trotzdem kann man hiernach auch Auflagerkräfte usw. berechnen; § 73, 3. Aufg.)

Unsere nächste Aufgabe wird es nun sein, die Verrückungen v bzw. die Wege δ zu untersuchen, die ein solcher Mechanismus ausführt. Denn diese Größen brauchen wir ja, um die KWP zu bilden.

10. Vortrag:

Geometrische Bewegungslehre (Kinematik).

Die Aufgabe, mit der wir uns in diesem Vortrage beschäftigen wollen, lautet: Ein Tragwerk sei durch Fortnahme eines Stabes (oder einer Auflagerkraft od. dgl.) in einen Mechanismus verwandelt. Wenn wir nun bei diesem Mechanismus eine virtuelle

Bewegung einleiten, wie vollziehen sich die Verrückungen der einzelnen Teile?

Wir haben jetzt also nichts mit Kräften zu tun; sondern es soll nur geometrisch untersucht werden, welche Bewegungen ein solcher Mechanismus ausführt.

§ 66.

Elementare Untersuchung der Bewegungen.

1. Geometrische Konstruktion.

Um zu zeigen, wie einfach die geometrische Bewegungslehre ist, möge zunächst eine Aufgabe in ganz elementarer Weise behandelt werden: Das Fachwerk Fig. 176a werde durch Fortnahme

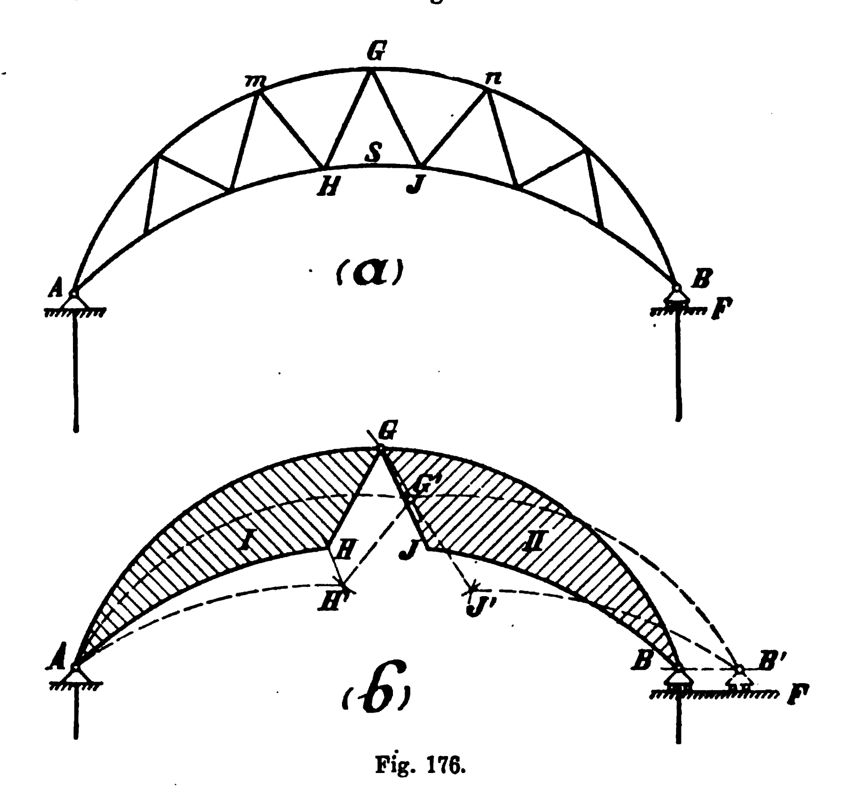


Fig. 176.

des Stabes S in einen Mechanismus verwandelt (Fig. 176b). Wie werden sich die virtuellen Verrückungen vollziehen?

Der Mechanismus besteht aus den beiden Scheiben I und II, die bei A fest, bei B beweglich gelagert und bei G gelenkig miteinander verbunden sind. Die „virtuelle" Bewegung des

Mechanismus (d. h. diejenige, die der vorliegende Mechanismus wirklich ausführen kann und wird) ist also durch folgendes gekennzeichnet: Punkt A führt überhaupt keine Verrückung aus; Punkt B muß auf der Führung F bleiben, und bei G müssen die beiden Scheiben zusammenbleiben.

Wir beginnen mit der Scheibe I. Punkt A muß fest bleiben. Die einzige Bewegung, die der Scheibe überhaupt möglich ist, besteht also in einer Drehung um den Punkt A. Ob wir nach links oder nach rechts drehen, ist gleichgültig. (Es würden sich nur alle Vorzeichen umkehren.) Wir führen nun die Drehung aus Fig. 176b) und haben somit die virtuelle Bewegung der Scheibe I.)

Der Winkel, um den die Scheibe gedreht wird, kann beliebig groß genommen werden. Nimmt man aber die Größe der Verrückung eines Punktes an, so ergeben sich daraus sofort die Verrückungen aller anderen Punkte. Beispielsweise ergibt sich aus einer angenommenen Bewegung GG' des Punktes G die Bewegung des Punktes H, indem man um A mit AH den Kreis schlägt und zwar so weit, daß $\sphericalangle HAH'$ (Drehungswinkel von H) gleich $\sphericalangle GAG'$ (Drehungswinkel von G) wird. Entsprechend für jeden anderen Punkt der Scheibe I.

Die Bewegung der Scheibe II ergibt sich aus der Bedingung, daß der Punkt B auf der Führung F bleiben und daß ferner Scheibe II an Scheibe I im Punkte G anschließen muß. Geometrisch wird man so vorgehen: Man nimmt GB in den Zirkel und schlägt mit dieser Strecke um G' den Kreis. Wo dieser Kreis die Führung des Lagers schneidet, ist die neue Lage des Punktes B (Punkt B'). Um ferner die Verrückung eines anderen Punktes, z. B. des Punktes J, zu bestimmen, nimmt man GJ und BJ in den Zirkel und schlägt um G' und B' Kreise; usw. Auf diese Weise kann man also, indem man zunächst für die Scheibe I eine virtuelle Bewegung annimmt, genau angeben, wie sich diese Bewegung auf den ganzen Mechanismus überträgt, und welche Verrückung jeder einzelne Punkt erleiden wird. Unsere Aufgabe, in elementarer Weise die Form aufzufinden, in die das Fachwerk Fig. 176a übergehen würde, wenn Stab U nicht vorhanden wäre, ist somit durch Fig. 176b gelöst.

Aufgabe: Der Leser ermittle auf diese Weise die Verrückungen von Zwischenpunkten m, n usw.

2. Weitere Bemerkungen.

Wie man sieht, lassen sich die Verrückungen ganz elementar mit Zirkel und Lineal finden. Namentlich bei Scheibe *I*, wo alle Punkte sich auf Kreisen um den Punkt *A* bewegen. Bei Scheibe *II* ist die Bewegung allerdings umständlich, da hier ein Gleiten längs der Bahn *F* und gleichzeitig eine Drehung um den Punkt *G* geschieht.

Unsere weitere Aufgabe wird es nun sein, die geometrische Konstruktion der Verrückungen zu vereinfachen. Und zwar wird dies dadurch geschehen, daß wir jede Bewegung auf eine Drehung zurückführen. Wir werden z. B. sehen, daß auch die anscheinend so komplizierte Bewegung der Scheibe *II* nichts weiter ist als eine versteckte Drehbewegung. Diese Zurückführung aller Bewegungen auf die bequemste Form einer Bewegung, nämlich auf Drehungen, ist der Fortschritt, den die weiteren Untersuchungen gegenüber der soeben durchgenommenen elementaren Darstellung bringen werden.

§ 67.

Zurückführung der Bewegungen der einzelnen Glieder eines Mechanismus auf einfache Drehungen.

1. Ein Hilfssatz aus der Mathematik.

Für das Folgende möge zunächst ein mathematischer Satz abgeleitet werden. Dieser hat vorläufig nichts mit der Mechanik zu tun, sondern ist rein geometrischer Natur. Er lautet: Innerhalb einer Ebene sei eine geometrische Figur, z. B. ein Viereck, in zwei verschiedenen Stellungen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gezeichnet (Fig. 177a). Dann läßt sich stets ein Punkt P ausfindig machen mit folgenden Eigenschaften: Verbindet man diesen Punkt P mit jedem Punkte der Figur in ihrer alten und neuen Stellung, so sind erstens diese Verbindungslinien PA und PA', PB und PB', PC und PC' usw. je paarweis untereinander gleich, und zweitens sind die Winkel APA', BPB', CPC' usw. zwischen diesen Verbindungslinien sämtlich einander gleich. Und zwar ergibt sich dieser Punkt P, indem man bei zwei Punkten der Figur die Verbindungslinien zwischen ihrer alten und neuen Stellung zieht (z. B. die Verbindungslinien $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$) und auf diesen Verbindungslinien Mittellote errichtet.

Zum Verständnis und Beweise dieses Satzes nehme der Leser eine aus Pappe geschnittene Figur, z. B. ein Viereck, und lege es in zwei verschiedene Stellungen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ hin

(Fig. 177a. „Alte Stellung“ und „neue Stellung“). Hierauf verbinde er zwei Punkte, z. B. A und B, der alten Stellung mit den entsprechenden Punkten (A' und B') der neuen Stellung, errichte auf diesen beiden Verbindungslinien (AA' und BB') Mittellote und verbinde schließlich deren Schnittpunkt P mit allen übrigen Punkten (C und C', D und D'). Dann kann er folgendes nachmessen: Erstens, die Verbindungslinien PA und PA', PB und PB' usw. sind paarweis einander gleich; zweitens, die Winkel APA', BPB' usw. zwischen den Verbindungslinien sind alle gleich groß. In Formeln:

(1) $PA = PA', \quad PB = PB', \quad PC = PC', \quad PD = PD';$

(2) $\sphericalangle APA' = \sphericalangle BPB' = \sphericalangle CPC' = \sphericalangle DPD'.$

Hiermit ist der Satz praktisch bewiesen.

Mathematisch wollen wir ihn folgendermaßen beweisen: Als geometrische Figur werde der Einfachheit wegen ein Dreieck gewählt (Fig. 177b; Seiten a, b, c; Winkel α, β, γ). Diese Figur markieren wir nun in der Zeichenebene in zwei verschiedenen Stellungen ABC und $A'B'C'$, bestimmen in der vorhin beschriebenen Weise den Punkt P als Schnittpunkt der beiden Mittellote MP und NP und verbinden P mit allen übrigen Punkten. Dann sieht man bei der so entstandenen geometrischen Figur zunächst folgende Beziehungen ein: Es ist (wegen der Mittellote)

$$(1\text{a})\qquad \begin{cases} \text{Seite } \overline{PA} = \text{Seite } \overline{PA'}, \\ \text{Seite } \overline{PB} = \text{Seite } \overline{PB'}. \end{cases}$$

Somit ist ein Teil der Behauptungen bereits bewiesen. Aus den obigen Beziehungen folgt aber weiterhin die Kongruenz der beiden Dreiecke:

$$\triangle PBA \cong \triangle PB'A'$$

(Übereinstimmung in allen drei Seiten). Und hieraus folgt:

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PB'A'.$$

Addieren wir zu den beiden Seiten dieser Gleichung den Dreieckswinkel β, so ergibt sich:

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PB'C'.$$

Aus der Gleichheit dieser Winkel folgt aber folgende Kongruenz von Dreiecken

$$\triangle PBC \cong \triangle PB'C'$$

(Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel). Und aus dieser Kongruenz ergibt sich:

$$(1\text{b})\qquad \text{Seite } \overline{PC} = \text{Seite } \overline{PC'}.$$

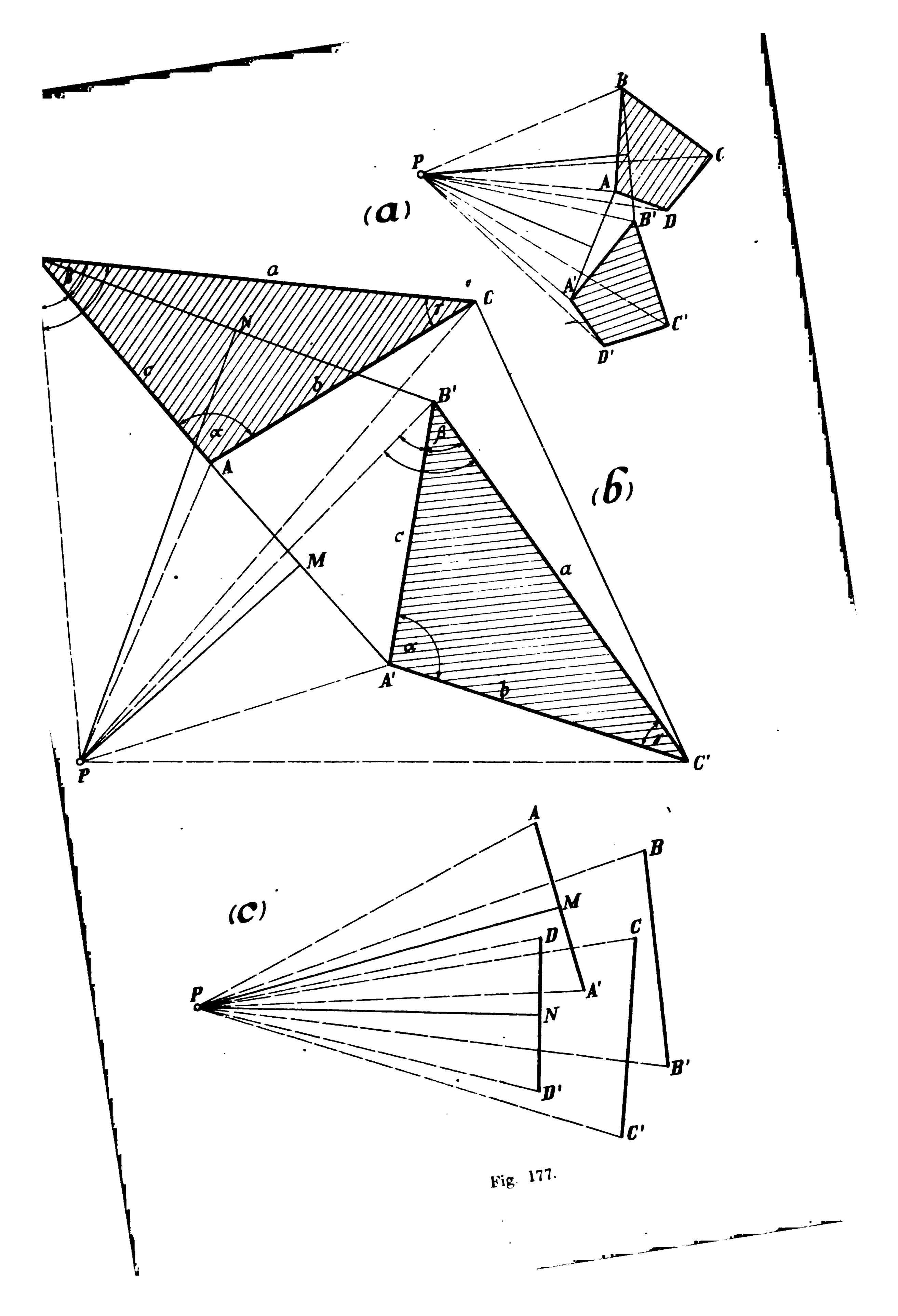


Fig. 177.

Insgesamt haben wir jetzt also bereits die Gleichungen bewiesen:

(1) $PA = PA', \quad PB = PB', \quad PC = PC'.$

Jetzt betrachten wir noch die entstandenen Winkel APA' usw. Aus der bereits vorhin bewiesenen Kongruenz der Dreiecke APB und $A'PB'$ folgt zunächst, daß

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle A'PB'$$

ist. Addiert man in dieser Gleichung auf beiden Seiten den Winkel APB', so ergibt sich:

(2a) $\sphericalangle BPB' = \sphericalangle APA'.$

In entsprechender Weise läßt sich der Winkel CPC' darstellen, so daß auch die zweite Behauptung bewiesen ist:

(2) $\sphericalangle APA' = \sphericalangle BPB' = \sphericalangle CPC'.$

Hiermit ist der ganze Satz mathematisch bewiesen. Wie man sofort einsieht, gilt die entsprechende Beweisführung auch dann, wenn die betrachtete geometrische Figur nicht ein einfaches Dreieck ist, sondern irgendeine andere, beliebige Gestalt hat, so daß wir es mit einem ganz allgemein gültigen mathematischen Satz zu tun haben.

Wiederholung: Wenn wir eine geometrische Figur innerhalb einer Ebene in zwei verschiedenen Stellungen $ABCD$ usw. und $A'B'C'D'$ usw. aufzeichnen, so läßt sich zu diesen beiden Stellungen stets ein Punkt P angeben, der in folgender Beziehung zu den anderen Punkten steht. Es ist

(1) $PA = PA', \quad PB = PB', \quad PC = PC',$ usw.;

(2) $\sphericalangle APA' = \sphericalangle BPB' = \sphericalangle CPC'$ usw.

Zusatz: Man kann diesen Satz auch so aussprechen (Fig. 177c): Befindet sich in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Strecken AA', BB', CC' usw. von der besonderen Art, daß die Verbindungslinien ihrer Anfangspunkte A, B, C usw. dieselbe geometrische Figur bilden wie die Verbindungslinien der Endpunkte A', B', C' usw., so haben diese Strecken folgende Eigenschaften: Errichtet man auf zweien von ihnen die Mittellote, und verbindet den Schnittpunkt P dieser beiden Mittellote mit dem Anfangs- und Endpunkte einer jeden Strecke durch zwei Strahlen (PA und PA', usw.), so sind diese Strahlen paarweis einander gleich, und die Winkel zwischen je zwei Strahlen sind sämtlich einander gleich. Oder auch: Alle Mittellote auf diesen Strecken schneiden sich in *einem* Punkte P. Aus dieser Fassung sieht man, daß es sich hier um einen sehr interessanten Satz aus der Geometrie handelt.

II. Anwendung dieses Satzes in der Mechanik.

Der obige mathematische Hilfssatz wird sich als sehr nützlich erweisen, um die Bewegung eines (scheibenförmigen) Körpers innerhalb einer Ebene zu untersuchen. Wir wollen hierbei zwei Fälle unterscheiden: 1) Die betreffende Scheibe habe sich um ein endliches Stück aus ihrer ursprünglichen Lage entfernt. 2) Die Scheibe habe sich nur um einen unendlich kleinen Betrag aus ihrer Anfangslage entfernt.

1. Jede (beliebig große) Ortsveränderung einer Scheibe kann durch eine einfache Drehung erzielt werden.

In Fig. 178 ist eine starre Scheibe — im vorliegenden Falle ein Viereck $ABCD$ — in zwei Lagen dargestellt. Auf welchem Wege die Scheibe aus der alten Lage $ABCD$ in die neue Lage

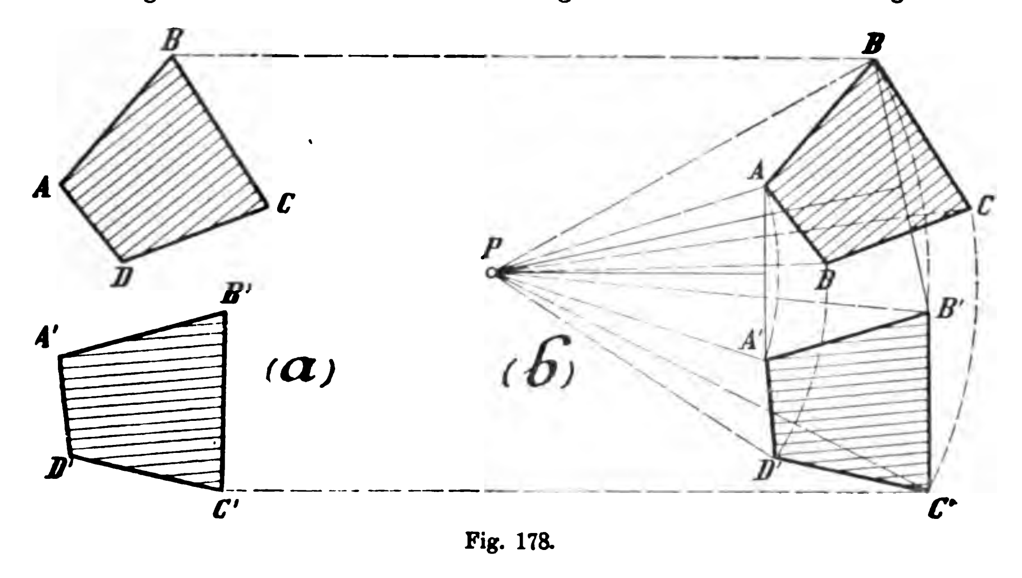


Fig. 178.

$A'B'C'D'$ gelangt ist, sei unbekannt; ob durch geradlinige Verschiebung oder eine Drehung oder beides gleichzeitig. Das eine läßt sich aber zeigen, daß die Ortsänderung, die durch die wirklich stattgefundene Bewegung vollzogen ist, auch stets durch eine gewöhnliche Drehung um einen festen Punkt hätte erreicht werden können.

Um dies einzusehen, mache man sich klar, was das Kennzeichnende einer Drehbewegung ist. Wenn z. B. in Fig. 178b die Scheibe $ABCD$ dadurch in die neue Lage $A'B'C'D'$ gelangt wäre, daß sie sich tatsächlich um einen Drehpunkt P gedreht hätte,

so müßten augenscheinlich folgende Beziehungen bestehen. Es müßte sein:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} PA = PA'; \quad PB = PB'; \quad PC = PC'; \quad PD = PD'; \\ \sphericalangle APA' = \sphericalangle BPB' = \sphericalangle CPC' = \sphericalangle DPD'. \end{cases}$$

Denn, wenn diese Beziehungen bestehen, so hat sich tatsächlich jeder Punkt auf einem Kreisbogen um P bewegt, und zwar haben alle Polstrahlen PA, PB, PC, PD einen gleichgroßen Winkel beschrieben (wie es ja bei der Drehung einer starren Scheibe um einen Drehpunkt sein muß). Die obigen Gleichungen sind somit das Kennzeichnende für die Drehbewegung einer starren Scheibe $ABCD$. Wenn also die Aufgabe gestellt wird, eine Scheibe $ABCD$ durch eine einfache Drehung in eine neue Lage $A'B'C'D'$ zu bringen, so heißt dies in mathematischer Hinsicht nichts anderes als: einen Punkt P ausfindig zu machen, der zu den übrigen Punkten A, A' usw. in den Beziehungen steht: $PA = PA'$ usw.

Nun haben wir aber in Absatz I dieses Paragraphen bewiesen, daß sich zu zwei geometrischen Figuren $ABCD$ und $A'B'C'D'$ stets ein Punkt P ausfindig machen läßt von der Eigenschaft, daß die Beziehungen bestehen: $PA = PA'$, usw. Es läßt sich also zu zwei Lagen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einer Scheibe stets ein Punkt P aufsuchen, der genau dieselben mathematischen Bedingungen erfüllt wie der Drehpunkt bei einer Drehbewegung. Mit anderen Worten: Zu zwei Lagen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einer Scheibe läßt sich stets ein Punkt P angeben von der Eigenschaft, daß wir die Scheibe nur um diesen Punkt P zu drehen brauchten, um aus der einen Lage in die andere zu kommen. Gefunden wird dieser Punkt P, indem wir — wie vorhin bewiesen — zwei Verbindungslinien AA' und BB' ziehen und auf diesen Mittellote errichten.

[Man beachte wohl: Die wirkliche Bewegung der Scheibe aus der einen Lage in die andere kann auf die verschiedensten Weisen geschehen sein. Über diese tatsächlich stattgefundenen Bewegungen läßt sich natürlich aus der bloßen Betrachung der Anfangs- und Endlage nichts aussagen. Wohl aber sagt unser Satz aus, daß sich dasselbe Resultat auch stets durch eine einfache Drehbewegung erzielen ließe. Er zeigt also den einfachsten Weg, den die Scheibe genommen haben könnte.]

Es kann natürlich auch vorkommen, daß die Drehbewegung in eine einfache Verschiebung übergeht. Dies zeigt sich darin, daß sich bei der Konstruktion des Drehpunktes P ergibt, daß er in die Unendlichkeit fällt. Dann werden die Bahnen der einzelnen Punkte, d. h. die Kreisbögen um den Punkt P, gerade Linien.

2. Die genaue Anschmiegung der Drehbewegungen an die wirklich ausgeführten Bewegungen.

Betrachten wir eine Scheibe im Verlaufe ihrer wirklich ausgeführten Bewegung, so können wir nach dem beschriebenen Verfahren für je zwei aufeinanderfolgende Stellungen den Drehpol bestimmen und die dazwischenliegende Bewegung durch eine einfache Kreisbewegung um den gefundenen Pol ersetzen. Je näher benachbart die einzelnen Stellungen genommen werden, desto besser wird die Kreisbewegung mit der wirklichen Bewegung übereinstimmen. Und wenn wir schließlich zu unendlich benachbarten Stellungen übergehen, wird diese wirklich stattgefundene, unendlich kleine Bewegung genau übereinstimmen mit der Kreisbewegung um den zu diesen beiden Stellungen konstruierten Drehpol.

In diesem besonderen Falle bezeichnen wir den Drehpunkt P als den **„momentanen Drehpol“**; so genannt, weil eine Drehbewegung um diesen Punkt für einen Augenblick mit der wahren Bewegung der Scheibe übereinstimmt.

Wenn man also die Bahnen betrachtet, die die einzelnen Punkte einer Scheibe zwischen zwei unendlich benachbarten Stellungen beschreiben, so stimmen diese Bahnen vollständig überein mit denjenigen Bahnen, die entstehen würden, wenn die Scheibe als Ganzes eine einfache Drehbewegung ausführen würde. Ein Unterschied zwischen den Bahnen der gegebenen Bewegung und den Bahnen dieser gedachten Drehbewegung wäre gar nicht mehr zu bemerken. Wir haben also den Satz: Wie auch die Bewegung einer Scheibe beschaffen sein möge, sie ist nichts anderes als die stete Aufeinanderfolge von einfachen Drehbewegungen. Zu jeder dieser unendlich vielen Drehbewegungen gehört aber im allgemeinen ein besonderer Pol (der momentane Drehpol).

Dies ist der **„Satz vom momentanen Drehpol“**. Durch ihn kann die komplizierteste Bewegung in eine Reihe von einfachen Drehbewegungen aufgelöst werden.

III. Zusammenfassung.

Das wichtige Resultat dieses Paragraphen ist folgendes: Wenn man eine Scheibe in einem Augenblicke ihrer Bewegung beobachtet, so ergibt sich stets, daß diese Bewegung nichts anderes sein kann als eine einfache Drehbewegung um einen Punkt P. Die Bahnen der einzelnen Punkte mögen noch so kompliziert sein,

es läßt sich stets ein Pol P ausfindig machen von der Eigenschaft, daß, wenn man die Scheibe einfach um diesen Pol drehen würde, genau die Bahnen der einzelnen Punkte wieder zum Vorschein kommen würden.

Dieser Satz entschleiert gewissermaßen mit einem Schlage alle Bewegungen, die überhaupt möglich sind. Allerdings gilt er immer nur für einen Augenblick der betreffenden Bewegung. Dies genügt aber.

§ 68.

Bestimmung der momentanen Drehpole.

I. Grundprinzip der Polbestimmungen.

Um nun in einem gegebenen Falle die Auflösung einer stattgefundenen Bewegung in lauter Drehbewegungen wirklich ausführen zu können, muß man natürlich auch die Pole dieser Drehungen angeben. Wie man zu jeder Lagenänderung einer Scheibe den Pol der zugehörigen Drehbewegung findet, ergab sich ja bereits bei der Untersuchung, die zur Erkenntnis der Drehbewegung überhaupt führte (Fig. 178): Auf den Bahnen AA' und BB' zweier Punkte werden Mittellote errichtet. Deren Schnittpunkt P ist dann der Drehpunkt für die Drehbewegung der ganzen Scheibe.

Im folgenden werden wir uns immer auf unendlich kleine Bewegungen beschränken (damit die Drehbewegung vollständig identisch werde mit der augenblicklichen Bewegung des betreffenden Körpers). Hierdurch entstehen noch Vereinfachungen, wie aus Fig. 178 hervorgeht, wenn man die Wege AA' und BB' unendlich klein nimmt. Der Punkt A' liegt dann unmittelbar neben A, und das Mittellot erscheint unmittelbar im Punkte A. Entsprechend ist es bei BB' und seinem Mittellote. Wir haben also den Satz: *Um bei einer unendlich kleinen Bewegung den Drehpol zu finden, errichte man direkt in zwei Punkten (A und B) rechtwinklig zu deren Bewegungsrichtungen (AA' und BB') die Lote. Deren Schnittpunkt ist dann der Pol.* Dies ist das Grundprinzip aller Polbestimmungen.

[Von zwei Punkten der Scheibe muß man also die Linien kennen, innerhalb welcher sie sich bewegt haben. Dann kann man den — für alle Punkte gültigen — Drehpol bestimmen.]

II. Direkte Anwendung dieses Grundprinzips.

Mit Hilfe dieses Grundprinzips lassen sich bei vielen Bewegungen sofort die Drehpole der sie ersetzenden Drehbewegung angeben.

Fall 1: Eine Scheibe, an einem Drehbolzen angeschlossen.

Als Beispiel nehme man die Scheibe I von Fig. 176 mit dem Drehpunkte A. In diesem einfachsten Falle — der nur der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt werden soll — brauchen wir natürlich überhaupt keine Theorie. Denn die einzige mögliche Bewegung der Scheibe ist die Drehung um A. Dieser Punkt bleibt also dauernder Drehpol.

Fall 2: Eine Scheibe auf zwei geraden oder krummlinigen Führungen.

Die augenblickliche Lage einer Scheibe sei in Fig. 179 dargestellt. Wie wird sich diese Scheibe im nächsten Augenblick bewegen?

Wir kennen die Bewegungen zweier Punkte: Der Punkt A muß sich längs der geradlinigen Bahn F_1 bewegen. Er lege hierbei einen Weg AA' zurück. Der Punkt B muß sich längs der krummen Führung F_2 bewegen; er wird hierbei ein Kurvenelement BB' zurücklegen.

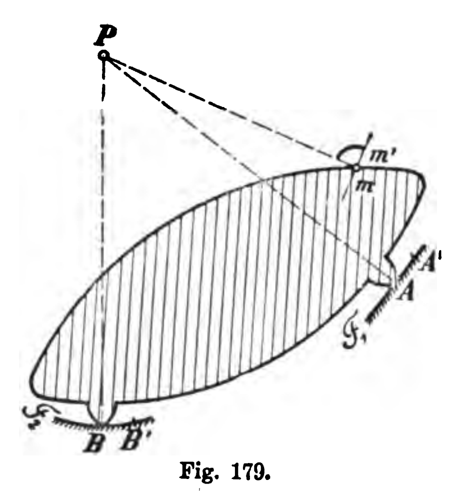


Fig. 179.

Um nun den Drehpol P zu bestimmen, müßten wir eigentlich auf AA' und BB' die Mittellote errichten. Da wir aber nur die nächste, unendlich kleine Bewegung der Scheibe wissen wollen, so müssen wir auch die Linie AA' als unendlich annehmen. Die Punkte A und A' unterscheiden sich dann in der Zeichnung überhaupt nicht, so daß an Stelle des Mittellotes von AA' einfach das Lot im Punkte A genommen werden kann.

Entsprechend ist es bei BB'. Das Kurvenelement BB' ist unendlich klein, und statt des Mittellotes der Verrückung BB' kann einfach das Lot, das im Punkte B zur Kurve errichtet ist, genommen werden. Hierdurch ist der Pol P bestimmt.

Wiederholung: Ist eine Scheibe längs zweier Führungen geführt, so ergibt sich der momentane Drehpol, indem man an den Führungsstellen zu den Führungskurven Lote errichtet.

Anwendung: Im nächsten Augenblick, der unmittelbar hinter der in Fig. 179 gezeichneten Lage kommt, kann also die ganze Scheibe keine andere Bewegung ausführen als eine Drehbewegung

um den Punkt P. Lautet beispielsweise die Frage: Welche Bewegung wird der Punkt m in Fig. 179 im nächsten Augenblick ausführen? so ergibt sich die Antwort: Die ganze Scheibe dreht sich um P, folglich ist die Bahn des Punktes m im nächsten Augenblick der unendlich kleine Kreisbogen um P mit dem Radius $\overline{Pm}$. Da ein Kreisbogen stets rechtwinklig zum Radius steht, so kann man auch sagen: Punkt m beschreibt einen kleinen Weg in Richtung der Geraden mm', die rechtwinklig zum Radius Pm gezogen ist. Wir sehen hier den Nutzen der Einführung der Drehbewegung: Sobald man erst den Pol hat, kann man zu jedem Punkte angeben, innerhalb welcher Linie er sich im nächsten Augenblick bewegen wird.

Fall 3: Scheibe mit zwei Führungsstäben.

Dieser Fall läßt sich zurückführen auf den vorhergehenden, doch soll er seiner Wichtigkeit wegen besonders hervorgehoben werden (Fig. 180). Durch den Stab S_1 ist der Punkt A der Scheibe gezwungen, sich auf einem Kreisbogen mit dem Radius S_1 zu bewegen. Sein unendlich kleiner Weg ist also die Tangente an diesem Kreisbogen im Punkte A. Und das Lot zu diesem Wege ist einfach der Radius S_1 bzw. dessen Verlängerung. [Der Radius ist stets rechtwinklig zum Bogen.] Entsprechend ist das Lot auf der zu dem Punkte B gehörigen unendlich kleinen Bahn dargestellt durch den Radius S_2 dieser Bahn. Bringt man nun diese beiden Lote zum Schnitt, so erhält man den Pol, um den sich im nächsten Augenblick die Scheibe drehen wird.

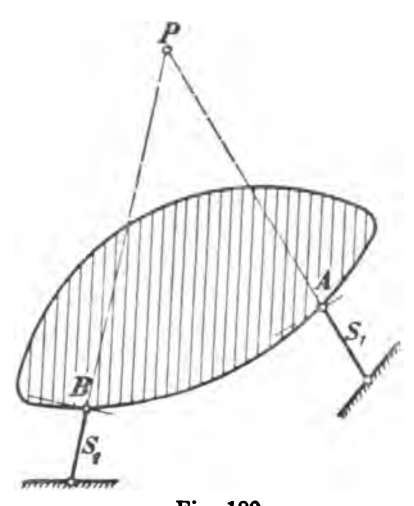


Fig. 180.

Wiederholung: Ist eine Scheibe durch zwei Stäbe geführt, so wird ihr momentaner Drehpol gefunden als der Schnittpunkt dieser beiden Stäbe.

Fall 4: Zwei Scheiben, fest und geführt gelagert und durch ein Gelenk miteinander verbunden.

Dieser Fall tritt immer dann ein, wenn ein Fachwerk durch Fortnahme eines Gurtstabes in einen Mechanismus verwandelt

wird (Fig. 181). Die Bewegungen, die die beiden Scheiben *I* und *II* im nächsten Augenblick ausführen werden, ergeben sich aus den Polbestimmungen:

Für Scheibe *I* fällt der Pol in den Gelenkbolzen *A*. Wir schreiben also an diesem Punkte: $P_{(I)}$ oder (I) und haben somit den Pol der Scheibe *I* bestimmt.

Von der Scheibe *II* kennen wir die Bahn zweier Punkte. Der Punkt *B* kann sich nämlich nur horizontal bewegen; der Punkt *G* kann sich nur im Kreisbogen um den Punkt *A* mit dem Radius *AG* bewegen. Da die Bewegungen zweier Punkte stets

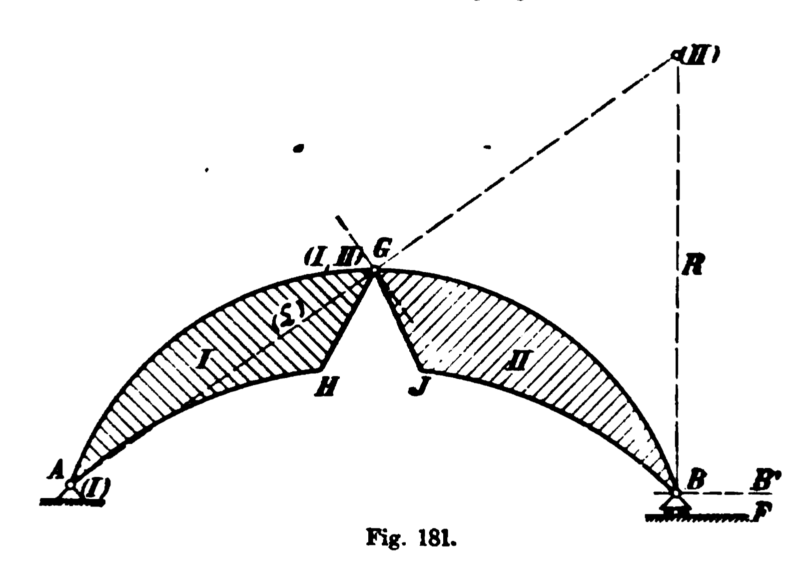


Fig. 181.

genügen, um den Pol zu bestimmen, muß sich auch für Scheibe *II* der Pol angeben lassen.

Der Punkt *B* beschreibt den unendlich kleinen Weg *BB'*. Wir errichten also in *B* das Lot *R* zur Führung und haben hierdurch bereits eine Angabe für den Pol $P_{(II)}$. Der Punkt *G* beschreibt einen Kreisbogen. Das Lot zu einem Kreisbogen ist stets der Radius des Kreises an der betreffenden Stelle. Wir ziehen also die Linie *AG* und haben hiermit eine zweite Angabe für den Pol (II). Der Schnittpunkt beider Angaben (des in *B* errichteten Lotes und des Radius *AG*) ist dann der Pol der Scheibe *II*.

Anwendung: Wie wird sich in Fig. 181 der Punkt *H* im nächsten Augenblick bewegen? (Rechtwinklig zu dem nach dem Drehpol gezogenen Strahl *AH*.) Wie wird sich Punkt *J* bewegen?

III. Polbestimmung auf dem Umwege der „Relativpole“.

Bei den bisherigen, in Fall 2—4 betrachteten Polbestimmungen sind wir stets so vorgegangen, daß wir auf Grund der Lagerung bzw. Stützung der betreffenden Scheibe zunächst die Bewegungsrichtungen **zweier** ihrer Punkte feststellten. Indem wir dann die Lote zu diesen beiden Bewegungsrichtungen zogen, konnten wir den Pol der Scheibe konstruieren. Dies ist ja auch das Grundprinzip der Polbestimmung wie es sich aus der ganzen Herleitung der Sache (Fig. 178) ergibt.

Wenn nun ein Mechanismus aus einer größeren Anzahl von Scheiben besteht, so ist es mitunter nicht möglich, bei jeder Scheibe zwei solche Punkte aufzufinden, deren Bewegungsrichtungen man von vornherein kennt und die man also zur Polbestimmung benutzen könnte. Dann muß man einen Umweg einschlagen, indem man zunächst die sog. „relative“ Bewegung der Scheiben gegeneinander betrachtet und daraus dann zur Erkennung der wahren Bewegung gelangt.

1. Allgemeines über „relative“ Bewegung.

In Fig. 182a sind zwei Scheiben I und II gezeichnet, die zu irgendeinem Mechanismus gehören mögen. [Den Mechanismus selbst kann man sich z. B. nach Fig. 182b gestaltet denken: Scheibe I greife etwas unter Scheibe II. Die Stäbe S_1 und S_2 sind Führungsstäbe zwischen I und II.] Wir wissen, daß, wenn sich dieser Mechanismus in Bewegung setzen würde, die Scheiben I und II nichts anderes tun können, als Drehbewegungen ausführen. Die Drehbewegung, die die Scheibe I im nächsten Augenblick ausführen wird, geschehe um den momentanen Pol P_I. Entsprechend gehöre zu der Scheibe II der Pol P_{II}. Dieses sind die sog. „**absoluten**“ Bewegungen der Scheiben.

Nun wollen wir noch die sog. „**Relativbewegung**“ der Scheiben gegeneinander betrachten. Hierunter versteht man folgendes:

Denken wir uns bei der Scheibe II z. B. im Punkte C einen Stift befestigt, so wird dieser bei der Bewegung des Mechanismus auf der Scheibe I eine Kurve einritzen. Er wird gewissermaßen auf der Scheibe I seine Spur hinterlassen. Diese Spur heiße die „**relative Bahn**“ des (zur Scheibe II gehörigen) Punktes C gegen die Scheibe I.

Man muß also unterscheiden zwischen „absoluter“ und „relativer“ Bahn eines Punktes. Die **absolute** Bahn des Punktes C

ist die Kreisbewegung um den Pol P_{II}. Diese Bahn würde sich auf einer untergelegten Zeichenplatte markieren. Die relative Bahn dagegen markiert sich nur auf der Scheibe I. Sie bringt gewissermaßen den Unterschied der Bewegungen der beiden Scheiben zum Ausdruck.

Versuch: Man schlage um einen festen Punkt P_{II} (der außerhalb eines beweglichen Blattes liegt) einen Kreis, während man das Blatt selber um einen anderen Punkt P_I dreht. Die hierbei auf dem Blatte entstehende Kurve ist dann die relative Bahn der Zirkelspitze gegen das Blatt.

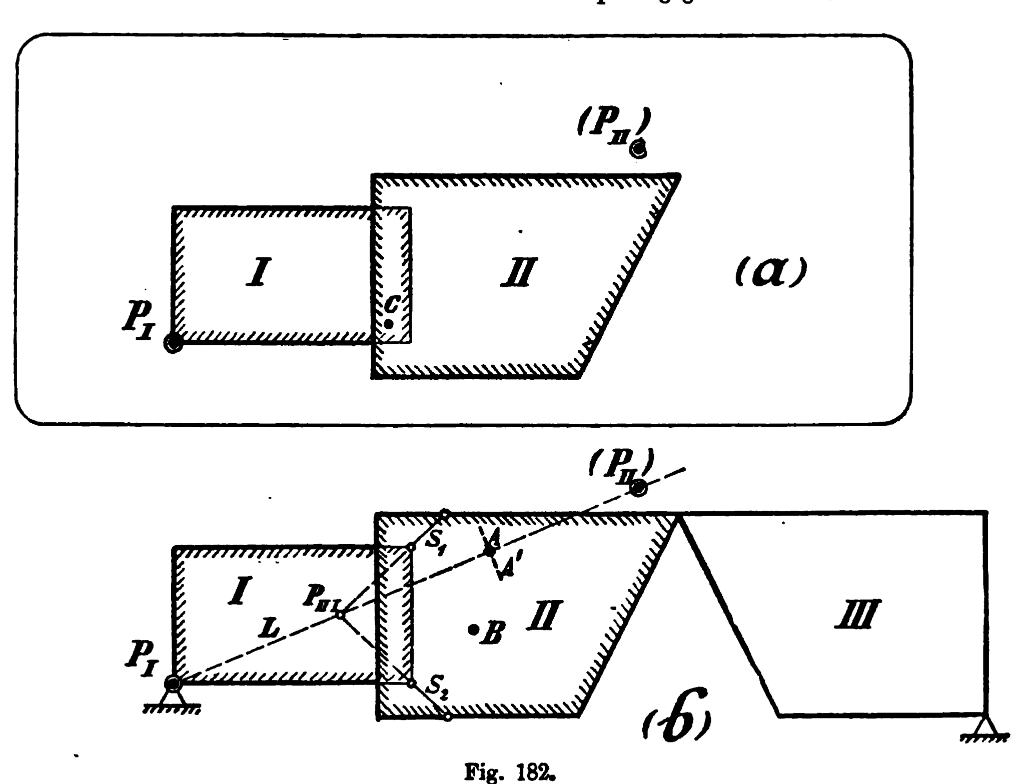


Fig. 182.

Man kann auch so sagen: Die absolute Bahn eines Punktes ist die Bewegung, die ein Beobachter bemerkt, der auf den ganzen Mechanismus von oben herabsieht. Die relative Bahn dagegen ist die Bewegung, die ein auf der Scheibe I befindlicher Beobachter wahrnehmen würde. Denn ein solcher Beobachter merkt bekanntlich von der Drehbewegung seiner eigenen Scheibe I nichts. Er sieht über sich nur die Scheibe II sich bewegen, und zwar sind die Spuren der Bewegung, die er wahrnimmt, nichts anderes als die relativen Bahnen der Punkte der Scheibe II auf der Scheibe I.

2. Genauere Feststellung der Relativbewegung (Relativpol).

Wenn man nun die Spuren (relativen Wege) betrachtet, die die Scheibe *II* auf der Scheibe *I* zurücklegt, so werden sie zunächst natürlich ganz unregelmäßig erscheinen. In Wirklichkeit lassen ie sich aber sehr übersichtlich zusammenfassen. Es läßt sich nämlich zeigen: Alle diese Bahnen, die die Scheibe *II* auf der Scheibe *I* beschreibt, sind nichts anderes als unendlich kleine Kreisbögen um einen Punkt als Mittelpunkt, den man sich auf der Scheibe *I* markiert denken kann.

Dies folgt sofort aus der allgemeinen mathematischen Untersuchung von Bewegungen, die wir im vorigen Paragraphen durchgeführt haben: Wenn eine geometrische Figur (Scheibe) auf einer Ebene Spuren beschreibt (AA', BB' usw.), so können diese Wege in jedem Augenblicke als kleine Kreisbögen um einen gemeinsamen Mittelpunkt P dargestellt werden. Dieser Satz gilt ganz allgemein für jede Art von Spuren AA', BB' usw., vorausgesetzt nur, daß diese Spuren durch eine geometrisch unveränderliche Figur (starre Scheibe) erzeugt sind (Fig. 177c).

Wir können ihn also auch auf die Bahnen, die die Punkte der Scheibe *II* auf der Scheibe *I* einritzen, anwenden. Das heißt: Auch zu diesen Relativbahnen läßt sich ein Punkt aufsuchen von der Eigenschaft, daß sämtliche Relativbahnen einfach als unendlich kleine Kreisbewegungen um ihn erscheinen. Somit ist der obige Satz bewiesen.

Dieser Mittelpunkt werde der „Relativpol" von Scheibe *II* gegen Scheibe *I* genannt und mit $P_{II\,I}$ bezeichnet.

[Die Bedeutung dieses „Relativpoles" $P_{II\,I}$ ist also folgende: Wenn ich den Pol $P_{II\,I}$ kenne, so kann ich auch sofort die Bahnen angeben, die die einzelnen Punkte der Scheibe *II* auf der Scheibe *I* hinterlassen werden. Sie sind nämlich nichts anderes als unendlich kleine Kreisbögen um den Pol $P_{II\,I}$. Der Pol selber aber bezeichnet augenscheinlich die Stelle, an der die gegenseitige Verrückung der beiden Scheiben gleich Null ist; an der also die Bewegungen der beiden Scheiben gerade übereinstimmen.]

Praktisch kann man namentlich in zwei Fällen diesen Relativpol zweier Scheiben und somit auch die relativen Bahnen sofort angeben:

Fall a. Die beiden Scheiben *I* und *II* sind durch ein Gelenk miteinander verbunden (Fig. 183a). Dann sind augenscheinlich die Spuren, die die Punkte von Scheibe *II* auf der Scheibe *I* hinterlassen werden, nichts anderes als Kreisbögen um den Punkt G.

(Die Scheiben muß man sich so vergrößert denken, daß sie sich überdecken.) Der Punkt G bildet also den Pol (Mittelpunkt) aller dieser Relativbahnen.

Fall b. Die beiden Scheiben seien durch zwei Stäbe S_1 und S_2 miteinander verbunden (Fig. 183b). In diesem Falle ist der Relativpol von Scheibe II gegen Scheibe I der Schnittpunkt der beiden Stäbe S_1 und S_2. Denn, wäre die Scheibe I ruhend, so würde jeder Punkt von Scheibe II eine Kreisbewegung um den Schnittpunkt der beiden Führungsstäbe S_1 und S_2 ausführen (vgl. Fig. 180). Die Spuren, die bei irgendeiner Bewegung des Gesamtmechanismus die Scheibe II auf der Scheibe I zurückläßt, sind also Kreisbögen, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Führungsstäbe ist. Dieser Schnittpunkt ist somit der Relativpol $P_{II\,I}$.

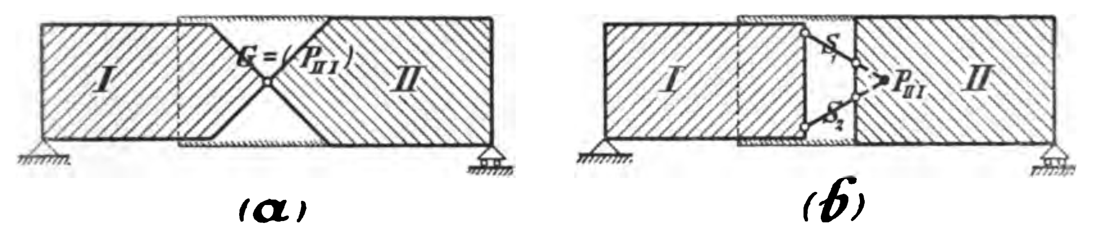


Fig. 183.

Dieses sind die wichtigsten Fälle, in denen man die Bewegung, die eine Scheibe relativ zu einer anderen ausführt, sofort angeben kann.

8. Benutzung der Relativbewegungen zur Bestimmung der absoluten Bewegung.

Jetzt kommt der Nutzen der ganzen Untersuchung. Nämlich: die Verwendung der Relativbewegung der Scheiben gegeneinander zur Bestimmung der absoluten Bewegung dieser Scheiben. Und zwar wird die Aufgabe stets in folgender Form erscheinen: Bei einem Mechanismus sei es bei einer Scheibe, z. B. Scheibe II, nicht ohne weiteres möglich, ihren Pol P_{II} aufzufinden. Wohl kenne man aber bei einer anderen Scheibe, Scheibe I, deren Pol P_I, und außerdem kenne man noch den Relativpol der Scheibe II gegen die Scheibe I. Welche Angaben folgen hieraus über den Pol P_{II} der Scheibe II?

[Als Beispiel diene Fig. 182b. Hier kann man den Pol P_{II} der Scheibe II nicht direkt bestimmen. Denn es ist bei diesem komplizierten

Mechanismus nicht möglich, von zwei Punkten der Scheibe die Bewegungsrichtungen sofort zu erkennen. Man kann also bei Scheibe *II* nicht nach unserem „Grundprinzip" der Polbestimmung arbeiten.

Wohl aber läßt sich sofort der Relativpol $P_{II\,I}$ von Scheibe *II* gegen Scheibe *I* hinzeichnen (nach Fall b). Außerdem kennt man bei dem Mechanismus auch den absoluten Pol P_I von Scheibe *I*. Und wir müssen jetzt versuchen, aus diesen beiden Angaben einen Schluß auf den absoluten Pol P_{II} der Scheibe *II* zu ziehen.]

Die Bewegung des Mechanismus geschieht also in Wirklichkeit folgendermaßen. Die Scheibe *I* dreht sich um ihren Pol P_I, die Scheibe *II* dreht sich um P_{II}. Und bei dieser Bewegung hinterläßt die Scheibe *II* Spuren (Rinnen) auf der Scheibe *I*, die wir die Relativwege genannt haben.

Nun ist aber der Pol P_{II} unbekannt. Trotzdem können wir uns die Bewegung der Scheibe *II* konstruieren, und zwar auf folgende Weise: Wir drehen die Scheibe *I* mit der daran hängenden Scheibe *II* um den Pol P_I; gleichzeitig bewegen wir aber die Punkte der Scheibe *II* längs ihren Spuren (Rinnen) auf der Scheibe *I*. Augenscheinlich kommt durch diese Verbindung zweier Bewegungen dann die gleiche Bewegung der Scheibe *II* zustande, als wenn wir sie in normaler Weise um ihren Pol P_{II} gedreht hätten. [Wir haben gewissermaßen nur die Reihenfolge in der Betrachtung der Bewegungen geändert.]

Dieser Gedankengang ist in Fig. 182b mit dem Punkte A, der auf der Verbindungslinie L von P_I und $P_{II\,I}$ angenommen ist, ausgeführt. Bei der Drehbewegung der Scheibe *I* beschreibt A einen unendlich kleinen Kreisbogen um P_I, d. h. einen unendlich kleinen Weg rechtwinklig zur Linie L. Bei der Relativbewegung von Scheibe *II* gegen Scheibe *I*, also bei der Drehbewegung um den Pol $P_{II\,I}$, beschreibt der Punkt A einen kleinen Kreisbogen um den Punkt $P_{II\,I}$; d. h. eine unendlich kleine Linie ebenfalls rechtwinklig zur Linie L. Wenn wir nun beide Bewegungen gleichzeitig ausführen, so werden sich diese beiden unendlich kleinen Wege des Punktes C einfach summieren, und es kommt wiederum heraus ein Weg rechtwinklig zur Linie L. Wir sehen also: Aus der Drehbewegung der Scheibe *I* und der Relativbewegung von Scheibe *II* gegen Scheibe *I* können wir folgern, in welcher Linie sich der Punkt A der Scheibe *II* bewegen wird, ohne daß wir den Pol P_{II} der Scheibe *II* selber kennen. Und zwar haben wir gefunden: Die Bewegung des Punktes A vollzieht sich rechtwinklig zur Verbindungslinie L des absoluten Poles P_I und des Relativpoles $P_{II\,I}$.

[Von einem anderen Punkte B, der außerhalb der Linie L liegt, können wir allerdings die Bewegungsrichtung nicht angeben. Denn die Bewegungen, die dieser Punkt infolge der Drehungen um P_I und $P_{II\,I}$ ausführt, gehen hier auseinander, so daß sich nicht die resultierende Bewegung angeben läßt.]

Wenn wir aber bei einer Scheibe die Verrückung eines Punktes kennen, so können wir bereits hieraus einen Schluß ziehen auf den Pol dieser Scheibe. Er muß nämlich auf dem Mittellote liegen, das zu der Bahn des betreffenden Punktes gezogen ist. Der Pol P_{II} in Fig. 182 muß also auf dem Mittellote zu der Strecke AA' liegen. Da diese Strecke aber unendlich klein ist, können wir, wie bereits mehrfach erklärt, statt des Mittellotes einfach das Lot im Punkte A nehmen; d. h. wir können einfach die Verlängerung der Linie L nehmen. Wir haben also jetzt den Satz: Aus dem Pol P_I der Scheibe I und dem Relativpol $P_{II\,I}$ der Scheibe II gegen die Scheibe I ergibt sich eine Angabe über den Pol P_{II} der Scheibe II. *Er muß nämlich liegen auf der Verbindungslinie L der beiden Pole P_I und $P_{II\,I}$.*

Gewöhnlich spricht man den Satz in der Form aus: *Die Pole P_I und P_{II} zweier Scheiben I und II und der Relativpol $P_{II\,I}$ der beiden Scheiben gegeneinander liegen in einer Geraden.* **(Satz von den drei Polen.)** Unsere vorhin aufgestellte Fassung dieses Satzes ist aber diejenige, in der man ihn am bequemsten verwenden kann.

Hiermit ist unsere Aufgabe, für den Pol P_{II} einer Scheibe durch Zurückgreifen auf den Pol P_I eine Angabe abzuleiten, gelöst; und zwar durch Vermittlung des Relativpoles $P_{II\,I}$ der beiden Scheiben gegeneinander.

Beispiele.

Erstes Beispiel. Bei dem Mechanismus Fig. 181 sollen die Pole bestimmt werden! Der Pol der Scheibe I ist sofort gegeben; da diese Scheibe sich nur um ihr festes Bolzenlager bewegen kann. Von der Scheibe II ist der Pol nicht direkt gegeben. Er läßt sich aber aus folgenden Überlegungen bestimmen: Der Punkt A kann nur eine Bewegung längs des Gleitlagers ausführen. Der Pol der Scheibe II muß also auf der rechtwinklig zu der Führung gezogenen Linie R liegen. Dies ist eine Angabe.

Ferner kennen wir den Relativpol von II gegen I. Denn die Scheibe II kann sich gegen die Scheibe I nur um den Gelenkpunkt G drehen. Aus der Kenntnis des Relativpoles $P_{(II\,I)}$ und des absoluten Poles $P_{(I)}$ der Scheibe I folgt aber nach dem Satze

von den drei Polen für die Scheibe II, daß der Pol $P_{(II)}$ auf der Verbindungslinie L der Pole P_I und $P_{II\,I}$ liegen muß. Dies ist eine zweite Angabe für P_{II}.

Aus der Verbindung der beiden Angaben folgt dann Pol P_{II} als Schnittpunkt von L und R.

Zweites Beispiel. Die Pole des Mechanismus Fig. 184 sind zu bestimmen! Durch die Lagerung und Verbindung der Scheiben sind von den Polen gegeben:

Pol P_I der Scheibe I (zusammenfallend mit Bolzenlager),

Relativpol $P_{II\,I}$ von II gegen I (Schnittpunkt der Verbindungsstäbe).

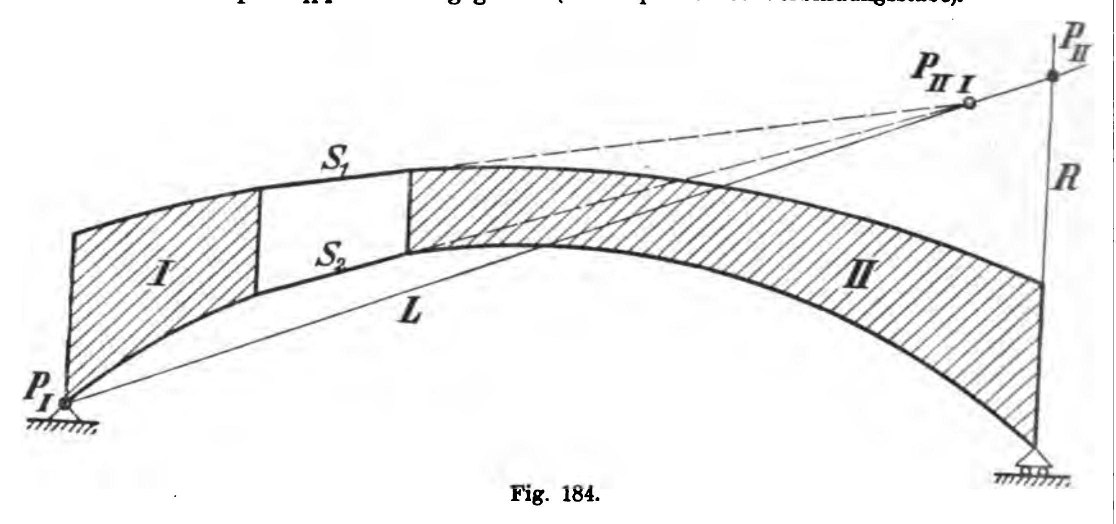


Fig. 184.

Hiernach ergibt sich dann der Pol P_{II} der Scheibe II durch folgende zwei Angaben: Er muß erstens liegen auf der Normalen R, die rechtwinklig zur Führung gezogen ist, und zweitens auf der Linie L, die die Pole P_I und $P_{II\,I}$ verbindet. Daraus folgt, daß P_{II} der Schnittpunkt dieser beiden Linien R und L sein muß.

IV. Zusammenfassung.

Während der vorige Paragraph uns nur im allgemeinen zeigte, daß sich die Bewegungen der einzelnen Scheiben eines Mechanismus in jedem Augenblicke als einfache Drehbewegungen darstellen lassen, haben wir in diesem Paragraphen die Drehpunkte dieser Bewegungen für eine Reihe von Fällen auch wirklich bestimmt.

I. Auf direktem Wege. Das Prinzip hierbei ist folgendes: Kennt man die Bewegung eines Punktes der betreffenden Scheibe, so hat man hierdurch bereits eine Angabe für den Pol P.

Letzterer liegt nämlich auf der zu der Bewegungsrichtung des Punktes errichteten Normalen R. (Denn dann erscheint der unendlich kleine Weg dieses Punktes tatsächlich als Kreisbogen um den Punkt P.) Um also den Pol einer Scheibe zu finden, wird man nach solchen Punkten suchen, deren Bewegungsrichtungen sich aus den äußeren Umständen (vorgeschriebene Bahn) bereits bestimmen lassen. Jeder solcher Punkte liefert dann eine Angabe für den Pol. Kennt man aber sogar die Bewegungsrichtungen zweier Punkte, so ist der Pol vollständig bestimmt (durch Errichtung der Lote in diesen beiden Punkten rechtwinklig zu deren Bewegungsrichtungen).

Die wichtigsten Fälle der Polbestimmung waren hiernach folgende: 1. Die Scheibe ist direkt an einen festen Bolzen angeschlossen. (Der Pol fällt natürlich zusammen mit dem Drehbolzen.) 2. Die Scheibe ruht auf zwei Führungen. (Der Pol ist bestimmt als Schnittpunkt der zu den beiden Führungen errichteten Lote.) 3. Die Scheibe ist durch zwei Stützstäbe gestützt. (Der Pol ist der Schnittpunkt dieser beiden Stützstäbe.) 4. Eine Scheibe ruht auf einer Seite auf einer Führung F und ist auf der anderen Seite gegen eine (drehbar gelagerte) Scheibe mittels Gelenk G abgestützt. (Der Pol ergibt sich als Schnittpunkt der auf der Führung F errichteten Normalen R und des Lotes, das im Punkte G zu dessen Bewegungsrichtung errichtet ist.)

II. Auf indirektem Wege. Dann liegt stets folgender Fall vor: Man kennt von einer Scheibe II nicht deren absoluten Pol, dafür aber den Relativpol gegen eine andere Scheibe I. Dann haben wir für den absoluten Pol von Scheibe II die Angabe abgeleitet: Er liegt auf der Verbindungslinie des absoluten Poles von Scheibe I mit dem Relativpole der beiden Scheiben. [Diese Angabe genügt noch nicht, um die Lage des Poles P_{II} vollständig zu bestimmen; sie gibt aber doch wenigstens einen Ort an, wo er liegen muß. Zur vollständigen Bestimmung von P_{II} muß man dann noch eine andere Angabe kennen; z. B. die Bewegungsrichtung eines anderen Punktes von Scheibe II (Fig. 184) oder vielleicht den Relativpol dieser Scheibe II gegen eine dritte Scheibe III.]

Schlußbetrachtung: Auf diese Weise kann man also, sobald man nur etwas von der Bewegung einer Scheibe kennt, den Pol finden. Sobald dann aber dieser bestimmt ist, ergibt sich die Bewegung der ganzen Scheibe. Denn jeder Punkt der Scheibe beschreibt einen unendlich kleinen Bogen um den Pol; d. h. seine Bahn ist einfach das Lot, das zu dem von dem Pol nach dem Punkte gezogenen Strahl errichtet wird.

[Allerdings haben uns die Pole bisher immer nur angegeben, innerhalb welcher Linien sich die Bewegung der einzelnen Scheibenpunkte vollziehen wird. Wir müssen aber noch untersuchen, in welchem Längenverhältnis diese unendlich kleinen Wege zueinander stehen. Diese Untersuchung wird § 70 bringen.]

§ 69.

Beispiele zu § 67 und § 68.

Vorbemerkung: Die einzelnen Scheiben werden wir stets mit *I*, *II* usw. bezeichnen. Deren absoluten Pol von jetzt ab mit (*I*), (*II*) usw.; bisweilen auch mit (*I w*), (*II w*) usw., um anzudeuten, daß sie die Pole der Scheiben gegen das Widerlager bzw. die unveränderlich feststehende Zeichenebene bedeuten. Die Relativpole der einzelnen Scheiben gegeneinander bezeichnen wir mit (*I II*), (*II III*) usw.

Für die Polbestimmung sei nochmals an die beiden Hilfsmittel erinnert: Man muß entweder an der betreffenden Scheibe Punkte aufsuchen, deren Bahnen man direkt kennt (Führungen), oder man muß den Relativpol der Scheibe gegen eine andere Scheibe aufsuchen. Den Pol erhält man dann als Schnittpunkt zweier Linien.

Erste Aufgabe.

Der Fachwerkträger Fig. 185 ist durch Fortnahme einer Diagonale zu einem Mechanismus geworden. Welche Bewegungen werden dessen einzelne Scheiben bei Inbewegungsetzung des Mechanismus ausführen?

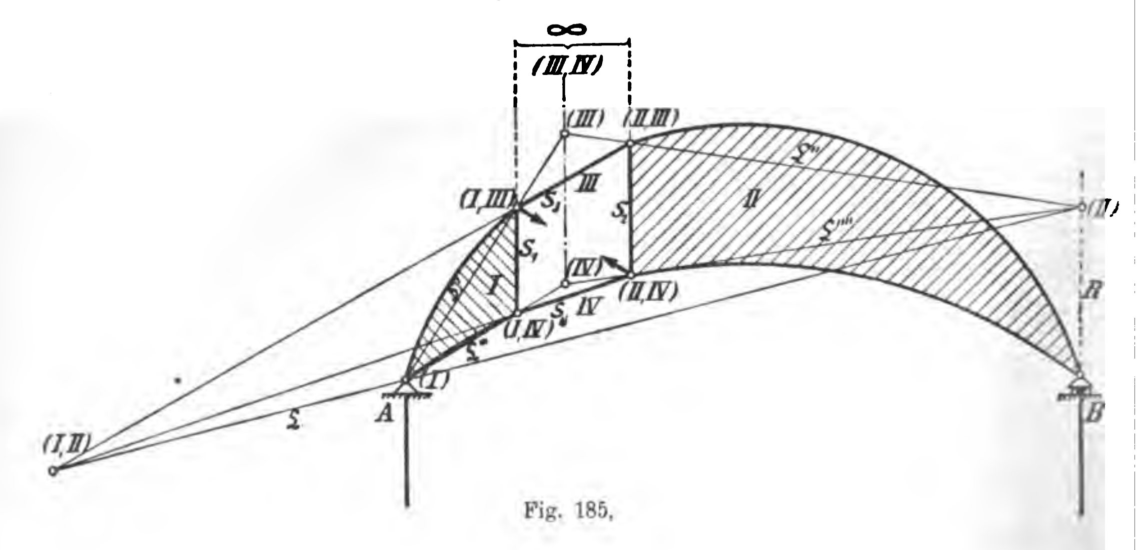


Fig. 185.

Der Mechanismus besteht insgesamt aus den vier Scheiben *I*..*IV*. (Die einzelnen Stäbe S_3 und S_4 wollen wir jetzt auch als Scheiben mitzählen und ihre Bewegung genau so wie die der anderen Scheiben betrachten. Ein Stab stellt augenscheinlich die einfachste Form dar, in die ein scheibenförmiger Körper übergehen kann.)

Die Pole dieser Scheiben lassen sich nun folgendermaßen finden:

1. Scheibe *I*.

Die Scheibe ist gelenkig an den Bolzen *A* angeschlossen. Folglich ist dies der Pol für alle Bewegungen, die die Scheibe ausführen kann. Pol (*I*).

2. Scheibe *II*.

α) Wir kennen die Bahn des Punktes *B*, nämlich längs der Führung. Folglich muß Pol (*II*) zunächst auf der zu der Führung im Punkte *B* errichteten Normalen *R* liegen.

β) Außerdem kennen wir den Relativpol von Scheibe *II* gegen Scheibe *I*, da ja die Scheibe *II* durch zwei Führungsstäbe mit Scheibe *I* verbunden ist. Der Schnittpunkt dieser beiden Stäbe ist also der Relativpol (*II I*). Folglich muß der Pol (*II*) auf der Verbindungslinie *L* dieses Relativpoles (*II I*) mit dem Pole (*I*) liegen.

γ) Der Schnittpunkt dieser beiden Angaben (Normale *R* und Verbindungslinie *L*) liefert dann den Pol (*II*).

3. Scheibe *III*.

Einen Punkt, der geführt ist, dessen Bahn wir also direkt angeben könnten, hat diese Scheibe nicht. Wohl aber können wir folgendes angeben:

α) Der Relativpol von *III* gegen *I* ist bekannt. Er ist nämlich das Gelenk, mit dem die Scheibe *III* (Stab S_3) an Scheibe *I* hängt. Pol (*I III*). Durch den Relativpol von *III* gegen *I* und durch den absoluten Pol von *I* haben wir jetzt eine Angabe für den Pol von *III*. Er muß nämlich liegen auf der Verbindungslinie *L′* der Pole *I* und (*I III*).

β) In derselben Weise finden wir der Reihe nach den Relativpol von *III* gegen *II* und hieraus die Linie *L″*, auf der der Pol ebenfalls liegen muß.

γ) Da der Pol (*III*) sowohl auf *L′* wie auf *L″* liegen muß, ist er der Schnittpunkt der beiden Linien.

4. Scheibe *IV*.

Durch die genau entsprechende Betrachtung finden wir einerseits aus (*IV I*) und (*I*), andererseits aus (*IV II*) und (*II*) den Pol (*IV*) der Scheibe *IV*.

5. Kontrolle.

Zum Schlusse haben wir noch eine Kontrolle. Der Pol der Scheiben *III* und *IV* gegeneinander ist augenscheinlich der Schnittpunkt der beiden Stäbe S_1 und S_2. Denn die beiden Scheiben

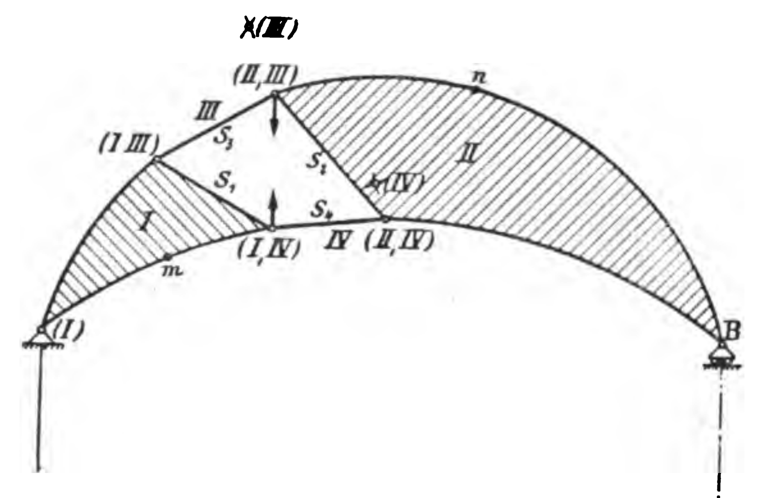


Fig. 186.

sind ja durch diese beiden (Führungs-) Stäbe gelenkig miteinander verbunden. Wenn wir also den Schnittpunkt der Stäbe S_1 und S_2 bestimmen, so erhalten wir den Pol (*III IV*) und dieser muß nach dem Satze von den drei Polen mit den absoluten Polen (*III*) und (*IV*) in einer Geraden liegen. Hierdurch ist eine Kontrolle der Zeichnung gegeben.

[Im vorliegenden Falle läßt sich allerdings der Schnittpunkt von S_1 und S_2 nicht direkt zeichnen. Wegen der Parallität der Linien S_1 und S_2 liegt er nämlich in der Unendlichkeit. Trotzdem stimmt aber natürlich unser Satz von den drei Polen. Denn die Verbindungslinie von (*IV*) und (*III*) ist ebenfalls parallel den Linien S_1 und S_2, d. h. sie geht satsächlich nach dem Schnittpunkt von S_1 und S_2 (dem Relativpole *III IV*) hin.

Zweite Aufgabe.

Der Leser kontrolliere, ob bei dem in einen Mechanismus verwandelten Fachwerk Fig. 186 die Pole richtig eingezeichnet sind!

(Die Zeichnung ist maßstäblich ausgeführt.) Wie bewegt sich der Punkt *B*? [Horizontal, und zwar auf

einem unendlich kleinen Kreisbogen um den Punkt (*II*).] Wie bewegen sich die Punkte **m** und **n**? [Auf Kreisbögen um den Pol (*I*) und (*II*).]

Bemerkung: An dieser Stelle sei der Leser auf das Interessante dieser Untersuchung hingewiesen. Wir können jetzt die Frage beantworten: Wenn in einem Fachwerk ein Stab reißen würde, wie würde sich die Konstruktion bewegen?

In der Praxis findet man hierüber meistens recht unklare Vorstellungen. Da wird behauptet, die Scheibe *II* würde sich um den Punkt *B* drehen (während sie sich in Wirklichkeit um den Pol (*II*) dreht); usw. In diese Fragen Klarheit hineingebracht zu haben, ist das große Verdienst der geometrischen Bewegungslehre, und schon aus diesem Grunde muß sich jeder ernsthafte Statiker mit ihr beschäftigen.

Dritte Aufgabe.

Bei dem Fachwerk Fig. 187 möge plötzlich ein Untergurtstab reißen. Wie wird sich der hierdurch entstehende Mechanismus im nächsten Augenblick bewegen?

1. Scheibe *I*.

Pol (*I*) ist direkt angebbar.

2. Scheibe *II*.

α) Da Punkt *B* geführt ist, muß der Pol (*II*) auf der Normalen *R* zur Führung *F* liegen.

β) Der Relativpol von *II* gegen *I* ist der Knotenpunkt (*II I*). Deshalb muß der Pol *II* auf der Verbindungslinie *L* von (*II I*) und (*I*) liegen.

γ) Aus α) und β) folgt (*II*) als Schnittpunkt von *R* und *L*.

3. Scheibe *III*.

α) Gegeben ist der Relativpol (*III I*) von *III* gegen *I*. Folglich muß (*III*) auf der Linie *L′* liegen.

β) Ferner ist bestimmbar der Relativpol von *III* gegen *II* (als Schnittpunkt der beiden Führungsstäbe zwischen den beiden Scheiben). Da außerdem der Pol (*II*) schon bestimmt ist, haben wir einen geometrischen Ort für den Pol (*III*), nämlich die Linie *L″*.

γ) Aus *L′* und *L″* ergibt sich (*III*).

4. Scheibe *IV*.

α) Bekannt ist die Bahn des Punktes *C*, nämlich längs der Führung *F′*. Folglich muß Pol (*IV*) auf der Normalen *R′* liegen.

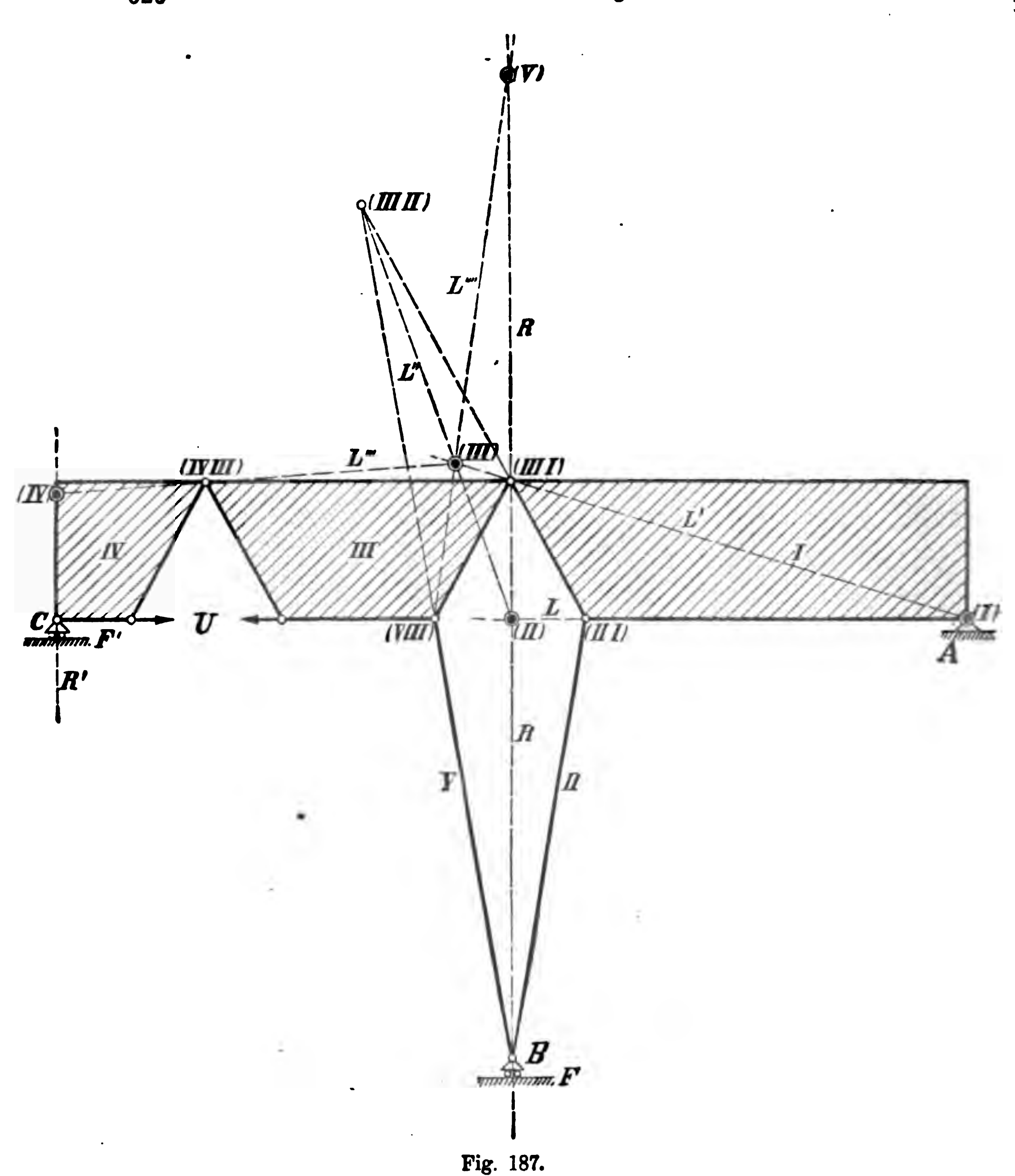


Fig. 187.

β) Gegeben ist ferner der Relativpol von IV gegen III. Folglich muß der Pol (IV) auf der Verbindungslinie L''' liegen.

γ) Aus α) und β) ist Pol (IV) bestimmt.

5. Scheibe *V*.

α) Pol (*V*) muß auf der Normalen *R* liegen.

β) Pol (*V*) muß auf der Verbindungslinie L'''' des Relativpoles (*V III*) mit dem absoluten Pol (*III*) liegen.

γ) Hierdurch ist Pol (*V*) bestimmt.

6. Kontrollen.

Außerdem hat man noch eine Menge Kontrollen. Zum Beispiel kann man den Relativpol (*V I*) bestimmen und hat dann die Kontrolle, daß der Pol (*V*) auch auf der Verbindungslinie (*V I*) mit (*I*) liegen muß usw.

Vierte Aufgabe.

Die Bewegung des in Fig. 188 dargestellten Mechanismus ist zu untersuchen!

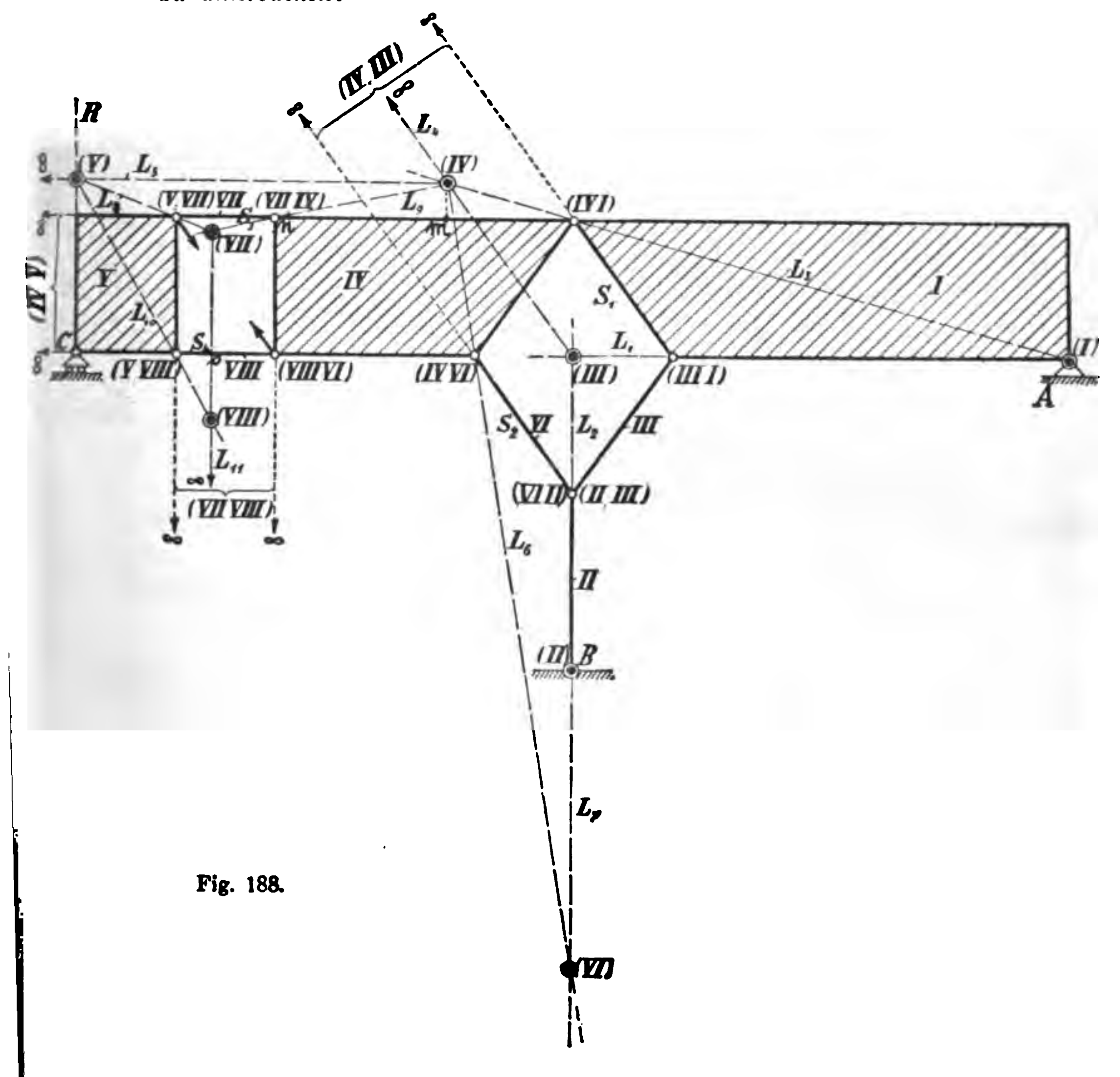


Fig. 188.

Die Pole (*I*) und (*II*) finden wir direkt; die anderen durch Bestimmung der Angaben L und R, auf denen sie liegen müssen:

Scheibe *I*: das feste Gelenk A bildet den Pol (*I*),

„ *II*: „ „ „ B „ „ „ (*II*),

„	*III*:	Relativpol (*III I*);	dessen Verbindungslinie mit (*I*)	ergibt den Ort L_1	Pol (*III*),
		„ (*III II*);	„ „ „ (*II*)	„ „ „ L_2	
„	*IV*:	Relativpol (*IV I*);	dessen Verbindungslinie mit (*I*)	ergibt den Ort L_3	Pol (*IV*),
		„ (*IV III*);	„ „ „ (*III*)	„ „ „ L_4	
„	*V*:	Relativpol (*V IV*);	dessen Verbindungslinie mit (*IV*)	ergibt den Ort L_5	Pol (*V*),
		Punkt C geführt;	folglich Pol auf Normalen R,		
„	*VI*:	Relativpol (*VI IV*);	dessen Verbindungslinie mit (*IV*)	ergibt den Ort L_6	Pol (*VI*),
		„ (*VI II*);	„ „ „ (*II*)	„ „ „ L_7	
„	*VII*:	Relativpol (*VII V*);	dessen Verbindungslinie mit (*V*)	ergibt den Ort L_8	Pol (*VII*),
		„ (*VII IV*)	„ „ „ (*IV*)	„ „ „ L_9	
„	*VIII*:	Relativpol (*VIII V*);	dessen Verbindungslinie mit (*V*)	ergibt den Ort L_{10}	Pol (*VIII*).
		„ (*VIII VII*);	„ „ „ (*VII*)	„ „ „ L_{11}	

Bemerkung zu Pol (*IV III*): Die beiden Führungslinien S_1 und S_2, die diesen Pol liefern, sind parallel. Ihr Schnittpunkt (*IV III*) liegt also in der Unendlichkeit. Dies hindert aber nicht die weitere Untersuchung. Denn die Richtung, in der (*IV III*) liegt, können wir angeben; sie ist nämlich die Richtung der Stäbe S_1, S_2. Wenn wir also z. B. die Aufgabe haben, den Pol (*III*) mit diesem unendlich weiten Pole (*IV III*) zu verbinden, so ziehen wir einfach durch (*III*) eine Gerade in der Richtung S_1, S_2. Diese Gerade würde dann (in ihrer unendlichen Verlängerung) durch den Punkt (*IV III*) gehen; d. h. sie ist die Verbindungslinie von (*IV III*) mit (*III*).

Dieselbe Betrachtung ist bei dem Pol (*V IV*) und dessen Verbindung mit dem Pole (*IV*) anzustellen, ferner bei (*VIII VII*).

Wie bewegt sich ein Punkt m, der direkt vertikal unter (*IV*) liegt? (Rechtwinklig zum Strahl $\overline{IV\,m}$; d. h. horizontal.) Wie bewegt sich Punkt n? (rechtwinklig zum Strahl $\overline{IV\,n}$ oder $\overline{VII\,n}$). Wie bewegt sich Punkt o? (horizontal).

Fünfte Aufgabe.

Bei dem (beweglichen) Gerüst Fig. 189 sind die Bewegungen zu bestimmen!

In der Figur sind die Pole für die Scheiben *I* bis *III* in der geübten Weise bestimmt. Es sollte nur noch auf zwei Besonderheiten hingewiesen werden:

1. Der Relativpol von Scheibe *II* gegen Scheibe *I* ergibt sich als Schnittpunkt der Linien $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$. Letztere ist zwar kein eigentlicher Stab, sondern besteht aus zwei Stäben. Diese beiden Stäbe wirken aber hinsichtlich der Bewegung wie ein durchlaufender Stab, da sie ja einen Bestandteil einer starren Scheibe

(nämlich Scheibe *III*) bilden. Der Relativpol von *II* gegen *I* kann also genau so bestimmt werden, als ob $\overline{cd}$ ein durchlaufender Stab wäre.

2. Der Pol der Scheibe (*III*), gefunden als Schnittpunkt der Linie L_2 und L_3, liegt im Unendlichen. Alle Strahlen, die vom Pol (*III*) nach den Punkten *m*, *n* usw. der Scheibe *III* gezogen werden, erscheinen also als Parallellinien, die sämtlich nach dem

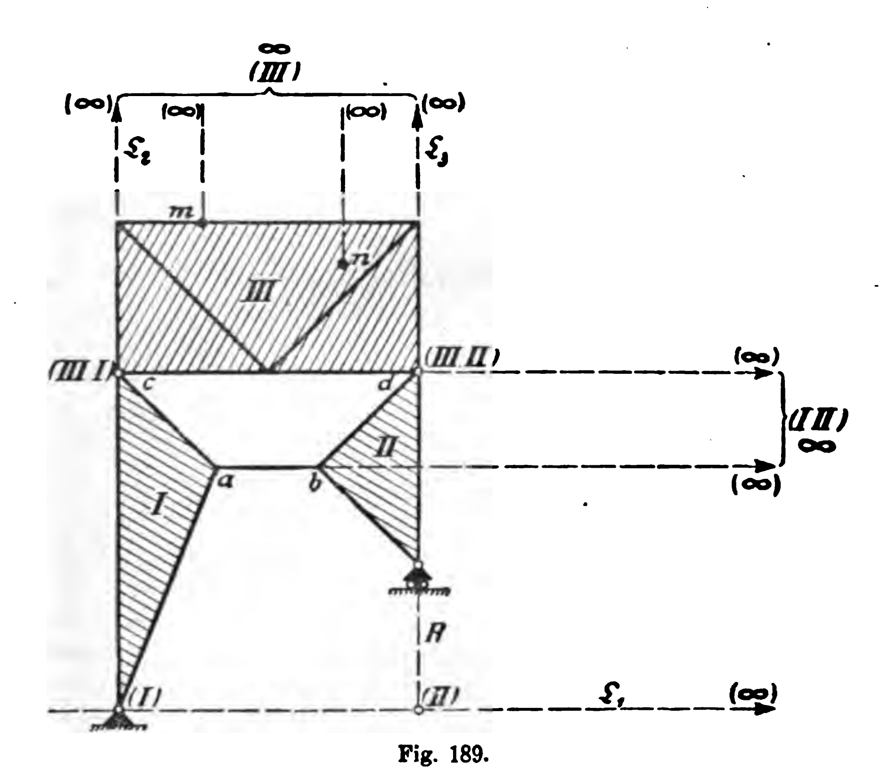


Fig. 189.

unendlich fernen Punkte (*III*) hingehen. Daraus folgt, daß alle Punkte der Scheibe *III* denselben, nämlich einen unendlich großen, Abstand vom Drehpunkte haben. Die Scheibe *III* führt also als Ganzes eine Horizontalverschiebung aus. **Liegt der Pol einer Scheibe im Unendlichen, so führt die Scheibe keine eigentliche Drehung, sondern eine Verschiebung aus** (Natürlich ist hierbei zu bedenken, daß alle unsere Betrachtungen sich immer nur auf den nächsten, unendlich kleinen Zeitraum unmittelbar nach der Inbewegungsetzung beziehen.)

§ 70.

Die um 90° gedrehten Verrückungen.

Unsere Betrachtungen bedürfen noch einer Ergänzung. Bisher haben wir nur festgestellt, in welchen Bahnen die Verrückungen der einzelnen Punkte stattfinden, sobald der Mechanismus angetrieben wird. Jetzt müssen wir noch untersuchen, wie lang die Verrückungen der einzelnen Punkte sind, oder vielmehr in welchem Verhältnis die Längen der einzelnen Verrückungen zueinander stehen.

Auf das Verhältnis kommt es an. Denn an und für sich beschränken wir uns nur auf Verrückungen, die sämtlich unendlich klein sind. Ergibt sich aber, daß einer dieser unendlich kleinen Wege in doppelt so großer Länge erscheint als der Weg einer anderen Kraft, so ist natürlich auch das Produkt aus diesem Wege mal der Kraft doppelt so groß als bei der anderen Kraft (vorausgesetzt, daß die beiden Kräfte gleich groß sind). Wir sehen also, daß, trotzdem die Verrückungen der einzelnen Punkte und somit auch die Wege der Kräfte sämtlich unendlich klein sind, es doch darauf ankommt, in welchem Verhältnis die Längen der Wege zueinander stehen. Aus diesen Verhältniszahlen zwischen den einzelnen Weglängen ergibt sich dann eben, in welchem Verhältnis die verschiedenen Kräfte stehen müssen, falls der Mechanismus im Gleichgewicht sein soll.

I. Bestimmung der Verrückungslängen mit Hilfe der Pole.

a) Rechnerische Bestimmung.

Aufgabe: Gegeben sei bei einer Scheibe Fig. 190 (zu irgendeinem größeren Mechanismus gehörig) die virtuelle Verrückung eines Punktes A: $\overline{AA'} = v_A$. Wie groß ergeben sich hiernach die Verrückungen der anderen Punkte der Scheibe?

Der Pol der Bewegung sei P. (Es steht also $\overline{PA}$ rechtwinklig zur Verrückung $\overline{AA'}$.) Dann wissen wir zunächst, daß ein anderer Punkt B nur eine Verrückung rechtwinklig zum Strahl $\overline{PB}$ ausführen kann. Hiermit ist die Verrückungslinie von B bestimmt.

Um auch die Verrückungs größe von B zu finden, beachten wir, daß sich aus der Verrückung v_A auch der Drehungswinkel ω der Scheibe angeben läßt (Fig. 190). Denn es besteht die Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad v_A = r_A \cdot \omega\,; \qquad \text{also} \qquad \omega = \frac{v_A}{r_A}\,.$$

Um diesen Winkel mußte sich also die Scheibe bei ihrer Drehung um den Pol P bewegen, damit für den Punkt A eine Verrückung v_A herauskam.

Da nun der Drehungswinkel für jeden Punkt der Scheibe der gleiche ist (denn die Scheibe dreht sich ja als starrer Körper), so finden wir sofort die Länge der Strecke v_B:

$$\text{(II)} \qquad v_B = \omega \cdot r_B = v_A \cdot \frac{r_B}{r_A}\,.$$

Diese Gleichung hat also folgenden Inhalt: *Wird ein Punkt A eines Mechanismus um eine Strecke v_A verschoben, so erleidet ein anderer Punkt B, der sich mit A auf derselben Scheibe befindet, eine Verrückung v_B gleich der Verrückung v_A multipliziert mit dem Verhältnis der Strahlen r_B und r_A.* Zu beachten ist hierbei, daß die Verrückung v_A natürlich von vornherein rechtwinklig zum Polstrahl r_A anzunehmen ist. (Denn eine andere ist ja bei dem betreffenden Mechanismus gar nicht möglich.) Die Verrückung v_B ist natürlich ebenfalls rechtwinklig zu ihrem Polstrahle r_B.

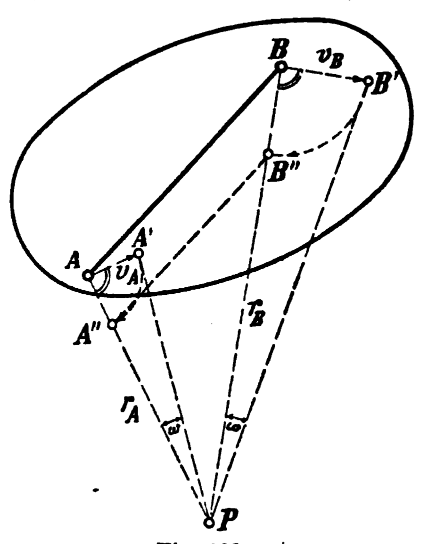


Fig. 190.

Hiermit können wir aus der Länge der Verrückung eines Punktes auch die Längen der Verrückungen aller anderen Punkte bestimmen.

Beispiel: Bei der Aufgabe Fig. 186 habe sich im nächsten Augenblicke nach der Inbewegungsetzung der Punkt B um $v_B = {}^1/_{1000}$ mm verschoben. Wie groß sind die Verrückungen der anderen Punkte innerhalb dieses selben Zeitraumes?

Die Länge der Polstrahlen r_B usw. messen wir aus der Figur ab und erhalten nun für die verschiedenen Punkte

$$v_n = v_B \cdot \frac{15{,}5}{11{,}8} = \frac{1{,}3}{1000}\ \text{mm} \quad \text{(aus Scheibe } II\text{)},$$

$$v_{(II,IV)} = v_B \cdot \frac{14{,}1}{11{,}8} = \frac{1{,}2}{1000}\ \text{,,} \quad (\text{,,} \quad \text{,,} \quad II),$$

$$v_{(I,IV)} = v_{(II,IV)} \cdot \frac{1{,}5}{0{,}5} = \frac{3{,}6}{1000}\ \text{,,} \quad (\text{,,} \quad \text{,,} \quad IV),$$

$$v_m = v_{(I,IV)} \cdot \frac{2{,}0}{3{,}4} = \frac{2{,}1}{1000}\ \text{,,} \quad (\text{,,} \quad \text{,,} \quad I),$$

usw.

b) Zeichnerische Darstellung.

Die Gleichung (II) können wir in der Form schreiben:

$$\text{(III)} \qquad v_A : v_B = r_A : r_B \,.$$

In Worten: *Die Verrückungen zweier Punkte einer Scheibe verhalten sich wie die Abstände dieser Punkte vom Pol der Scheibe.*

Hieraus ergibt sich folgende sehr hübsche Darstellung der Verrückungen. Wir denken uns die Strecken v_A und v_B um 90° herumgedreht, und zwar beide nach derselben Seite. Dann fällt also in Fig. 190 die Strecke v_A in die Richtung des Polstrahles r_A; entsprechend v_B in die Richtung des Polstrahles r_B. Diese so entstandenen Strecken $\overline{AA''}$ und $\overline{BB''}$ mögen „**die um 90° gedrehten Verrückungen**" heißen. Sie sind also der Größe nach gleich v_A bzw. v_B; ihrer Richtung nach aber um 90° gedreht.

Verbinden wir nun die Punkte A'' und B'' miteinander, so zeigt sich folgendes: Die Verbindungslinie $\overline{A''B''}$ ist parallel der ursprünglichen Linie $\overline{AB}$. Denn nach Gleichung (III) muß sich verhalten:

$$\overline{AA''} : \overline{BB''} = \overline{AP} : \overline{BP} \,,$$

und dieses Verhältnis ist nur dann möglich, wenn die Linien AB und $\overline{A''B''}$ parallel sind.

Hiermit haben wir eine einfache zeichnerische Methode zur Darstellung der Verrückungen: Um aus der Verrückung v_A eines Punktes A die Verrückung v_B eines anderen Punktes B derselben Scheibe zu bestimmen, tragen wir v_A um 90° gedreht als eine Strecke $\overline{AA''}$ auf, ziehen durch den Punkt A'' die Parallele zu $\overline{AB}$ und erhalten hierdurch auf dem Polstrahl BP die Größe der Verrückung v_B des anderen Punktes dargestellt durch die Strecke BB''. Die wirklichen Verrückungen finden wir, indem wir die Strecken $\overline{AA''}$ und $\overline{BB''}$ um 90° zurückdrehen. (Beide müssen natürlich nach derselben Seite zurückgedreht werden.)

Dies ist eine sehr bequeme Methode, um aus der Verrückung eines Punktes alle anderen Verrückungen zu finden.

c) Zusammenfassung über die um 90° gedrehten Verrückungen.

Beim Aufsuchen der um 90° gedrehten Verrückungen werden wir hauptsächlich von folgenden vier Sätzen Gebrauch machen. (Der erste Satz ist soeben bewiesen; die anderen sind ohne weiteres klar.)

1) Die Endpunkte der um 90° gedrehten Verrückungen zweier Punkte A und B liegen auf einer Linie, die parallel ist der Verbindungslinie der beiden Punkte A und B.

2) Bei einem fest angeschlossenen Punkt fällt der Endpunkt der um 90° gedrehten Verrückung in den Punkt zurück. (Die Strecke *v* wird gleich Null.)

3) Bei einem auf einer Führungs*bahn F* gelagerten Punkte steht die um 90° gedrehte Verrückung rechtwinklig zur Führung. (Denn die Verrückung *v* selber geschieht innerhalb der Führung; die um 90° gedrehte Verrückung muß also rechtwinklig dazu sein.)

4) Bei einem durch einen Führungs*stab S* gestützten Punkte liegt die um 90° gedrehte Verrückung in der Linie des Stabes.

II. Bestimmung der Verrückungen unabhängig von den Polen.

Mit Hilfe der obigen Betrachtungen kann man häufig die Verrückungen eines Mechanismus feststellen, ohne daß man die Pole aller Scheiben konstruiert. Man fängt mit einem Punkte, dessen Verrückung man kennt, an und erledigt zunächst die Punkte der einen Scheibe. Dann sucht man sich einen Punkt aus, in dem eine zweite Scheibe mit dieser ersten zusammenhängt und gelangt auf diese Weise zur Betrachtung der zweiten Scheibe usw. Am besten läßt sich die Sache direkt an Beispielen erklären.

Vorbemerkung: Die um 90° gedrehte Verrückung eines Punktes m wollen wir stets mit $\overline{m\,m''}$ bezeichnen. Die wahre Verrückung $m\,m'$ ergibt sich dann, indem wir die Strecke $\overline{m\,m''}$ um 90° zurückgedreht denken.

1. Beispiel für einen einfachen Fall.

Bei dem Mechanismus Fig. 191 sind die Verrückungen ohne Zuhilfenahme der Pole zu bestimmen.

Punkt *1*. Wir beginnen mit Punkt *1*. Dessen Verrückung muß gleich Null sein. Der Endpunkt *1''* der um 90° gedrehten Verrückung muß also mit dem Anfangspunkt *1* zusammenfallen.

Punkt *2*. Der Punkt *2* kann nur eine Drehbewegung um den Punkt *1* ausführen. Seine wahre Verrückung steht somit rechtwinklig zu der Linie $\overline{1\,2}$; und seine um 90° gedrehte Verrückung fällt also in die Linie $\overline{1\,2}$. Wir nehmen nun für diese Verrückung einen Wert an und tragen sie als Strecke $\overline{2\,2''}$ auf. [Dieser Punkt *2* ist also derjenige Punkt, mit dessen Verrückung wir anfangen; mit dem wir den gesamten Mechanismus antreiben. Die Verrückungen der anderen Punkte müssen sich von jetzt ab zwangläufig ergeben.]

Punkt *3*. Für die Verrückung des Punktes *3* haben wir jetzt folgende zwei Bedingungen:

α) Punkt *3* ist an Punkt *2* angeschlossen. Folglich muß die Linie $\overline{2''3''}$, auf der die um 90° gedrehten Verrückungen der Punkte *2* und *3* liegen, parallel sein der Linie $\overline{23}$. Da wir Punkt *2''* bereits kennen, ziehen wir also durch *2''* die Parallele zu $\overline{23}$ und erhalten hierdurch einen Ort, auf dem *3''* liegen muß.

β) Ferner ist Punkt *3* an Punkt *1* angeschlossen. Folglich muß die Linie $\overline{1''3''}$, auf der die Endpunkte der um 90° gedrehten

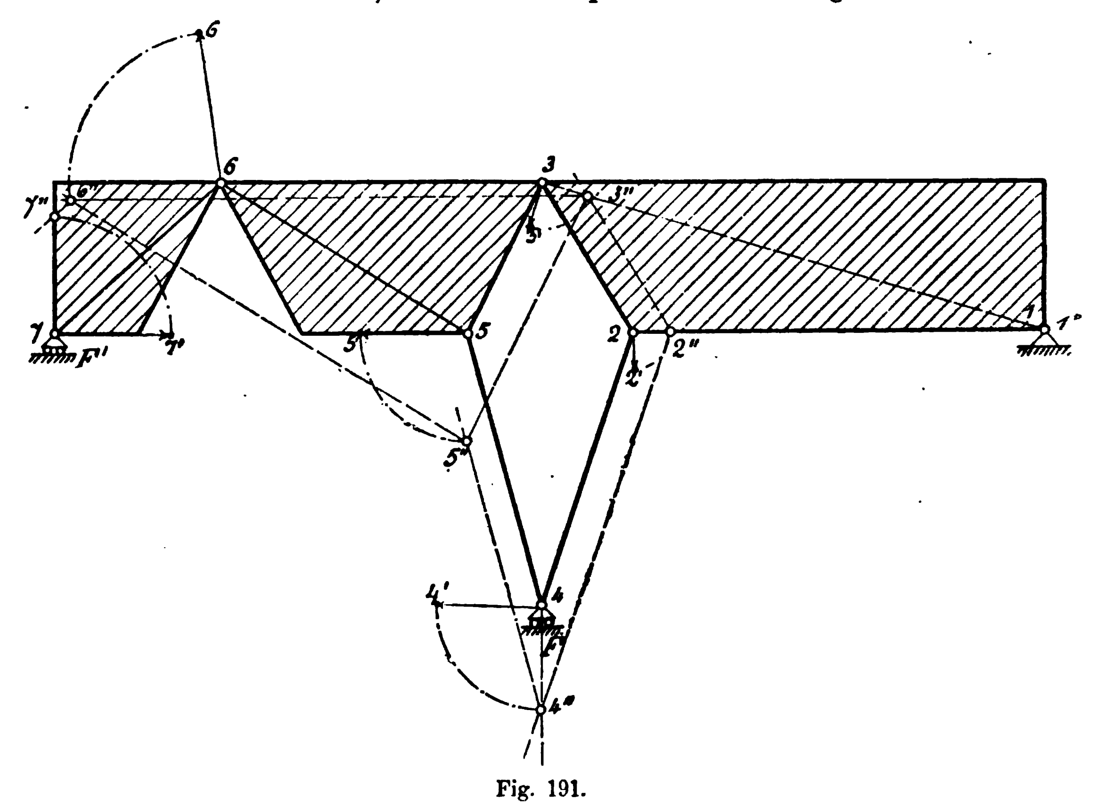


Fig. 191.

Verrückungen von *1* und *3* liegen, parallel sein der Linie $\overline{13}$. Wir ziehen also durch den Punkt *1''* die Parallele zu der Linie $\overline{13}$ und erhalten hierdurch einen zweiten Ort, auf dem *3''* liegen muß. (Die Parallele durch *1''* zu $\overline{13}$ fällt mit dieser Linie zusammen, da Punkt *1''* mit *1* zusammenfällt.)

γ) Der Schnittpunkt dieser beiden Parallelen liefert dann den Punkt *3''*.

Punkt *4*. α) Punkt *4* hängt mit Punkt *2* zusammen. Die um 90° gedrehte Verrückung $\overline{44''}$ von Punkt *4* muß also derart sein, daß die Linie $\overline{4''2''}$ parallel ist der ursprünglichen Linie $\overline{42}$.

Da wir $2''$ bereits haben, so ziehen wir die Parallele zu $\overline{2\,4}$ und erhalten hierdurch einen Ort, auf dem $4''$ liegen muß.

β) Ferner muß die um 90° gedrehte Verrückung von Punkt *4* auf dem Lote zur Führung *F* liegen (Absatz I, 3).

γ) Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der vorhin erwähnten Parallelen liefert dann den Punkt $4''$.

Punkt *5*. Dieser ist an die Punkte *3* und *4* angeschlossen. Seine um 90° gedrehte Verrückung muß also so sein, daß die Linie $\overline{3''\,5''}$ parallel ist der Linie $\overline{3\,5}$, und die Linie $\overline{4''\,5''}$ parallel ist der Linie $\overline{4\,5}$. Wir ziehen also durch $3''$ und $4''$ diese Parallelen und erhalten Punkt $5''$.

Punkt *6*. Die um 90° gedrehte Verrückung $\overline{6\,6''}$ wird entsprechend gefunden wie bei Punkt *5*.

Punkt *7*. Der Punkt $7''$ muß erstens auf der durch Punkt $6''$ parallel zu $\overline{6\,7}$ gezogenen Geraden liegen; zweitens auf der Normalen zur Führung F'. Durch diese beiden Angaben ist $7''$ zu finden.

Hiermit sind sämtliche um 90° gedrehten Verrückungen bestimmt, und wir können direkt abmessen, in welchem Verhältnis die Längen der einzelnen Verrückungen zueinander stehen.

Um nun die wahren Verrückungen zu sehen, müssen wir die vorhin gefundenen Strecken um 90° zurückdrehen; z. B. sämtlich rechtsherum (Fig. 191). Dann hat die Figur also folgende Bedeutung. Wenn ich den vorliegenden Mechanismus dadurch antreibe, daß ich z. B. den Punkt *2* um die Strecke $\overline{2\,2'}$ verrücke, so verrückt sich hierdurch der Punkt *3* um die Strecke $\overline{3\,3'}$, Punkt *4* um $\overline{4\,4'}$ usw. Wir könnten also direkt die verschobene Fachwerkfigur in die ursprüngliche einzeichnen (Fig. 191). Hinsichtlich der Längen von $\overline{2\,2'}$, $\overline{3\,3'}$ usw. sei erinnert: Diese Strecken sind alle unendlich klein. Da sie aber in unendlich großem Maßstabe aufgetragen zu denken sind, so erscheinen sie uns als endliche Längen.

2. Schwierige Fälle.

Die Aufsuchung der um 90° gedrehten Verrückungen ohne Einzeichnung der Pole geht nicht immer so einfach vonstatten wie in dem obigen Beispiel. Nehmen wir z. B. das Fachwerk Fig. 192. Wir treiben den Mechanismus an, indem wir bei Punkt *2* eine Bewegung einleiten ($\overline{2\,2''}$). Aus den Bewegungen von Punkt *1* und *2* ergibt sich dann sofort die Bewegung von Punkt *3* (Punkt $3''$). Von diesem aus können wir aber nicht durch einfaches Ziehen von Parallelen die um 90° gedrehten Verrückungen der anderen Punkte *4*, *5* usw. bestimmen. Denn keiner von

diesen Punkten ist so mit dem vorhergehenden verbunden, daß wir den entsprechenden Punkt $4''$, $5''$ usw. direkt aufsuchen könnten. Dann gibt es zwei Hilfsmittel:

a) Wir nehmen den Pol (II) der Scheibe II zur Hilfe. (Die Hilfslinien zur Bestimmung des Poles sind in Fig. 192 fortgelassen; vgl. Fig. 185.) Wie in Absatz I dieses Paragraphen gezeigt wurde (Fig. 190), muß die um 90° gedrehte Verrückung von Punkt 4 auf dem Polstrahl $\overline{(II)\,4}$ liegen. Andererseits muß die Linie $\overline{3''\,4''}$ parallel der ursprünglichen Linie $\overline{3\,4}$ sein. Durch diese beiden Angaben ist dann $4''$ gefunden.

Aus $4''$ finden wir dann weiterhin den Punkt $5''$ (nämlich $\overline{2''\,5''}$ parallel $\overline{2\,5}$ und $\overline{4''\,5''}$ parallel $\overline{4\,5}$) und den Punkt 6. Am letzten Punkte ergibt sich eine Kontrolle.

b) Ein anderer Weg ist folgender. Wir bestimmen in bekannter Weise zunächst $1''$, $2''$ und $3''$. Bei Punkt 4 geht es nicht weiter, denn wir haben hier nur die eine Angabe, daß $4''$ auf der durch Punkt $3''$ parallel zu $\overline{3\,4}$ gezogenen Linie liegen muß. Eine zweite Angabe über Punkt 4, die den Punkt $4''$ mit dem vorhergehenden Punkte in Beziehung bringen könnte, fehlt.

In dieser Verlegenheit fangen wir nun einfach an zu probieren. Es wird also $\overline{3''\,4''}$ parallel zu $\overline{3\,4}$ gezogen und hierauf ein Punkt ($4''$) willkürlich angenommen. Auf Grund dieser Annahme finden wir dann sofort die Punkte ($5''$) und ($6''$) und sehen, daß — wie ja nicht anders zu erwarten war — unsere Annahme hinsichtlich des Punktes $4''$ falsch war. Denn der Punkt ($6''$) muß ja auf dem Lote R zur Führung F liegen, während wir ihn an einer ganz anderen Stelle erhalten haben. Diesmal haben wir also mit dem Raten kein Glück gehabt.

Nun machen wir für die um 90° gedrehte Verrückung von Punkt 4 eine zweite Annahme, indem wir den Endpunkt an der Stelle [$4''$] annehmen. Dann geht es glatt durch bis zu der Verrückung des Punktes 6. Hier sehen wir aber, daß wir wieder vorbei geraten haben, denn für den Punkt [$6''$] hätte herauskommen müssen, daß er auf dem Lote R zur Führung F liegt.

Auf diese Weise könnte man nun so lange raten, bis man glücklich eine solche Verrückung von Punkt 4 angenommen hat, bei der sich die Verrückung von Punkt 6 auf der vorgeschriebenen Bahn ergibt. Dieses viele Probieren ist aber überflüssig. Wenn der Leser nämlich für den Punkt $4''$ noch eine dritte und vierte Lage annimmt und die Zeichnung bis zu dem Punkte $6''$ durchführt, so wird er folgendes merken: Die auf diese Weise er-

haltenen verschiedenen Punkte *6″* **liegen sämtlich auf einer geraden Linie.**

Dies folgt aus folgendem mathematischen Satze (ohne Beweis): *Wird ein n-Eck so in verschiedenen Lagen gezeichnet, daß die Seiten zueinander parallel bleiben und daß (n — 1) Ecken auf geraden Linien zu liegen bleiben, so durchläuft auch die nte Ecke eine gerade Linie.*

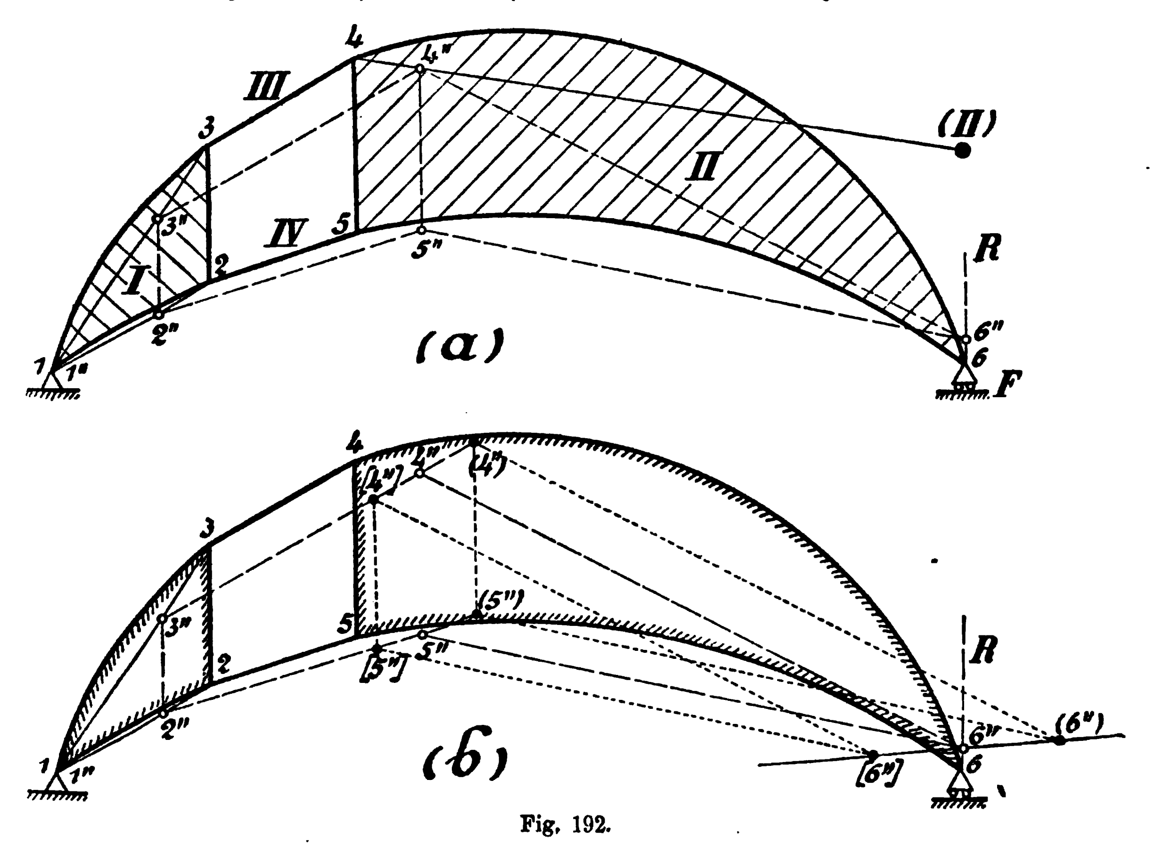


Fig. 192.

In unserem Falle ist das Dreieck *4″ 5″ 6″* das in Frage kommende *n*-Eck. Bei den verschiedenen Lagen der Figur, wie sie sich bei unserem Probieren ergeben, bleiben sich die Seiten parallel. Außerdem bewegen sich *4″* und *5″* auf geraden Linien. Folglich muß auf *6″* eine gerade Linie durchlaufen.

Diese Erkenntnis, das sämtliche Punkte *6″*, wie sie sich bei dem verschiedenen Probieren ergeben, auf einer **geraden** Linie liegen, erspart uns weiteres Probieren. Aus den **zwei** Lagen (*6″*) und [*6″*] bestimmen wir direkt die obige gerade Linie, bringen diese mit dem zur Führung *F* gezogenen Lote *R* zum Schnitt

und haben hierdurch augenscheinlich den **richtigen** Punkt *6″*. Sobald dann *6″* bestimmt ist, können wir, rückwärts gehend, auch die **richtigen** Punkte *4″* und *5″* bestimmen.

Übungsaufgabe: Der Leser ermittle in derselben Weise die um 90° gedrehten Verrückungen bei den Mechanismen Fig. 186, 188 und 189. Wenn man an einem Punkte *m* nicht weiter kommt, nimmt man zwei Punkte (*m″*) und [*m″*] an und konstruiert auf Grund dieser Annahme weiter. Für den letzten Punkt *n* ergibt sich dann eine gerade Linie *x*, auf der sich sein zugehöriger Punkt *n″* bei den verschiedenen Annahmen bewegt. Da für diesen letzten Punkt außerdem immer noch eine weitere Bedingung zur Verfügung steht (z. B. das Lot *R* zu seiner Führung *F*), so ergibt sich seine richtige Lage als Schnittpunkt der Linie *x* mit der betreffenden Bedingung (Lot *R*).

III. Zusammenfassung.

Die um 90° gedrehten Verrückungen haben sich als ein vorzügliches Mittel erwiesen, um die Wege, die die einzelnen Punkte eines Mechanismus zurücklegen, zeichnerisch darzustellen: Von der Verrückung $\overline{mm''}$ eines Punktes *m* geht man aus und findet dann die Verrückung eines an diesem Punkt angeschlossenen Punktes *n*, indem man durch den Punkt *m″* die Parallele zu der Linie $\overline{mn}$ zieht. Hierdurch erhält man den geometrischen Ort, auf dem der Endpunkt *n″* liegen muß.

Häufig kann man auf diese Weise, indem man von Punkt zu Punkt geht, für sämtliche Punkte die Verrückungen bestimmen. [Das feste Lager hat natürlich die Verrückung Null. Dann nimmt man für den nächsten Punkt eine Verrückung an und setzt hierdurch den ganzen Mechanismus in Bewegung. Die weiteren Punkte ergeben sich nacheinander.] Dies geht namentlich dann, wenn der Mechanismus aus einer Aufeinanderfolge von Scheiben besteht, die direkt durch Gelenke miteinander zusammenhängen.

Bei vielen Mechanismen stößt man allerdings auf Punkte, die sich auf diese Weise nicht bestimmen lassen. Dann muß man entweder die Pole zur Hilfe nehmen, indem man den Satz benutzt: Die um 90° gedrehte Verrückung eines Punktes *m* liegt auf dem Strahl von dem Punkte *m* nach dem Pol *P* der Scheibe. Oder man nimmt für den Punkt *m*, an dem man nicht weiter kommt, zwei Werte $\overline{m(m'')}$ und $\overline{m[m'']}$ für die Verrückung an, konstruiert hiermit weiter und erhält auf diese Weise eine Gerade *x*, auf der die Verrückung des letzten Punktes liegen muß. Da für diesen

letzten Punkt außerdem immer noch eine andere Bedingung zur Verfügung steht, findet man auf diese Weise seine richtige Verrückung.

IV. Schlußbetrachtung zum 10. Vortrag.

Die in diesem Vortrage gebrachten Untersuchungen verdankt die Technik im wesentlichen den Arbeiten von Herrn Professor *Müller-Breslau*. Die Zurückführung der Bewegungen von Scheiben auf Drehungen um Pole P ist allerdings ein alter Bestandteil der wissenschaftlichen Mechanik. Neu ist jedoch die Einführung dieser Pole in die Theorie der Tragwerke und namentlich die Darstellung der Bewegungen durch die so außerordentlich übersichtlichen um 90° gedrehten Verrückungen. Als grundlegend für die kinematische Behandlung der Fachwerke dürfte die Arbeit „*Müller-Breslau*, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerkes" (Schweizerische Bauzeitung 1887) zu betrachten sein.

11. Vortrag:

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen gemeinsam mit der geometrischen Bewegungslehre.

§ 71.

Allgemeine Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen zur Berechnung von Tragwerken (Wiederholung).

I. Wiederholung.

Das Grundprinzip, nach dem die Methode der Kraft × Weg-Produkte zur Berechnung von Tragwerken zu verwenden ist, haben wir uns bereits in § 65 klargemacht: Um z. B. den Stab S bei dem Fachwerke Fig. 175 zu berechnen, denken wir uns diesen Stab herausgenommen und statt dessen seine Spannkraft S an den beiden Knotenpunkten a und b, wo früher der Stab war, angebracht. Hierdurch ist das Tragwerk in einen Mechanismus verwandelt, dessen freie (angreifende) Kräfte die Lasten P und die beiden Kräfte S sind. (Außerdem sind noch Zwangskräfte, nämlich Auflager- und Gelenkdrücke, vorhanden, die uns aber bei der KWP-Methode bekanntlich nicht kümmern.) Nun erteilen wir diesem Mechanismus eine Bewegung, so daß zu jeder Kraft ein „Weg δ" entsteht. Und zwar seien:

δ_1, δ_2 usw. die Wege der Kräfte P_1, P_2 usw.,

$\left\{ \begin{array}{l} \delta_S \text{ der Weg der einen Kraft } S, \\ \delta_S' \text{ „ „ „ anderen „ „.} \end{array} \right.$

Wenden wir nun auf diese Wege und Kräfte die KWP-Methode an, so erhalten wir die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm \cdots \pm S \cdot \delta_S \pm S \cdot \delta'_S = 0\,.$$

Dies ist die Grundgleichung zur Anwendung der KWP-Methode auf Fachwerke. Aus ihr ergibt sich die Unbekannte S:

$$\text{(II)} \qquad S = \frac{P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 + \cdots}{\delta_S \pm \delta'_S}\,.$$

Die Wege $\delta_1, \ldots, \delta_S, \delta'_S$ werden aus der Figur abgegriffen, so daß durch den obigen Ausdruck die Spannkraft S vollständig gefunden ist.

II. Andere Deutung des Nenners $\delta_S + \delta'_S$.

Die in den Formeln vorkommende Summe $\delta_S + \delta'_S$ hat noch eine besondere geometrische Bedeutung. Sie ist nämlich nichts

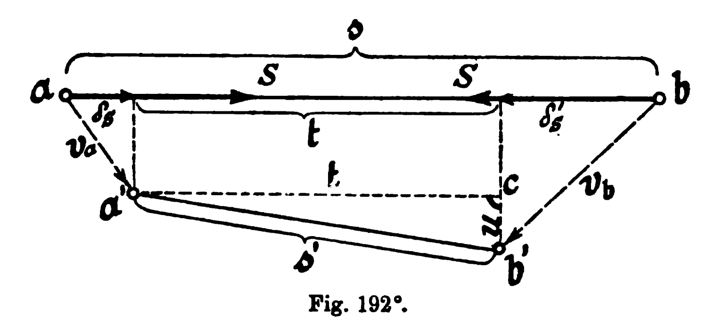


Fig. 192°.

anderes, als der Betrag, um den sich der Abstand s der beiden Punkte a und b infolge der Bewegung des Mechanismus ändert. War vor der Inbetriebsetzung der Abstand der Punkte a und b gleich „s" (= Länge des Stabes S), und ist er nach der Bewegung „s'", so ist zunächst (vgl. das Schema Fig. 192°):

$$\text{(1)} \qquad \delta_S + \delta'_S = s - t\,.$$

Hierin ist t die Projektion der Länge s' auf die ursprüngliche Länge s. Nun ist aber in dem rechtwinkligen Dreiecke $a'b'c$ die Kathete u unendlich klein im Verhältnis zu den anderen Seiten t und s'. (Denn wir beschränken uns ja nur auf unendlich kleine Verrückungen v, so daß auch die Verdrehungen gegen die ursprüngliche Lage nur unendlich klein sein können.) Für einen solchen Fall zeigt aber die Mathematik: Der Unterschied zwischen Kathete t und Hypotenuse s' ist unendlich klein „von der zweiten Ordnung", d. h. unendlich klein selbst im Verhältnis zu der bereits unendlich kleinen Strecke u. [Beispiel: $t = 500$ cm, $u = 1/_{100}$ cm. Dann ergibt die Ausrechnung einen Unterschied $s' - t = 1/_{10\,000\,000}$ cm.]

Wir können also, ohne daß hierdurch ein nachweisbarer Unterschied entstände, statt der Strecke t auch die Strecke s' einsetzen, wodurch die Formel (1) die Deutung ergibt:

$$(2) \qquad \delta_s + \delta'_s = s - s' = \Delta s \, .$$

In Worten: Die Summe der Wege δ_s und δ'_s bedeutet gleichzeitig den Unterschied der Abstände s und s', der zwischen den beiden Punkten a und b *vor* und *nach* der Inbewegungsetzung des Mechanismus besteht.

Mit dieser Schreibweise gehen die Formeln (I) und (II) über in:

$$(\text{III}) \qquad P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm \ldots \pm S \cdot \Delta s = 0 \, ,$$

$$(\text{IV}) \qquad S = \frac{P_1 \cdot \delta_1 \pm P_2 \cdot \delta_2 \pm \ldots}{\Delta s} \, .$$

Praktisch ist durch diese neue Form zwar nicht viel gewonnen, da man ja die Strecke s' nicht maßstäblich darstellen kann (Hierzu müßte man Fig. 192° maßstäblich zeichnen, was wegen der ungeheuren Verschiedenheit der Längen s und v unmöglich ist.) Für das praktische Rechnen muß man also doch auf δ_s, δ'_s zurückgreifen. Es ist eigentlich nur eine kürzere Ausdrucksweise, wenn man Δs statt $(\delta_s + \delta'_s)$ hinschreibt.

Dieses also waren die Formen, zu denen wir bereits in § 65 die KWP-Methode im wesentlichen entwickelt hatten.

§ 72.

Verbindung der KWP-Methode mit den um 90° gedrehten Verrückungen.

Der Fortschritt gegenüber § 65 ist nun folgender: Damals haben wir die Verrückungen der einzelnen Punkte und die daraus abzuleitenden „Wege" der Kräfte in ganz elementarer Weise durch direkte Aufzeichnung des verschobenen Mechanismus ermittelt. Diese Bestimmung der Formänderungen eines Mechanismus ist aber so umständlich und ungenau, daß an diesen Mängeln die ganze Methode scheitern müßte.

Inzwischen haben wir nun die vorzüglichen Hilfsmittel der Kinematik kennen gelernt. Wir werden von jetzt ab die Verrückungen und Wege stets auf Grund der geometrischen Bewegungslehre bestimmen, also mit Hilfe der momentanen Drehpole und der um 90° gedrehten Verrückungen. Im Prinzip bleibt also der bereits in § 65 entwickelte Gedankengang. Nur die Hilfsmittel haben sich gebessert.

Nun fällen wir die Lote ϱ_U von Punkt a'', und ϱ'_U von Punkt b'' auf die Kraftrichtung U, ferner das Lot ϱ_P vom Punkte m'' auf die Kraftrichtung P, und erhalten auf Grund der Gleichung (III) des vorigen Paragraphen:

$$\text{(I)} \qquad U \cdot \varrho_U - U \cdot \varrho'_U + P \cdot \varrho_P = 0,$$

$$\text{(I a)} \qquad U(\varrho_U - \varrho'_U) + P \cdot \varrho_P = 0.$$

[Je nachdem die Kräfte rechts- oder linksherum um den betreffenden Endpunkt zeigen, müssen sie natürlich verschiedene Vorzeichen erhalten.] Die Differenz $\varrho_U - \varrho'_U$ kann aus der Zeichnung direkt abgegriffen werden:

$$\text{(II)} \qquad \varrho'_U - \varrho_U = e,$$

so daß die Gleichung schließlich liefert:

$$\text{(III)} \qquad - U \cdot e + P \cdot \varrho_P = 0,$$

$$\text{(III a)} \qquad U = + \frac{P \cdot \varrho_P}{e}.$$

Hiermit ist die Spannkraft U bestimmt.

Die Längen ϱ_P und e werden in einem beliebigen (aber natürlich in dem gleichen) Maßstab gemessen. Wie man sieht, kommt es nur auf das Verhältnis der Verrückungen, bzw. der Lote, an. Wie groß man die erste Verrückung $\overline{a a''}$ gewählt hatte, ist vollständig gleichgültig; das Verhältnis $\varrho_P : e$ bleibt immer das gleiche. (Bei einer Änderung von $\overline{a a''}$ würden sich Zähler ϱ_P und Nenner e in gleichem Verhältnis ändern.)

Aufgabe: Bei welcher Richtung der Kraft P wäre die Stabkraft U gleich Null? [Wenn P in der Linie $\overline{m m''}$ wirkt. Dann ist das Lot von m'' auf P gleich Null und folglich auch das Produkt $P \cdot \varrho$. (Die wirkliche Verrückung würde rechtwinklig zur Kraftrichtung erfolgen, so daß deren Weg δ zu Null wird.)]

Aufgabe: Bei welcher Richtung der Kraft P wird der Stab U am meisten beansprucht? [Dann, wenn das Lot ϱ vom Punkte m'' auf die Kraft am größten ausfällt; d. h. wenn P rechtwinklig zur Linie $\overline{m m''}$ verläuft.]

Zweite Aufgabe.

Berechne in derselben Weise die Spannkraft U des Fachwerkes Fig. 187!

Die um 90° gedrehten Verrückungen sind sehr schnell bestimmt. Dann sind nur noch die Lote ϱ zu fällen und die Gleichung $P_1 \cdot \varrho_1 \pm \cdots$ anzusetzen.

Dritte Aufgabe.

Die Horizontalkomponente H des Auflagerdruckes bei dem Gerüst Fig. 195 ist zu berechnen!

Wir verwandeln das Tragwerk in einen Mechanismus, indem wir aus dem rechten festen Lager ein bewegliches machen. Die fortgenommene Lagerkraft wird in Gestalt einer äußeren (freien) Kraft H angebracht. Dann leiten wir eine Bewegung ein, indem wir z. B. den Punkt 2 die um 90^0 gedrehte Verrückung $\overline{2\,2''}$ ausführen lassen. Auf Grund dieses Antriebes finden wir dann der Reihe nach die Verrückungen der Punkte 3, 4 usw.

Hierbei ist zu beachten: a) Da wir $\overline{2\,2''}$ bis zum unteren Fußpunkte angenommen haben, so fällt auch $3''$ in diesen Fußpunkt. Denn es muß sein $\overline{2''\,3''} \# \overline{2\,3}$, $\overline{1''\,3''} \# \overline{1\,3}$. b) Punkt $4''$

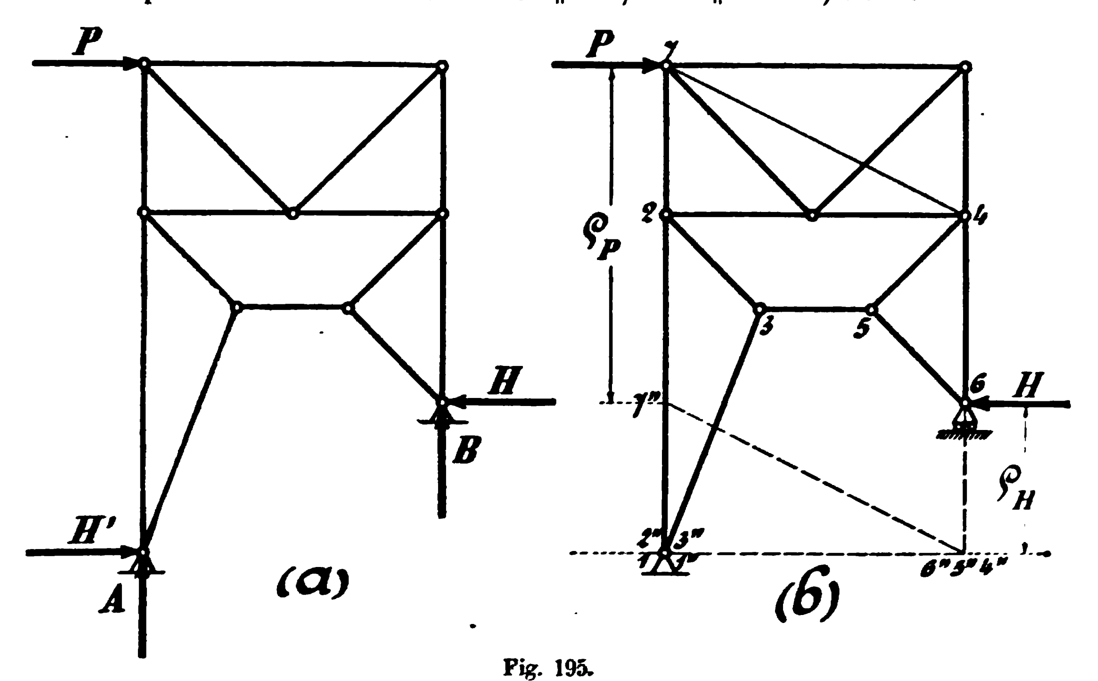


Fig. 195.

folgt aus $\overline{2''\,4''} \# \overline{2\,4}$, ferner $4''$ auf dem Lote zur Führung. c) $5''$ fällt mit dem Punkte $4''$ zusammen. Denn es ist $\overline{4''\,5''} \# \overline{4\,5}$, $\overline{3''\,5''} \# \overline{3\,5}$. d) $6''$ fällt ebenfalls mit $4''$ zusammen. Dadurch, daß die Verrückung $\overline{2\,2''}$ bis zum unteren Fußpunkte angenommen ist, hat sich die Zeichnung sehr vereinfacht.

Nun fällen wir das Lot ϱ_H vom Punkte $6''$ auf die Kraft H, und daß Lot ϱ_P vom Punkte $7''$ auf die Kraft P und erhalten:

$$P \cdot \varrho_P - H \cdot \varrho_H = 0\,,$$

$$H = P \cdot \frac{\varrho_P}{\varrho_H}\,.$$

[Der Maßstab, in dem die beiden Lote abgemessen sind, ist willkürlich. Es kommt nur auf das **Verhältnis** der Strecken an.] Hiermit ist die Kraft H bestimmt. Die Berechnung ist sicherlich einfacher als mit der Ersatzstabmethode.

Vierte Aufgabe.

Wie groß wäre die Auflagerkraft H von Fig. 195, wenn beide Auflager in gleicher Höhe wären?

Dann würde sich das Lot ϱ_H gleich Null ergeben. Die Formel für H lautete also:

$$H = \frac{P \cdot \varrho_P}{0} = \infty .$$

Die Auflagerkraft müßte demnach unendlich groß sein, um Gleichgewicht zu ermöglichen. Das heißt: Das System läßt sich überhaupt nicht im Gleichgewicht halten; es ist **beweglich.**

§ 74.

Verbindung des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit Polbestimmungen (Entwicklung der Einflußlinien).

Auch die Einflußlinien bei wandernder Last lassen sich durch die geometrische Bewegungslehre in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen sehr schön bestimmen. Hierbei kann man zwei Stufen unterscheiden:

1) Aus der Betrachtung der Scheiben des betreffenden Mechanismus läßt sich die **allgemeine Form** der betreffenden Einflußlinie (nämlich die Anzahl der Geraden, aus der sie besteht, und deren Knickpunkte) angeben; und

2) lassen sich auch direkt die Längen der einzelnen Ordinaten der Einflußlinie bestimmen. Das Hilfsmittel zu diesen Untersuchungen sind diesmal weniger die um 90° gedrehten Verrückungen als die Pole.

I. Grundprinzip der kinematischen Darstellung von Einflußlinien (Einsenkungsfläche).

1. Die Spannkraft S bei verschiedenen Laststellungen.

Es handle sich um irgendein kompliziertes **Tragwerk,** bei dem für eine Auflagerkraft, Spannkraft usw. die Einflußlinie gezeichnet werden soll. Als Beispiel diene Fig. 196 a, woselbst die Spannkraft S für eine wandernde Last $P = 1{,}0$ t berechnet werden soll.

Nach Fortnahme des Stabes S ist das Tragwerk ein zwangläufiger Mechanismus. Zunächst bestimmen wir dessen Pole. In Fig. 196 sind diese Pole richtig eingezeichnet. [Die Aufsuchung führe der Leser selber durch, indem er der Reihe nach die Scheiben $I, IV, \ldots$ vornimmt.]

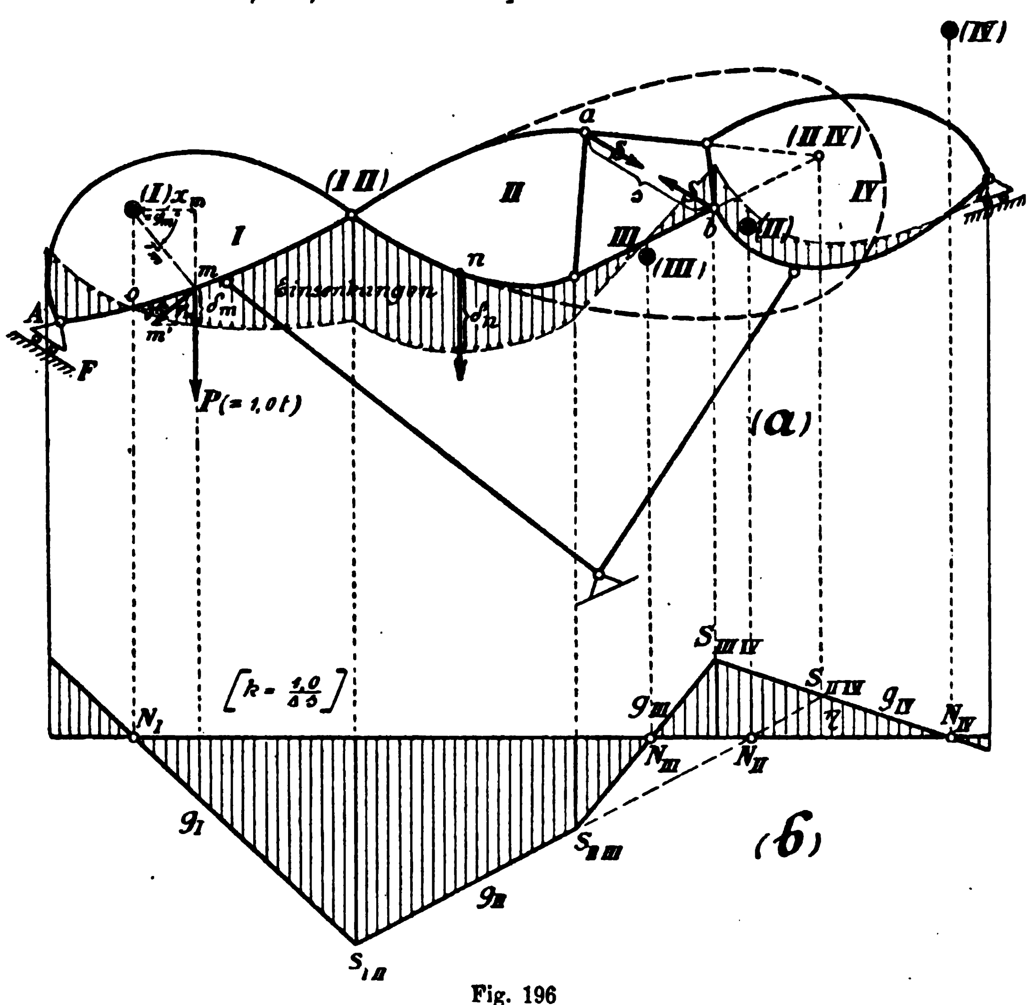


Fig. 196

Nun werde der Mechanismus angetrieben, indem man einen Punkt desselben eine virtuelle Verrückung ausführen läßt (z. B. den Punkt A längs der Führung F verschiebt). Hierdurch werden dann auch alle anderen Punkte zwangläufig bewegt. Insbesondere erleide der Angriffspunkt m der Kraft P eine Verrückung $\overline{mm'}$, so daß für die Kraft P ein Weg δ entsteht. Ferner ändere sich

der Abstand s der beiden Punkte a und b um Δs. Dann haben wir nach Gleichung (IV) von § 71 für die Spannkraft S sofort den Ausdruck (zunächst ohne Vorzeichen hingeschrieben):

$$\text{(I)} \qquad S = \frac{P \cdot \delta_m}{\Delta s},$$

oder, da wir eine wandernde Last $P = 1{,}0$ t betrachten:

$$\text{(II)} \qquad S = \frac{1{,}0}{\Delta s} \cdot \delta_m .$$

Dies ist also die Spannkraft des Stabes S infolge einer im Punkte m befindlichen Last $P = 1{,}0$ t.

Würde nun die Last an einer anderen Stelle stehen, z. B. an der Stelle n, so würden wir für die Spannkraft des Stabes S genau entsprechend bekommen:

$$\text{(II a)} \qquad S = \frac{1{,}0}{\Delta s} \cdot \delta_n ,$$

worin δ_n die Einsenkung an der betreffenden Stelle n ist; während der Nenner Δs derselbe ist wie vorhin. Denn letzterer hängt ja nur von den beiden Punkten a und b ab und ist ein für allemal bestimmt, sobald wir mit dem Mechanismus eine Bewegung eingeleitet haben.

Aus den Formeln (II) und (II a) ergibt sich also für eine wandernde Last der Satz: *Für jede Stellung der Last $P = 1{,}0$ t ist die Spannkraft des Stabes S gleich der Einsenkung δ an der betreffenden Laststelle (m, bzw. n), multipliziert mit dem Faktor* $(1{,}0 : \Delta s)$.

2. Die „Einsenkungsfläche“ als graphische Darstellung der Spannkräfte S.

Denkt man sich nun zu jedem Punkte des Mechanismus die Einsenkung δ als lotrechte Strecke (Ordinate) aufgetragen, so daß eine ganze Fläche — „Einsenkungsfläche“ — entsteht, so hat diese augenscheinlich folgende Bedeutung: Steht an irgendeiner Stelle m eine Last $P = 1{,}0$ t, so kann man aus der Ordinate δ der Einsenkungsfläche direkt angeben, wie groß die bei dieser Laststellung im Stabe S entstehende Spannkraft ist. Man braucht nämlich die Ordinate δ nur noch durch die Abstandsänderung Δs der beiden Punkte a und b zu dividieren. Also:

Die Einsenkungsfläche des Mechanismus, der aus dem ursprünglichen Tragwerk durch Fortlassung des Stabes S entstanden ist, ist gleichzeitig die Einflußfläche für diesen Stab. Nur muß das Resultat noch mit dem Faktor $k = (1{,}0 : \Delta s)$ multipliziert werden.

Hierbei sind die Einsenkungen δ und die Abstandsänderung Δs in einem beliebigen (aber natürlich gleichen) Längenmaßstabe zu messen. Der Faktor 1,0 bedeutet 1,0 t. Für S erhält man dann natürlich ebenfalls t.

In Fig. 196 a ist die Einsenkungslinie, wie sie sich für den vorliegenden Mechanismus ergeben würde, skizziert. Diese Fläche also, von einer Horizontalen aufgetragen (Fig. 196 b), stellt dann die (nur noch mit einem Faktor k zu versehende) Einflußfläche für den Stab S dar.

Bemerkung: Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, wie sehr das Prinzip der virtuellen Verrückungen dem Gefühl des Forschenden entgegenkommt. An und für sich ist eine Kraft etwas Unsichtbares, Unfaßbares. Um eine Kraft zu erkennen, wird man also nach einer äußeren Betätigung derselben suchen. Deshalb ist es bei der Berechnung einer Stabkraft S naheliegend, zu fragen: Was würde geschehen, wenn der Stab plötzlich nachlassen würde? Man hofft, durch diese Fragestellung die Aufgabe, die die Kraft S im ruhenden System ausfüllt, zu ergründen.

In der Tat geht die KWP-Methode gerade auf diese Frage ein. Es zeigt, welche Verrückungen eintreten würden, sobald der Stab nachlassen würde, und lehrt dann weiter, wie diese Verrückungen und die Größe der auftretenden Kräfte in Zusammenhang zu bringen sind. Es zeigt uns die Eigenschaft des Gleichgewichts, indem es uns vorführt, was eintreten würde, wenn das Gleichgewicht gestört werden würde.

Mit Recht hat man deshalb gesagt, daß das Prinzip der virtuellen Verrückungen „die ruhenden und verborgenen Verhältnisse der Statik nötigt, in sichtbaren Proportionen hervorzutreten". Es zeigt uns gewissermaßen die Kräfte im arbeitenden Zustande. Im Gegensatz hierzu stehen unsere „einfachen" Gleichgewichtsbedingungen, bei denen der Ruhezustand als das Gegebene, Unveränderliche behandelt wird, ohne Frage danach, was vorher geschehen ist oder nachher geschehen würde. In dieser Hinsicht haben die einfachen Gleichgewichtsbedingungen etwas Starres, Unzugängliches.

II. Benutzung des Grundprinzips zur Bestimmung der allgemeinen Form einer jeden Einflußlinie.

Aus der soeben abgeleiteten Darstellung der Einflußlinie als der Einsenkungslinie des betreffenden Mechanismus lassen sich für die Theorie der Einflußlinien mehrere wichtige Schlüsse ziehen. Man kann nämlich allgemein gültige Regeln hinsichtlich der Gestalt einer jeden Einflußlinie aufstellen.

Satz 1.

Jede Scheibe des Mechanismus begrenzt ein gerades Stück der Einflußlinie.

Der Beweis ergibt sich daraus, daß das betreffende Stück der Einflußlinie ja nichts anderes ist als die Einsenkungslinie der

darüberliegenden Scheibe. Hat z. B. der Punkt m von dem Drehpol seiner Scheibe den Abstend r_m, so ergibt sich zunächst eine Verrückung

$$v_m = \overline{m\,m'} = r_m \cdot \omega\,,$$

worin ω der Drehungswinkel der Scheibe sei. (Punkt m führt einen kleinen Kreisbogen mit dem Zentriwinkel ω um den Pol aus.) Aus v_m folgt die Einsenkung:

$$\text{(III)} \qquad \delta_m = v_m \cdot \cos\varphi_m = r_m \cdot \cos\varphi_m \cdot \omega = x_m \cdot \omega\,.$$

Da nun der Drehungswinkel ω für alle Punkte der Scheibe derselbe ist (denn um ihn dreht sich ja die ganze Scheibe), so folgt, daß die Einsenkung δ_m eines Punktes m direkt proportional ist dem Abstande x_m dieses Punktes vom Pole. Mit anderen Worten: Betrachtet man verschiedene Punkte der Scheibe, die in den Abständen *1*, *2* usw. vom Pole liegen mögen, so wachsen die Einsenkungen dieser Punkte in demselben Verhältnis, wie die Abstände x der Punkte vom Pol der Scheibe. Und daraus folgt, daß, wenn man die Einsenkung δ einer Scheibe von einer Nullachse aus aufträgt, die Endpunkte aller δ auf einer *geraden* Linie liegen müssen. [Ist die Scheibe oben horizontal begrenzt, so folgt dies ja auch direkt aus der Anschauung.] Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Satz 2.

Der Pol einer Scheibe bedeutet gleichzeitig den Nullpunkt der darunter liegenden Einflußlinie.

Betrachten wir in Fig. 196 z. B. die Scheibe I mit ihrem Pol (I). Der vertikal unter diesem liegende Punkt o würde bei einer Bewegung des Mechanismus eine Verrückung v_o beschreiben, die rechtwinklig zum Polstrahl $\overline{(I)\,o}$ ist, also horizontal verläuft. Stände nun in o eine vertikale Kraft P, so würde also deren Weg

$$\delta_o = 0$$

sein. Das KWP dieser Kraft ist also gleich Null, und daraus folgt, daß sie keine Spannkraft im Stabe S hervorbringt. [Dasselbe Resultat folgt aus der Formel (III), da für den Punkt o der Abstand x gleich Null wird.]

Satz 3.

Der Relativpol zweier Scheiben gegeneinander bezeichnet die Stelle, an der die Einflußlinien dieser beiden Scheiben, bzw. die Verlängerungen dieser Einflußlinien, sich schneiden.

Für die beiden Scheiben I und II von Fig. 196a ergibt sich dieser Satz ohne weiteres. Denn der Relativpol dieser beiden

Scheiben ist der Punkt $(I\,II)$, und da an dieser Stelle die beiden Scheiben aneinanderstoßen, müssen auch die zugehörigen (geraden) Linien g_I und g_{II} der Einflußlinie an dieser Stelle zusammentreffen.

Aber auch für zwei andere Scheiben, z. B. IV und II gilt dieser Satz. Deren relativer Pol ist der Punkt $(IV\,II)$. Denken wir uns die beiden Scheiben so weit verlängert, daß sie sich überdecken, so würde an der Stelle $(IV\,II)$ die Scheibe IV sich genau so verrücken wie die Scheibe II. [Denn um den Punkt $(IV\,II)$ dreht sich ja die eine Scheibe gegen die andere. Der Punkt selber ist also für beide Scheiben gemeinsam; an ihm ist die Spur, die die eine Scheibe auf der anderen zurückläßt, gleich Null.] Aus der an dieser Stelle vorhandenen Gleichheit der Verrückungen der beiden Scheiben folgt aber, daß eine im Punkte $(II\,IV)$ befindliche Kraft denselben Weg δ erfährt, ganz gleichgültig, ob sie sich auf der Scheibe II oder auf der Scheibe IV befindet. Die unter dem Punkte $(IV\,II)$ befindliche Ordinate η der Einflußlinie muß also bei der Linie g_{IV} (die zu der Scheibe IV gehört) ebenso groß sein wie bei der (Verlängerung der) Linie g_{II} (die zu der Scheibe II gehört). Das heißt: Vertikal unter dem Relativpol $(II\,IV)$ müssen sich die beiden zu den Scheiben II und IV gehörigen Stücke g_{II} und g_{IV} schneiden.(Schnittpunkt $S_{II\,IV}$).

Wiederholung von Absatz II.

Grundprinzip: die Einflußlinie für eine Stabkraft, Auflagerkraft usw. eines Tragwerkes ist nichts anderes als die Einsenkungslinie des Mechanismus, in den das Tragwerk durch Beseitigung der betreffenden Stabkraft, Auflagerkraft usw. übergeht. Daraus folgt:

1) Jede Einflußlinie eines statisch bestimmten Tragwerkes besteht aus geraden Linien g_I, g_{II} usw. Kommt die Last beim Überwandern des Tragwerkes von einem Ende zum anderen über x Scheiben I, II usw., so besteht die Einflußlinie entsprechend aus x Geraden g_I, g_{II} usw., und zwar so, daß unter jeder Scheibe eine Gerade g liegt.

2) Der Schnittpunkt einer jeden Geraden g mit der Nullachse der Einflußfläche liegt vertikal unter dem Pol der Scheibe, zu der die betreffende Gerade gehört. Hierdurch ist der **Nullpunkt** N einer jeden Geraden g bestimmt. Liegt der Pol außerhalb der Scheibe, so schneidet nicht die betreffende Gerade g, sondern erst deren Verlängerung die Nullachse.

3) Der **gemeinsame Punkt** $S_{I\,II}$ zweier Geraden g_I und g_{II}, bzw. deren Verlängerungen. liegt vertikal unter dem Relativpol

der zugehörigen Scheiben *I* und *II*. Hierdurch sind die Schnittpunkte der einzelnen Geraden untereinander bestimmt.

Wir können jetzt also von vornherein bei jeder Einflußlinie angeben: 1) Aus wieviel Geraden sie bestehen wird; 2) wo die einzelnen Geraden ihre Ordinate Null haben werden, und 3) wo sich je zwei solche Geraden schneiden müssen.

Augenscheinlich bekommt man durch solche allgemein gültige Sätze erst die nötige Sicherheit, um mit Einflußlinien wirklich hantieren zu können.

4. Beispiel zu Absatz II.

Bei dem Tragwerk Fig. 197 a ist die allgemeine Gestalt der Einflußlinie des Stabes S anzugeben!

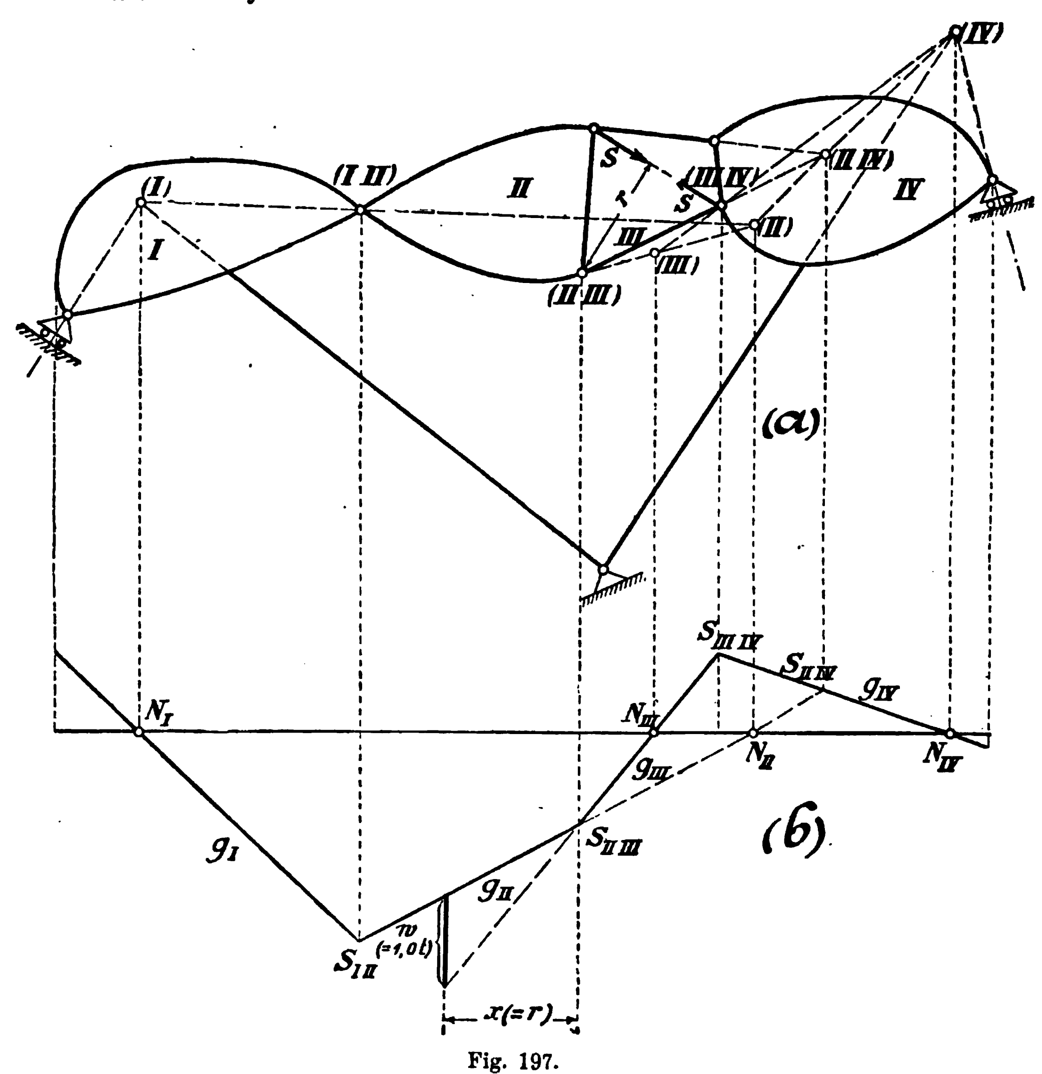


Fig. 197.

Die Belastung bewege sich auf der Unterseite der Scheiben *I*, *II*, *III* und *IV*. Wir können also sofort aussagen: 1) Die Einflußlinie für S muß aus 4 Geraden $g_I \ldots g_{IV}$ bestehen, von denen jede so weit gültig ist, wie die entsprechende darüberliegende Scheibe $I \ldots IV$ reicht. Nun bestimmen wir noch in Fig. 179a die Pole der Scheiben. [Es ergeben sich sofort die Relativpole *I II*, *II III*, *III IV*, *II IV*. Ferner die absoluten Pole (*I*), (*IV*), (*II*) aus (*II I*) und (*II IV*), und (*III*) aus (*III II*) und (*III IV*).] Mit Hilfe dieser Pole können wir dann aussagen: 2) Die Nullpunkte $N_I \ldots N_{IV}$ der Geraden $g_I \ldots g_{IV}$ müssen senkrecht unter den Polen (*I*)..(*IV*) liegen; 3) die Schnittpunkte $S_{I\,II}$, $S_{II\,III}$, $S_{III\,IV}$ usw. der Geraden g_I, g_{II}, g_{III} usw. untereinander müssen senkrecht unter den Relativpolen (*I II*), (*II III*), (*III IV*) usw. liegen.

Insgesamt werden wir also folgendermaßen vorgehen: Wir ziehen die Nullachse der Einflußfläche, loten den Pol (*I*) hinunter, erhalten hierdurch den Nullpunkt N_I und ziehen nun durch diesen die (im übrigen beliebig gerichtete) Gerade g_I. Hiermit ist der zu Scheibe *I* gehörige Teil der Einflußlinie erledigt. An g_I schließen wir im Punkte $S_{I\,II}$ (senkrecht unter Pol *I II*) die Gerade g_{II}, und zwar so, daß dieselbe, bzw. ihre Verlängerung, durch ihren Nullpunkt N_{II} (senkrecht unter Pol *II*) geht. An g_{II} schließen wir in derselben Weise g_{III} (mit Nullpunkt N_{III}, vertikal unter Pol *III*) und schließlich g_{IV}. Dann ist die Gestalt der Einflußlinie fertig.

Außerdem haben wir noch Kontrollen. Zum Beispiel: Der Schnittpunkt $S_{II\,IV}$ der Geraden g_{II} und g_{IV} muß senkrecht unter dem Relativpole (*II IV*) liegen. Statt aber den Punkt $S_{II\,IV}$ zur Kontrolle zu benutzen, kann man ihn natürlich auch zum eigentlichen Aufzeichnen der Einflußlinie benutzen und auf diese Weise z. B. den Punkt N_{II} sparen.

III. Bestimmung der Länge einzelner Ordinaten.

Die Gestalt einer Einflußlinie ist aber noch nicht ausreichend, um die betreffende Spannkraft, für die die Einflußlinie gilt, wirklich auszurechnen. Denn es fehlt ja noch der Maßstab, in dem die einzelnen Ordinaten abzumessen sind. Zur vollständigen Bestimmung der Einflußlinie muß man also wenigstens noch die Größe einer Ordinate kennen. Denn dann kann man aus dieser einen Ordinate angeben, wieviel t ein cm zu bedeuten hat, und hat hierdurch den Maßstab für sämtliche Ordinaten.

Wir werden also so vorgehen, daß wir (nach Festlegung der allgemeinen Gestalt der Einflußlinie) einzelne Ordinaten besonders herausgreifen, ihre Längen bestimmen und hierdurch den Maßstab für die ganze Einflußlinie erhalten. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen:

1. Mittels der Spannkräfte infolge $A = 1{,}0$ t, bzw. $B = 1{,}0$ t.

Dies ist namentlich beim Fachwerkträger auf zwei Stützen die häufigste Weise, um die Einflußlinien vollständig zu bestimmen.

Man trägt also, genau wie im 3. Vortrage (Fig. 84...100), zunächst die Strecke $\overline{A'C'} = S_A$ oder $\overline{B'D'} = S_B$ auf. Von diesen aus entwickelt man dann mittels der Nullpunkte N und der Schnittpunkte S der einzelnen Geraden g_I, g_{II} usw. die gesamte Einflußlinie. Bei diesem einfachsten Falle kommt die kinematische Methode schließlich auf dasselbe hinaus wie die elementare Methode. Der Nutzen der kinematischen Betrachtung besteht aber darin, daß man leichter angeben kann, wie weit jede der einzelnen Geraden g der Einflußlinie zu reichen hat (nämlich so weit die darüberliegende Scheibe reicht). Beispiele: Fig. 199, Fig. 205.

2. Durch Herausgreifen anderer Ordinaten.

Statt der Strecken $A'C'$ und $B'D'$ unter den Auflagerpunkten kann man natürlich auch andere Ordinaten herausgreifen. In Fig. 131 ist für einen häufig vorkommenden Fall gezeigt, wie man solche zwischenliegende Ordinaten berechnen kann. Eine oder mehrere Ordinaten werden also zunächst eingezeichnet und daran die einzelnen Geraden g_I g_{II} usw. der Einflußlinie angeschlossen. Bei komplizierten Tragwerken wird man irgendeine Laststellung herausgreifen und für diese die Spannkraft berechnen (ev. kinematisch oder auch mittels der Ersatzstabmethode). Beispiel: Fig. 200.

3. Durch Bestimmung der Vertikalabstände zwischen den Geraden g_I, g_{II} usw.

a) Allgemeines über die Verwendung der Vertikalabstände w.

Ein anderes Mittel, um außer der Gestalt der Einflußlinie auch noch die Größe der Ordinaten zu ermitteln, bietet die Bestimmung der Vertikalabstände zwischen den einzelnen Geraden g_I, g_{II} usw. Diese Abstände zwischen den verschiedenen Teilen einer Einflußlinie haben wir bereits bei der ersten Herleitung der Einflußlinien beachtet. In Fig. 84'b und e ist der Abstand z bestimmt, der zwischen den beiden Teilen einer für einen Gurtstab gezeichneten Einflußlinie besteht. In Fig. 92' und 92'' sind entsprechend die Abstände D_1'' und D_2'' bestimmt, die zwischen den einzelnen Strecken einer für eine Diagonale gezeichneten Einflußlinie bestehen.

[Zusammenstellung der Resultate in Fig. 92''', bzw. 112 und 113. In letzteren Tabellen sind die entsprechenden Werte mit $D_{P'}$ und $D_{P''}$ bezeichnet. Die Bestimmung dieser Vertikalabstände geschah in ganz elementarer Weise. Und zwar entweder rein geometrisch (bei den Gurtstäben) oder dadurch, daß wir eine Kraft unmittelbar neben dem betreffenden Schnitte annahmen und nun die Spannkraft ausrechneten, die diese angenommene Kraft für sich allein in dem betreffenden Stabe hervorbringt.]

Diese Vertikalabstände — sie mögen jetzt gemeinsam mit „w", bezeichnet werden — können wir nun verwenden, um in Verbindung mit den allgemeinen Regeln über die Geraden g einer Einflußlinie letztere vollständig zu bestimmen. Wir fangen mit einer Geraden g der Einflußlinie an, tragen daran die nächste Gerade g an und zwar so, daß der Vertikalabstand w zwischen den beiden Geraden den rechnungsmäßigen Wert hat, und hierauf schließen wir alle anderen Geraden g an. Der Maßstab, in dem die Strecke w aufgetragen wurde, gilt dann für die ganze Einflußlinie. Statt dessen kann man auch zunächst sämtliche Geraden g aufzeichnen, dann den Abstand w abmessen und hierdurch den Maßstab festlegen.

b) Kinematische Bestimmung der Abstände w.

Die Vertikalabstände w haben wir zwar bereits für viele Fälle bestimmt und zusammengestellt (§ 28a, b; § 35a).

Es möge jetzt aber noch eine ganz allgemeine kinematische Ableitung derselben gegeben werden (nach *Müller-Breslau*), die für jedes noch so komplizierte Tragwerk paßt und überhaupt das Wesen der Sache in einem ganz anderen Lichte erscheinen lassen wird.

α) Darstellung von w durch die Differenz der Einsenkungen δ. In Fig. 198a sei auf kinematischem Wege die Einflußlinie für den Stab S gezeichnet. Infolge einer an der Scheibe I befindlichen Last $P = 1{,}0$ t ergibt sich also die Spannkraft des Stabes S:

$$(1) \qquad S_I = \frac{P \cdot \delta_I}{\Delta s} = \frac{1{,}0}{\Delta s} \cdot \delta_I .$$

[δ_I = Einsenkung der Scheibe I an dem Angriffspunkte von P.] In der Einflußlinie wird dieser Wert S_I durch die Ordinate η_I dargestellt.

Denken wir uns nun die Scheibe II so weit verlängert, daß sie bis zur Last P reicht, und wäre P an derselben Stelle, jetzt aber an der Scheibe II, so würde im Stabe S natürlich eine andere Spannkraft entstehen. Nämlich:

$$(2) \qquad S_{II} = \frac{P \cdot \delta_{II}}{\Delta s} = \frac{1{,}0}{\Delta s} \cdot \delta_{II} .$$

[δ_{II} = Einsenkung der Scheibe II an der Angriffsstelle von P. Da Scheibe II einen anderen Pol hat als Scheibe I, sind natürlich auch die Einsenkungen anders.] In der Einflußlinie würde dieser Wert durch die Verlängerung der Geraden g_{II} (entsprechend

der Verlängerung der Scheibe *II*) darzustellen sein, und zwar durch die Ordinate η_{II}.

Somit folgt zunächst nach Fig. 198: Der Vertikalabstand w der beiden Linien g_I und g_{II} unter der Last P beträgt:

$$w = \eta_{II} - \eta_I = S_{II} - S_I ,$$

$$(3) \qquad w = \frac{1{,}0}{\Delta s}(\delta_{II} - \delta_I) = \frac{\Delta \delta}{\Delta s} .$$

In Worten: Der Vertikalabstand w der Geraden g_I und g_{II} der zu einem Stabe S gezeichneten Einflußlinie ist nichts anderes als der Unterschied $\Delta\delta$ der Einsenkungen der Scheiben *I* und *II* an der betreffenden Stelle, dividiert durch die Abstandsänderung Δs.

Um w zu bestimmen, müssen wir also folgende geometrische Aufgabe behandeln: Wir denken uns den Mechanismus, in den das Tragwerk nach Fortnahme des Stabes S übergeht, angetrieben und betrachten nun einerseits die Abstandsänderung Δs der Punkt a und b, andererseits den Unterschied $\Delta\delta = (\delta_{II} - \delta_I)$ der Einsenkungen der Scheiben *II* und *I* an der Stelle P. Das Verhältnis von $\Delta\delta : \Delta s$ ergibt den Vertikalabstand w der Linien g_{II} und g_I. [Hierdurch ist dann eine Strecke von der Einflußlinie des Stabes S auch rechnerisch festgelegt. Da die allgemeine Form der Einflußlinie bereits früher bestimmt worden ist, so ist somit die ganze Einflußlinie hinsichtlich Form und Maßstab gefunden.]

β) Praktische Bestimmung des Verhältnisses $(\delta_{II} - \delta_I) : \Delta s$. Bei dieser Bestimmung ist es zweckmäßig, zwei solche Scheiben zu betrachten, die möglichst nahe an dem zu untersuchenden Stabe liegen. Denn dann läßt sich die Abstandsänderung Δs der Stabendpunkte a und b leicht in Beziehung bringen zu dem Einsenkungsunterschied der Scheiben. Zum Beispiel

Fig. 198b: Die beiden betrachteten Scheiben mögen direkt durch den zu untersuchenden Stab verbunden sein. Wenn bei der Inbewegungsetzung des gesamten Mechanismus die Punkte a und b sich um eine Strecke Δs gegenseitig verschieben, so ergibt sich hieraus zunächst die Änderung des Winkels α (Fig. 198b):

Winkeländerung = (unendlich kleiner) Bogen : Radius

$$(4) \qquad \Delta\alpha = \Delta s : r .$$

Um diesen Winkel haben sich also bei der allgemein stattgefundenen Bewegung die beiden Scheiben gegeneinander gedreht. Wenn

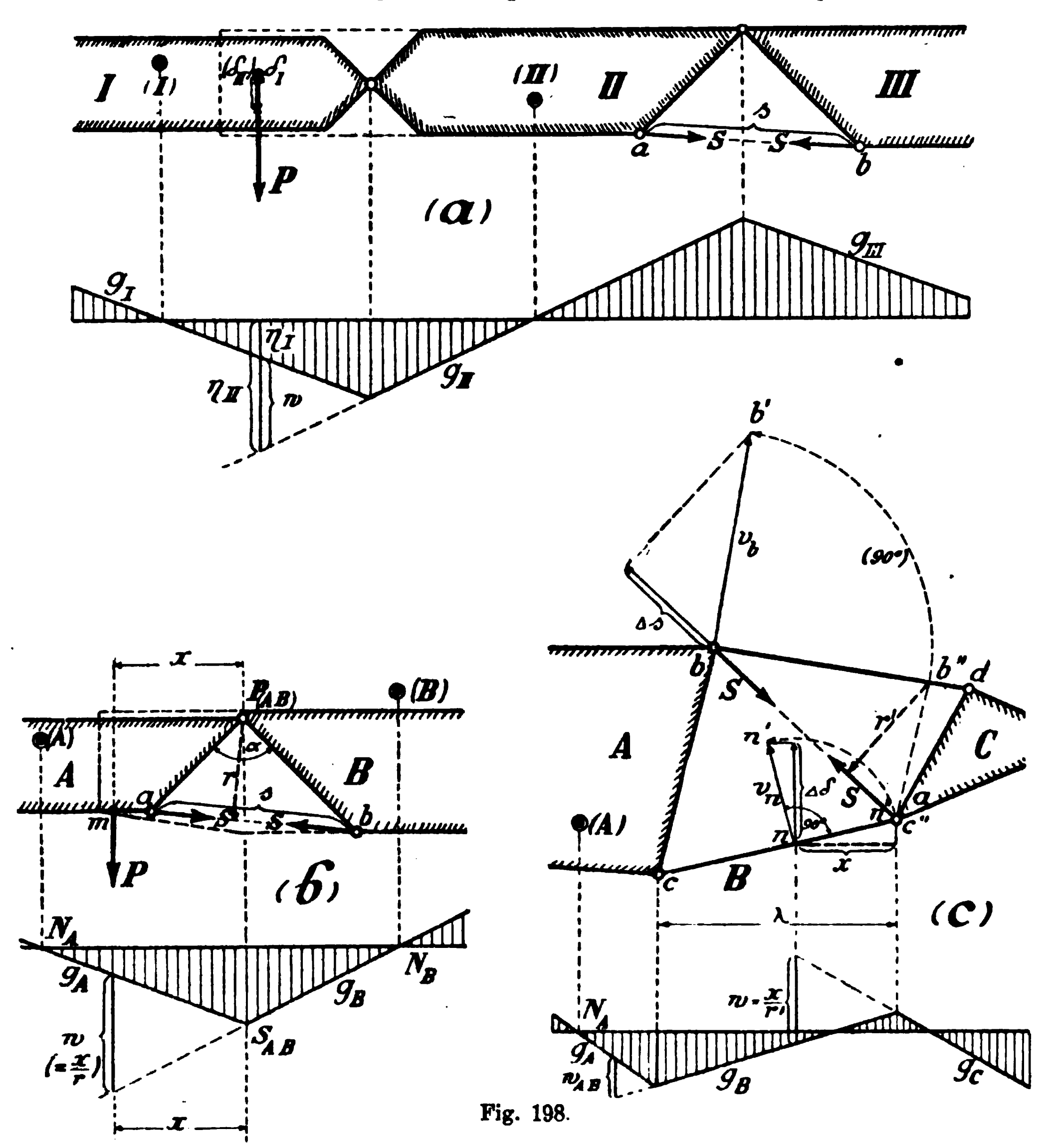


Fig. 198.

sich aber z. B. die Scheibe B mehr dreht als die Scheibe A, so wird sich auch der zu Scheibe B gehörige Punkt m mehr senken als der (darüber liegende) Punkt m der Scheibe A. (Er wird gewissermaßen voreilen.) Und zwar beträgt dieses Mehr an Einsenkung (in vertikaler Richtung):

$$\delta_{II} - \delta_I = \text{horizontaler Hebelarm} \times \text{gegenseitiger Drehwinkel},$$

$$\delta_{II} - \delta_I = x \cdot \Delta\alpha = x \cdot \frac{\Delta s}{r}. \tag{5}$$

Dieses ist also der Unterschied $\Delta\delta$ der Einsenkungen, den die beiden Scheiben an der Stelle m erlitten haben. Schließlich finden wir nun das Verhältnis

$$\Delta\delta : \Delta s = x \cdot \frac{\Delta s}{r} : \Delta s = \frac{x}{r},$$

$$(6) \qquad w = \frac{x}{r}.$$

Somit können wir für zwei nach Fig. 198b verbundene Scheiben an jeder Stelle den Abstand w der zugehörigen Geraden der Einflußlinien angeben (Fig. 198b). Es sind nur der Abstand x der betreffenden Stelle vom Relativpol der beiden Scheiben und außerdem das Lot r abzumessen und zu dividieren.

Scheibenverbindung nach Fig. 198c. Bei den Scheiben A und B liegt der vorhin behandelte Fall vor: Zwei Scheiben, die direkt durch den zu untersuchenden Stab verbunden sind. Der Abstand w_{AB} zwischen den beiden Geraden g_A und g_B an irgendeiner Stelle ist also direkt nach Formel (6) bestimmbar.

Bei den Scheiben B und C läßt sich die Änderung des Winkels zwischen den Scheiben nicht so einfach mittels des gegenseitigen Drehwinkels angeben wie vorhin bei Fig. 198b. Wir wollen deshalb direkt auf die Einsenkungen eingehen. Es handelt sich also darum, festzustellen, wieviel bei der allgemein stattfindenden Bewegung des Mechanismus ein Punkt n mehr oder weniger einsinken würde, je nachdem er zur Scheibe B oder zur Scheibe C gehören würde. (Die Scheibe C ist bis zu dieser Stelle n verlängert zu denken.)

Da es sich nur um die gegenseitige Bewegung der Scheiben B und C an der Stelle n handelt, können wir eine von ihnen, z. B. Scheibe C, fest annehmen und die Bewegung der anderen relativ zu C verfolgen. Wir betrachten also die Punkte a und d in Fig. 198c als ruhend. Für den Punkt n nehmen wir nun eine Bewegung an, z. B. die um 90° gedrehte Verrückung $\overline{nn''}$. Aus dieser einen angenommenen Bewegung ergibt sich dann sofort die um 90° gedrehte Verrückung des Punktes c, nämlich gleich $\overline{cc''}$. Ferner durch Ziehen der Parallelen $c''b'' \# cb$ die um 90° gedrehte Verrückung $\overline{bb''}$ des Punktes b. Denken wir uns nun diese Verrückungen um 90° zurückgedreht, so ergeben sich die wahren Verrückungen $\overline{nn'}$ und $\overline{bb'}$. Und aus diesen wahren Verrückungen können wir durch Ziehen der Projektionen sofort abgreifen (Fig. 198c): Die Abstandsänderung Δs der Punkte a und b, und die Einsenkung $\Delta\delta$ des Punktes n der Scheibe B relativ

zur Scheibe C. Bequemer ist es jedoch, statt der wahren Verrückungen $\overline{b\,b'}$ und $\overline{n\,n'}$ einfach das Lot r' und die Horizontale x zu ziehen. Wie man sieht, sind nämlich diese Linien ebenfalls gleich Δs, bzw. $\Delta\delta$.

Wir haben also durch diese geometrische Betrachtung der Bewegungen folgendes Resultat: Wenn bei dem vorliegenden Mechanismus die Punkte a und b eine Abstandsänderung $\Delta s = r'$ erfahren, senkt sich der Punkt n der Scheibe B relativ zur Scheibe C um $\Delta\delta = x$. Das Verhältnis des Einsenkungsunterschiedes $\Delta\delta$ der beiden Scheiben zu der Abstandsänderung Δs beträgt also in diesem Falle:

$$\Delta\delta : \Delta s = x : r',$$

$$(7) \qquad w = \frac{x}{r'}.$$

Somit ist auch für die beiden Scheiben B und C bestimmt, wie groß der Vertikalabstand zwischen den zugehörigen Geraden g_B und g_C der Einflußlinie ist.

Insgesamt haben wir also folgendes Resultat: Sind die beiden Scheiben A und B direkt durch den zu untersuchenden Stab verbunden, so ist der Vertikalabstand zwischen den zugehörigen Geraden der Einflußlinie:

$$(6) \qquad w = \frac{x}{r}.$$

[x = Abstand der betrachteten Stelle vom Relativpol der beiden Scheiben; r = Lot auf den Stab S.] Sind die beiden Scheiben (B und C) nach Fig. 198c an den Stab angeschlossen, so muß man die um 90° gedrehte Verrückung $b\,b''$ des anderen Endpunktes des Stabes bestimmen und hat dann:

$$(7) \qquad w = \frac{x}{r'}.$$

Die Stellen x, an denen man die Abstände w einzeichnen will, kann man natürlich beliebig auswählen. Wählt man den Abstand x gleich der Feldweite λ (Fig. 198c), so erkennt man, daß die obigen Formeln tatsächlich in die im 3. Vortrage abgeleiteten Formeln D_1'' usw. übergehen. Am praktischsten aber ist es, man wählt:

$$(8) \qquad x = r, \quad \text{bzw.} \quad = r';$$

dann wird nämlich

$$(8\,a) \qquad w = 1{,}0\ \text{t}; \quad w' = 1{,}0\,\text{t}.$$

Augenscheinlich sind diese Werte w am einfachsten aufzutragen. [Es sind unsere früheren Werte z.]

4. Wiederholung von Absatz III.

Ist bei einer Einflußlinie die Gestalt festgelegt, so muß man außerdem auch noch den Maßstab bestimmen, in dem die Ordinaten abzumessen sind. Das heißt, man muß wenigstens die Länge einer Ordinate zahlenmäßig angeben. Dies kann geschehen:

1. Durch Einzeichnen der Werte infolge $A = 1{,}0$ t oder $B = 1{,}0$ t.

2. Durch Herausgreifen einzelner besonderer Ordinaten der Einflußlinie.

3. Durch Ausrechnen der Vertikalabstände w zwischen den einzelnen Geraden, aus denen sich jede Einflußlinie zusammensetzt. Diese Abstände w lassen sich allgemein ausdrücken durch den Einsenkungsunterschied $\Delta\delta$ der Scheiben und durch die Abstandsänderung Δs. Für den besonderen Fall, daß die betreffenden Scheiben unmittelbar an den zu untersuchenden Stab anschließen, läßt sich dieses Verhältnis durch die einfachen Formeln (6) und (7) angeben.

5. Beispiel zu Absatz III.

Aufgabe: Die Einflußlinie Fig. 197b, die wir im vorigen Absatze hinsichtlich ihrer Gestalt bestimmt haben, soll jetzt auch rechnerisch festgelegt werden!

Wir wählen die Scheiben II und III aus, um deren zugehörigen Vertikalabstand w der Einflußlinie zu bestimmen. In der Systemfigur ziehen wir also das Lot r, tragen in der Einflußlinie seitlich von $S_{II\,III}$ einen beliebigen Abstand x auf und messen den Vertikalabstand w. Da dieser Abstand w andererseits gleich dem Bruche $x:r$ ist, so ist hiermit bestimmt, wieviel Tonnen ein Zentimeter der Einflußlinie zu bedeuten hat

---

IV. Zusammenfassung.

Das wichtige Resultat dieses Paragraphen war: Die Einsenkung δ des Mechanismus, dividiert durch die Abstandsänderung Δs, ergibt die Spannkraft S. Oder: die Einsenkungslinie des Mechanismus ist die Einflußlinie für S. Multiplikator: $k = (1{,}0 : \Delta s)$. Aus diesem Grundprinzip ergeben sich folgende, ein direktes Auf skizzieren der Einflußlinie ermöglichende Hilfsmittel: Zerlegung jeder Einflußlinie in einzelne, zu den Scheiben gehörigen Geraden g_I, g_{II} usw.; Bestimmung der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Nullachse; Bestimmung der Schnittpunkte dieser Geraden untereinander.

Zur vollständigen Ausmittlung der Einflußlinie gehört aber noch die Angabe des Maßstabes für die Ordinaten. Dies geschieht durch **rechnungsmäßige** Festlegung wenigstens **einer** Ordinate; also z. B. durch Auftragen der Werte infolge $A = 1{,}0$ t oder $B = 1{,}0$ t oder durch Ausrechnen irgendeiner anderen Ordinate. Statt dessen kann man auch den kinematischen Satz benutzen: Der Einsenkungsunterschied $\delta_{II} - \delta_I$ am Mechanismus ergibt den Ordinatenunterschied $\eta_{II} - \eta_I$ der Einflußlinie. Dieser Einsenkungsunterschied (zweier Scheiben, die sich an dem betreffenden Punkte überdecken) läßt sich durch den gegenseitigen Drehungswinkel der betreffenden beiden Scheiben, bzw. durch direktes Einzeichnen der Verrückungen der Scheiben, auffinden. Auf diese Weise kann m ı die Vertikalabstände w **rechnerisch** bestimmen (Formeln 6 bis 8a) und hierdurch die ganze Einflußlinie festlegen.

§ 75.

Beispiele zu § 74.

Erste Aufgabe.

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A in Fig. 199 ist zu bestimmen!

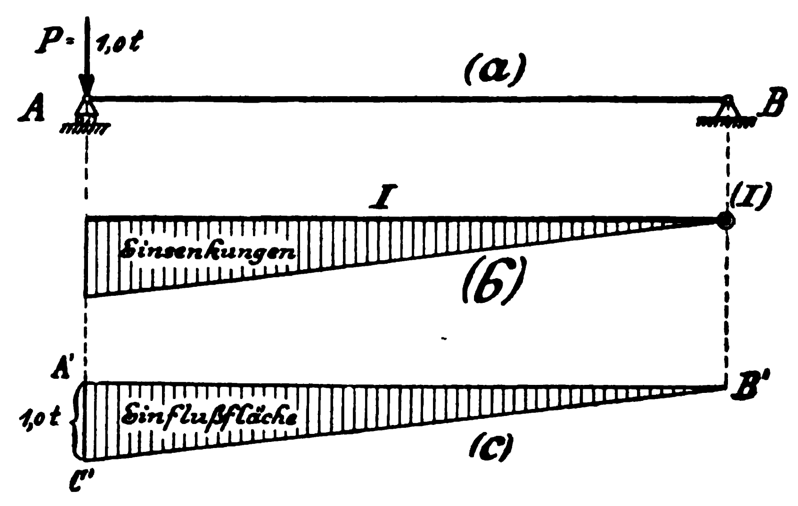


Fig. 199.

Durch Fortnahme der Kraft A entsteht ein Mechanismus, der sich in diesem Falle als einfacher Hebel darstellt. Die virtuelle Bewegung desselben ist die Drehbewegung um B. Daraus folgt, daß die Einsenkungsfläche die in Fig. 199b gezeichnete Form

haben muß: Ein Dreieck mit der Spitze in B. Folglich ist auch die Einflußlinie für den Auflagerdruck ein Dreieck mit der Spitze unter B (Fig. 199c). Hiermit ist die Gestalt der Einflußlinie gefunden.

Um nun auch den Maßstab zu bestimmen, in dem das Dreieck $A'B'C'$ zu messen wäre, rechnen wir eine Ordinate desselben aus. Z. B. die Ordinate unter Punkt A: Steht an dieser Stelle eine Last $P = 1{,}0$ t, so ist der Auflagerdruck augenscheinlich $A = 1{,}0$ t. Die Strecke $A'C'$ in Fig. 199c bedeutet also 1,0 t. Hiernach sind dann alle übrigen Ordinaten zu messen. Praktisch wird man natürlich so vorgehen, daß man sich von vornherein über den Maßstab schlüssig macht, hiernach die Strecke $A'C' = 1{,}0$ t aufträgt und dann das ganze Dreieck hinzuzeichnet.

Zweite Aufgabe.

Für die Spannkraft O in Fig. 200 ist die Einflußlinie kinematisch abzuleiten!

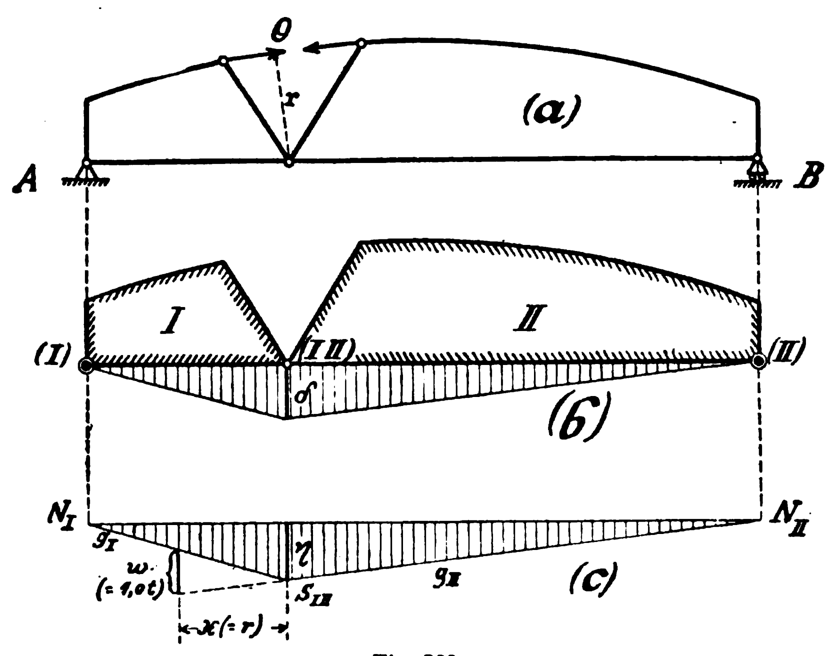


Fig. 200.

Durch Fortnahme des Stabes O entsteht der Mechanismus Fig. 200b, der zwei Scheiben I und II aufweist. Dessen Einsenkungsfläche ist augenscheinlich das in Fig. 200b schraffierte Dreieck. Dieses Dreieck ist also auch die Einflußfläche für den

Stab O (Fig. 200c). Hiermit ist bereits die Gestalt der Einflußfläche gefunden.

Wollte man genauer vorgehen, so würde man bei dem Mechanismus der Reihe nach den absoluten Pol der Scheibe I, den Relativpol von II gegen I und den absoluten Pol von II bestimmen. Hierdurch hätte man von den Linien g_I und g_{II} die Nullpunkte N_I und N_{II} und den Schnittpunkt $S_{I\,II}$.

Zur rechnungsmäßigen Festlegung des Dreiecks kann man die Ordinate η ausrechnen (z. B. nach Formel I oder Ia von Fig. 131), oder man würde im Abstande $x = r$ die Strecke w abmessen. Da diese bekanntlich gleich 1,0 t ist, gibt sie den Maßstab an, in dem die ganze Einflußfläche abzumessen ist.

Bemerkung: Der Vollständigkeit wegen sei bei dieser Gelegenheit daran erinnert, daß durch Anordnung von Querträgern die Einflußlinie eventuell abgeändert werden muß. Denn von Belastungs punkt zu Belastungspunkt muß eine Einflußlinie stets gerade verlaufen. Augenscheinlich ist dies aber eine sekundäre Sorge, die erst nach dem eigentlichen Aufzeichnen der Einflußlinie zu beachten ist.

Dritte Aufgabe.

Für den Mechanismus Fig. 201, der durch Fortnahme der Vertikalen V entstanden ist, ist die Einsenkungsfläche (und hiermit die Einflußfläche für V) zu zeichnen!

Der durch Fortnahme von V entstehende Mechanismus enthält die vier Scheiben $I..IV$ (Fig. 201b). Wir wollen die Belastung am Untergurt annehmen. Dann sind für die Einteilung der Einflußlinie in gerade Linien die Scheiben I, III und II zu beachten.

Der Anschauung wegen möge bei diesem Mechanismus die gesamte Einsenkungsfläche eingezeichnet werden. Zu diesem Zwecke sind in Fig. 201b zunächst die Pole (I), (III) und (II) bestimmt. Dann sind die um 90° gedrehten Verrückungen eingezeichnet: Verrückung $\overline{1\,1''}$ im beliebigen Maßstabe angenommen, hierauf Verrückung $\overline{2\,2''}$, hierauf $\overline{3\,3''}$ [mit Unterstützung des Polstrahles $\overline{(II\,3)}$], hierauf $\overline{4\,4''}$. Um hieraus die wirklichen Verrückungen zu erhalten, müssen die Strecken $\overline{1\,1''}$ usw. sämtlich um 90° zurückgedreht werden. Drehen wir sie z. B. sämtlich rechts herum, so erhalten wir die in Fig. 200c gezeichneten wirklichen Verrückungen der Punkte 0, 1, 4 und 5. Und da diese Verrückungen in diesem Falle bereits sämtlich in vertikaler Richtung zeigen, so sind sie gleichzeitig die Einsenkungen des Mechanismus. Fig. 201c zeigt also das interessante Bild, wie sich der Untergurt des Mechanismus

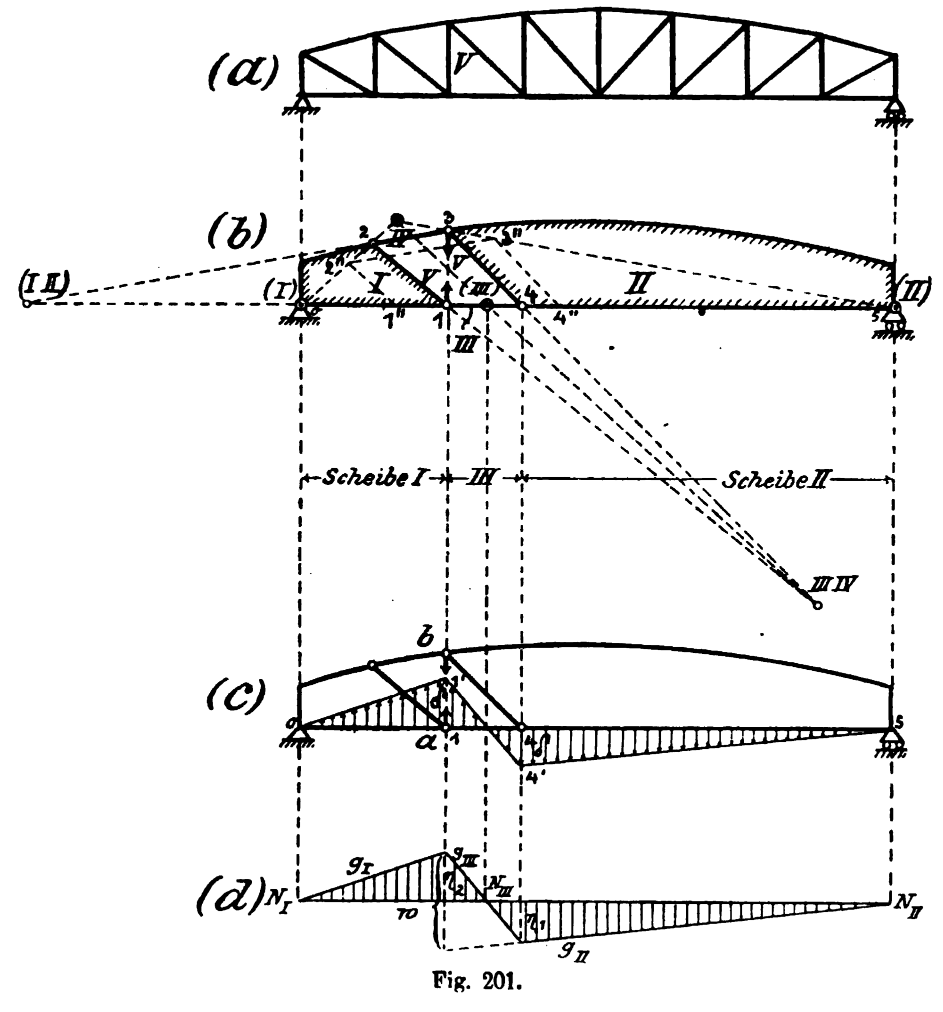


Fig. 201.

Fig. 201b im nächsten Augenblicke nach der Antreibung einsenken würde. Man sieht: Wenn Punkt *4* nach unten geht, wippt der Punkt *1* nach oben.

Diese Einsenkungslinie ist nun bekanntlich gleichzeitig die Einflußlinie für *V*. Zur rechnungsmäßigen Bestimmung müßte man dann noch eine Ordinate, z. B. η_1 oder η_2, oder auch den Vertikalabstand *w* festlegen.

Vierte Aufgabe.

Für die Zwischenvertikalen V in Fig. 202 ist die Einflußlinie zu entwickeln!

Die Belastung greife am Obergurt an. Die Pole sind in folgenden Gruppen bestimmt: (*I*), (*I II*) und hieraus (*II*); (*III I*),

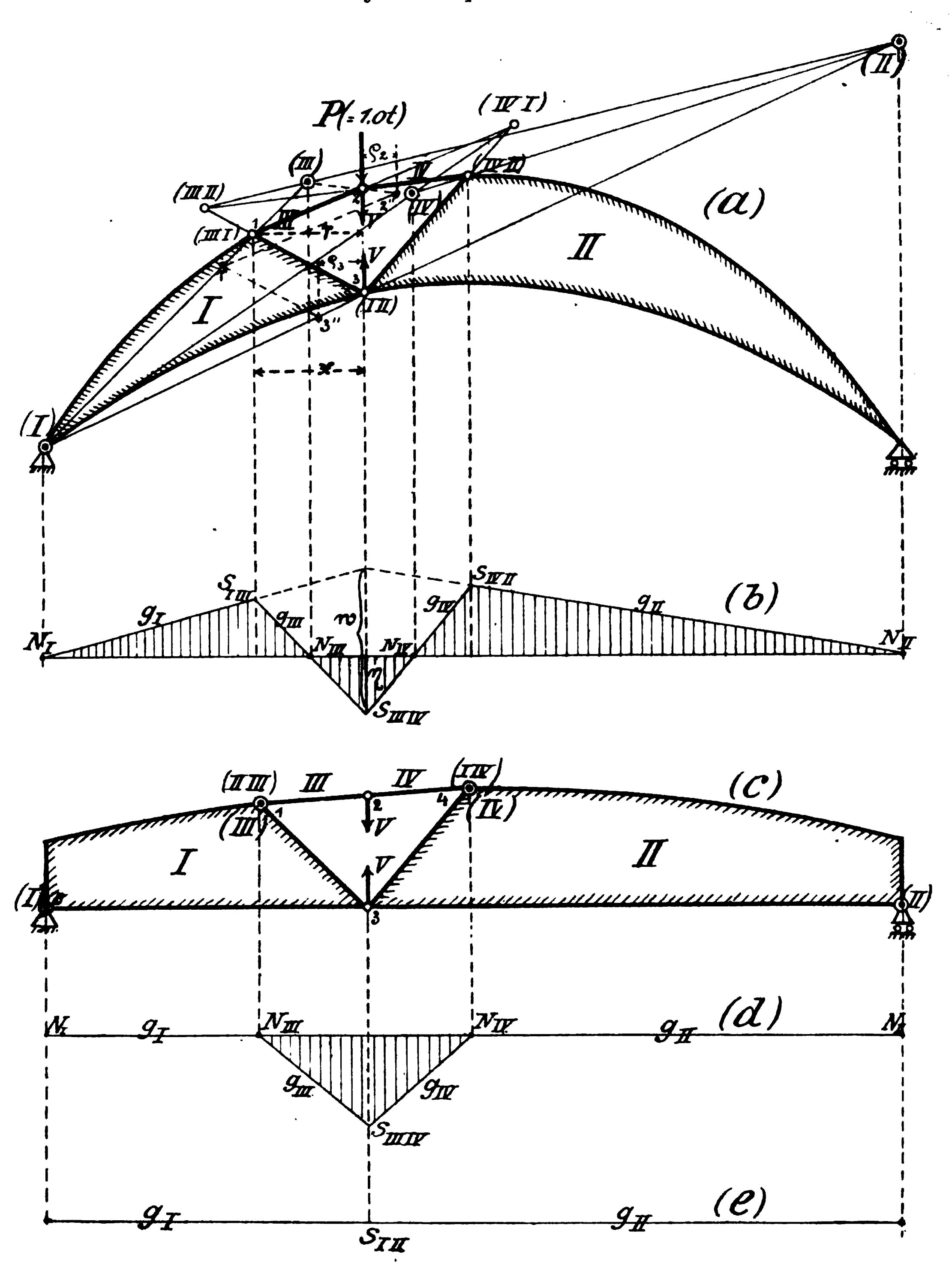


Fig. 202.

$(III\,II)$ und hieraus durch geradlinige Verbindung mit (I) bzw. (II) der Pol (III); entsprechend der Pol (IV) aus $(IV\,II)$ in Verbindung mit (II) und aus $(IV\,I)$ in Verbindung mit (I).

Aus diesen absoluten und relativen Polen ergibt sich sofort die Gestalt der ganzen Einflußlinie: Linie g_I mit Nullpunkt N_I; Linie g_{III} mit Nullpunkt N_{III}; g_{IV} mit N_{IV}; g_{II} mit N_{II}. Knickpunkte $S_{I\,III}$ usw. entsprechend unter den Relativpolen $(I\,III)$ usw. Als weitere Kontrollen hat man noch: g_I und g_{II} bzw. deren Verlängerungen müssen sich unter $(I\,II)$ schneiden; g_{III} und g_{II} müssen sich unter $(III\,II)$ schneiden usw. Somit ist die Gestalt der Einflußlinie festgelegt.

Um nun auch noch eine Ordinate rechnerisch zu bestimmen, kann man z. B. die um 90° gedrehten Verrückungen verwenden. Daraus folgen dann sofort $\overline{2\,2''}$ [auf Pohlstrahl $\overline{(III)2}$] und $\overline{3\,3''}$. Und es ergibt sich für eine im Punkte *2* stehende Last von $P = 1{,}0$ t:

$$P \cdot \varrho_2 + V \cdot \varrho_2 + V \cdot \varrho_3 = 0\,,$$

$$V = \frac{-P \cdot \varrho_2}{\varrho_2 + \varrho_3}\,.$$

Hierdurch ist die Ordinate η bestimmt. Von dieser aus würde man dann die ganze Einflußlinie entwickeln. (Vgl. hiermit die elementare Ableitung zu Fig. 95.)

Viel einfacher aber ist es, man arbeitet mit dem Vertikalabstand w. (Im Abstande $x = r$ ist bekanntlich $w_{I\,III} = 1{,}0$ t.) Dann braucht man nur die Pole der Scheiben zu bestimmen und hat mit einem Schlage Form und Maßstab der Einflußlinie.

Übungsaufgabe: Zeichne die Einflußlinie für V für Belastung am Untergurt!

Zusatz: In Fig. 202c ist der Fall untersucht, daß der Obergurt an der Stelle, wo die Vertikale angreift, ohne Knick durchläuft. Aus den daselbst eingeschriebenen Polen ergibt sich folgendes interessante Resultat: Der Punkt *1* der Scheibe *III* fällt mit dem Pol (III) dieser Scheibe zusammen; d. h. er erleidet die Verrückung „Null". Da der Punkt *1* andererseits auch zu Scheibe *I* gehört, so haben wir also bei Scheibe *I* zwei Punkte, nämlich *1* und *0*, die in Ruhe bleiben, und daraus folgt, daß die ganze Scheibe *I* in Ruhe bleibt. Entsprechend sieht man, daß bei der Inbewegungsetzung des Mechanismus die Scheibe *II* in Ruhe bleibt. Es bewegen sich also nur die Scheiben *III* und *IV*.

Man beachte, daß alle Bewegungen unendlich klein sind. Wenn also infolge Verrückung des Punktes *2* die ursprünglich gerade Linie *1—2—4*

in ein Dreieck übergeht, so werden die Endpunkte *1* und *4* nur um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung verschoben (vgl. § 71). Da diese unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen erster Ordnung vernachlässigt werden können, so erscheinen die Scheiben *I* und *II* in Ruhe.]

Aus diesen Bewegungen der Scheibe, bzw. aus der Lage der Nullpunkte N_I, N_{II} usw. folgt sofort: Greift die Belastung in Fig. 202c am Obergurt an, so bleibt von der Einflußlinie nur ein Dreieck g_{III}, g_{IV} übrig (Fig. 202d). Greift die Belastung am Untergurt an, so fällt die ganze Einflußlinie mit der Nullachse zusammen (Fig. 202e).

Fünfte Aufgabe.

Für die Diagonalstäbe D_2 und D_3 in Fig. 203 sind die Einflußlinien zu entwerfen!

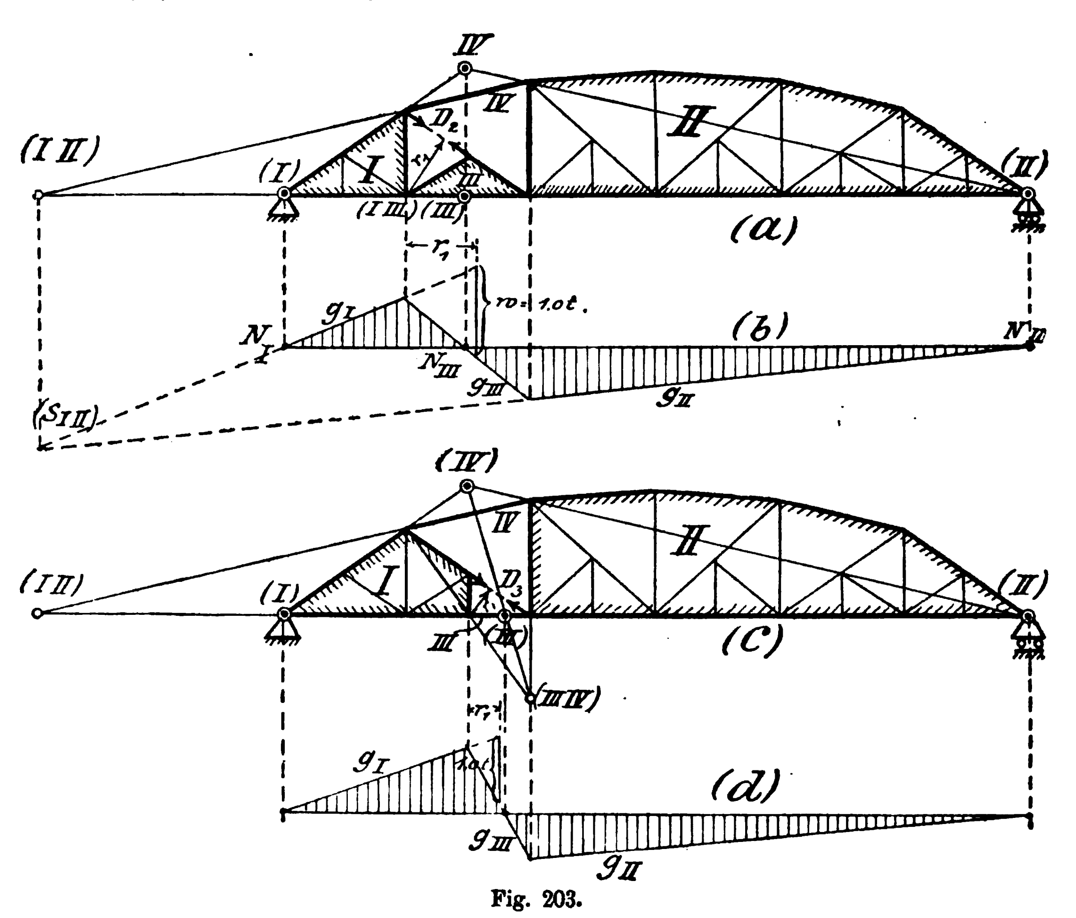


Fig. 203.

Nach Fortnahme des Stabes D_2 entsteht ein Mechanismus mit den vier Scheiben $I..IV$. Die Pole dieser Scheiben lassen sich leicht bestimmen (Fig. 203a). Hierdurch ist dann auch die Form der Einflußlinie für D_2 festgelegt. Der Maßstab für die Ordinaten ergibt sich, indem man den Senkungsunterschied der Scheiben I und III betrachtet. [Auftragen von $w = 1{,}0$ t im Abstande r_1 vom Relativpole.]

Bei Fortnahme des Stabes D_3 entsteht ein anderer Mechanismus (Fig. 203c). Dementsprechend sieht auch die Einflußlinie für D_3 anders aus als die für D_2. (Vgl. hiermit Fig. 124.)

Sechste Aufgabe.

Für den Gurtstab O des Fachwerkes Fig. 204 ist die Einflußfläche abzuleiten! (Belastung vertikal).

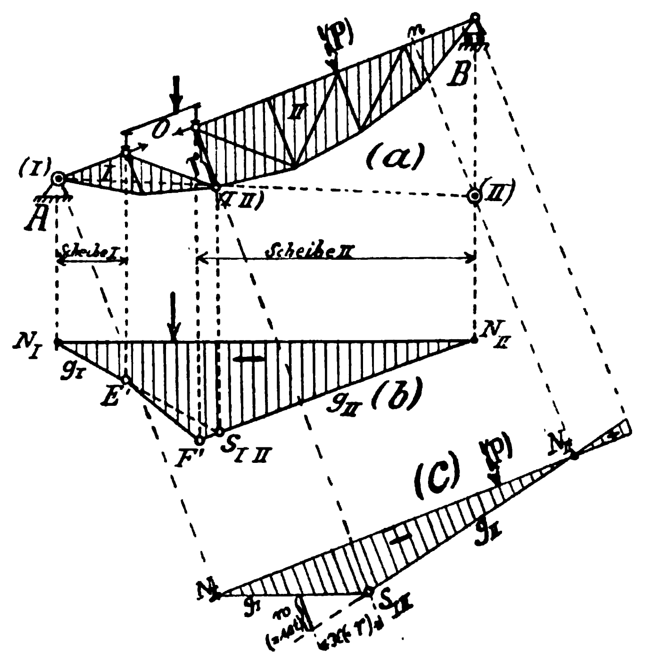


Fig. 204.

Die Polbestimmung ist aus Fig. 204a ersichtlich. Für die Einflußlinie (Fig. 204b) ergeben sich also zunächst die Linien g_I und g_{II}. (Schnittpunkt derselben S_{III}.) Durch Hinunterloten der Belastungspunkte ergibt sich dann das Schlußstück $E'F'$. (Vgl. hierzu Fig. 125.) [Fig. 204c bezieht sich auf § 76.]

Siebente Aufgabe.

Für den Stab U_2 in Fig. 205 ist die Einflußlinie zu berechnen!

Die Polbestimmung ist aus Fig. 205a ersichtlich. Hieraus folgt, daß die Einflußlinie aus den beiden Geraden g_{II} und g_{III} mit den Nullpunkten N_{II} und N_{III} besteht. Zur vollständigen

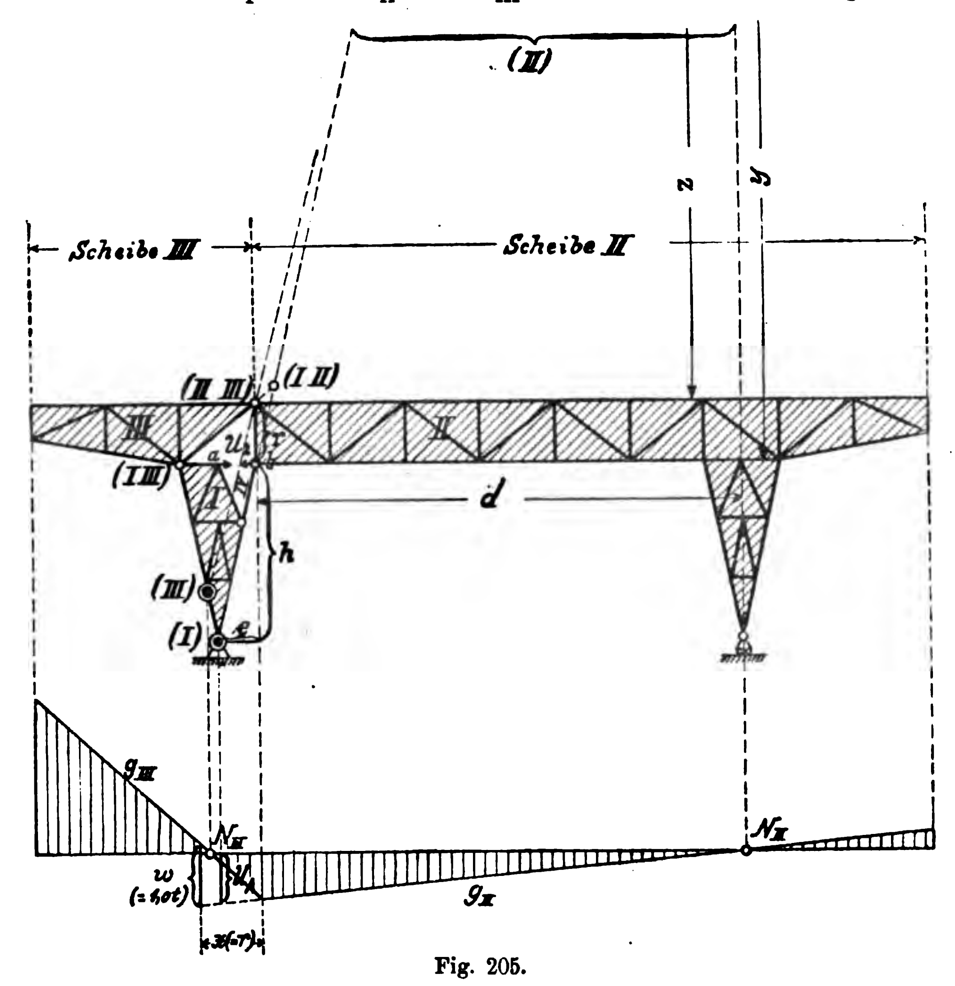


Fig. 205.

Ausrechnung der Einflußlinie kann man z. B. die Spannkraft U_A (infolge $A = 1{,}0$ t) oder den Vertikalabstand zwischen g_{III} und g_{II} benutzen.

Bemerkung: Da der Pol (*II*) ziemlich ungünstig liegt, wird man ihn zweckmäßig rechnerisch bestimmen: Zunächst rechnet man y aus: $y = h\frac{d}{e}$. Hierdurch hat man dann auch z und folglich

auch die Neigung der Linie $\overline{(II)(II\,III)}$. Auf diese Weise bekommt man den Pol (III) genau.

Achte Aufgabe.

Der Leser leite sämtliche in den früheren Abschnitten gebrauchten Einflußlinien auf kinematischem Wege ab. Insbesondere auch die zum Dreigelenkbogen gehörigen, z. B. Fig. 165. Auf diese Weise wird er die Überlegenheit der kinematischen Methode erkennen.

§ 76.

Einflußlinien für schräge Belastung.

Alle bisher durchgenommenen Einflußlinien bezogen sich auf vertikale Belastung. Hatte insbesondere das betreffende Tragwerk ein festes und ein bewegliches Lager (einfacher Fachwerkbalken), so lag der Fall stets so, daß die Lasten rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des beweglichen Lagers wirkten. Dann sind bei jeder Laststellung die Lasten, die Auflagerkraft am beweglichen Lager und die Auflagerkraft am festen Lager einander parallel, und auf diese Anordnung bezogen sich unsere bisher für den Fachwerkbalken abgeleiteten Einflußlinien (vgl. sämtliche Einflußlinien von Fig. 84 ab).

Nun wollen wir den Fall untersuchen, daß die Lasten nicht parallel der Auflagerkraft des beweglichen Lagers sind. In Fig. 204a sei z. B. die Belastung rechtwinklig zum Obergurt gerichtet, also schräg zum beweglichen Lager. Hierdurch entsteht ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber Vertikalbelastung: Die Auflagerkraft am festen Lager ändert bei den verschiedenen Laststellungen nicht nur ihre Größe, sondern auch ihre Richtung. [Denn die drei Kräfte A, B und (P) müssen sich stets in einem Punkte schneiden. Da nun bei wandernder schräger Last der Schnittpunkt von P sich längs der Kraftrichtung von B verschiebt, so ändert A nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung.] Wegen dieser Änderung der Richtung von A kann man also bei der Ableitung der Einflußlinien auch nicht mit einer in feststehender Richtung angenommenen Kraft $A = 1{,}0$ t operieren, sondern muß andere Wege einschlagen.

Auf elementare Weise lassen sich in einem solchen Falle die Einflußlinien ableiten, indem man die Auflagerkräfte in Komponenten z. B. in Richtung der Kräfte und in Richtung der Verbindungslinie der beiden Lagerpunkte zerlegt (ähnlich wie beim Dreigelenkbogen). Viel besser ist jedoch die Herleitung auf kinematischem Wege.

Denn darin besteht ja eben der Vorzug der KWP-Methode, daß die Auflagerkräfte (Zwangskräfte) überhaupt keine Rolle spielen. Bei der kinematischen Herleitung der Einflußlinien ist es deshalb vollständig gleichgültig, ob die Belastung vertikal oder schräg wirkt. Die Spannkraft in dem zu untersuchenden Stabe infolge einer Last P ist stets:

$$S = \frac{P \cdot \delta}{\Delta s}.$$

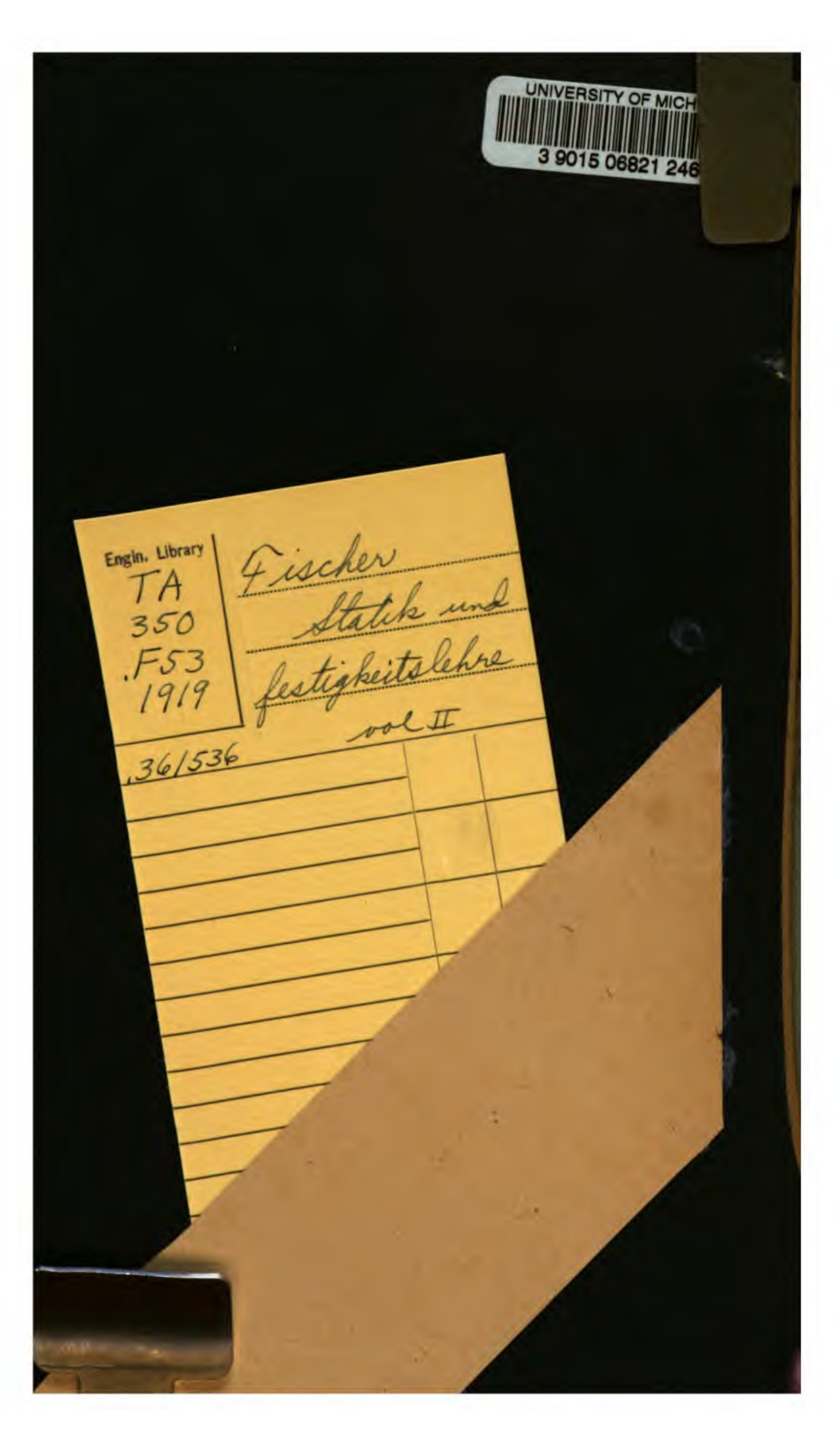
Hierin ist Δs bekanntlich die Abstandsänderung, die die beiden Endpunkte a und b des betreffenden Stabes erfahren; δ ist der „Weg" der Kraft P, also die Projektion der Verrückung v auf die (jetzt schräge) Kraftrichtung.

Um die Einflußlinie aufzuzeichnen, ziehen wir also eine Nullachse rechtwinklig zu den (schrägen) Kräften, bestimmen die Anzahl der Geraden, aus denen die Einflußlinie bestehen muß; projizieren dann die Pole der Scheiben auf die Nullachse und erhalten hierdurch die Nullpunkte der Einflußlinie usw., wie in allen früheren Fällen.

Beispiel: *Für das ansteigende Fachwerk Fig. 204a ist für eine wandernde Belastung (P) die Einflußlinie des Stabes O zu entwickeln!* (Berechnung eines Schrägaufzuges.)

Die Pole (I), $(I\,II)$ und (II) sind sofort bestimmt. (Diese hängen ja nur von dem Aufbau des Mechanismus, d. h. von seinen Lagern, Gelenken usw., ab; nicht aber von der Belastung.) Dann ziehen wir die Nullachse der Einflußlinie rechtwinklig zu der Belastungsrichtung (Fig. 204c) und bestimmen durch Hinunterloten der Pole die Nullpunkte N_I, N_{II} und den Schnittpunkt $S_{I\,II}$ der beiden Geraden g_I und g_{II}. [Eine Last (P) im Punkte n hätte den Weg δ gleich Null; folglich bestimmt die Projektion von Pol (II) den Nullpunkt N_{II}, genau entsprechend wie bei vertikaler Belastung.] Hiermit ist die Einflußlinie fertig. Der Maßstab für die Ordinaten ist z. B. dadurch gegeben, daß der Abstand w zwischen g_I und g_{II}, in einer Entfernung $x = r$ vom Relativpole gemessen, gerade 1,0 t bedeutet.

Hiermit ist der Einfluß einer schrägen wandernden Belastung erledigt. Wir sind jetzt also bis zu dem Standpunkte vorgedrungen, daß wir jedes Tragwerk, sofern es überhaupt auf rein statischem Wege bestimmbar ist, auch wirklich berechnen können, es möge aufgebaut und belastet sein, wie es wolle.


UNIVERSITY OF MICH
3 9015 06821 246
Engin. Library
TA
350
.F53
1919
Fischer
Statik und
festigkeitslehre
vol II
.36/536